「パーフェクトイド代数の概要」講演メモ

1　パーフェクトイド代数の定義

K を（高さ 1 の）完備付値体とし，その付値環を K° で表す．K° の極大イデアルを $\mathfrak{m}_K$ と書く．$K^\circ/\mathfrak{m}_K$ の標数 p は正であると仮定する．$\varpi \in \mathfrak{m}_K \setminus \{0\}$ を $p \in \varpi K^\circ$ となるように固定し，K° および K に $\{\varpi^m K^\circ\}_{m\geq 0}$ を 0 の基本近傍系とする位相を入れる．

定義 1.1
K が**パーフェクトイド体**であるとは，K が離散付値体ではなく，$K^\circ/\varpi K^\circ \to K^\circ/\varpi K^\circ;\ x \mapsto x^p$ が全射であることをいう．

例 1.2
$\mathbb{Q}_p$ の代数閉包の完備化 $\mathbb{C}_p$, $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}) = \bigcup_{m\geq 1} \mathbb{Q}_p(\mu_{p^m})$ の完備化，$\mathbb{Q}_p(p^{p^{-\infty}}) = \bigcup_{m\geq 1} \mathbb{Q}_p(p^{p^{-m}})$ の完備化はいずれも標数 0 のパーフェクトイド体である．また，$\mathbb{F}_p((T))$ の代数閉包の完備化, $\mathbb{F}_p((T^{p^{-\infty}})) = \bigcup_{m\geq 1} \mathbb{F}_p((T^{p^{-m}}))$ の完備化はいずれも標数 p のパーフェクトイド体である．

以下，K をパーフェクトイド体とする．

定義 1.3
以下を満たす完備位相的 K 代数 A を**パーフェクトイド K 代数**という：

- $A^\circ = \{a \in A \mid a$ は冪有界$\}$ は A の有界な部分環となる．ここで，A の部分集合 S が有界とは，$0 \in A$ の任意の開近傍 U に対し，$0 \in A$ の開近傍 V が存在して，$V \cdot S \subset U$ となることをいう．また，$a \in A$ が冪有界とは，$\{a^n \mid n \geq 1\}$ が有界であることをいう．
- $\{\varpi^m A^\circ\}_{m\geq 0}$ は $0 \in A$ の基本近傍系である．
- $A^\circ/\varpi A^\circ \to A^\circ/\varpi A^\circ;\ x \mapsto x^p$ は全射である．

注意 1.4

(i) A° の有界性はかなり強い条件であり，これから A が被約であることが従う．実際，$a \in A$ が冪零元ならば $Ka \subset A^\circ$ であるが，$a = 0$ の場合を除き Ka は有界でない．

(ii) K の標数が p のときは，最初の 2 つの条件のもとで，3 つ目の条件は A が完全であること（$A \to A;\ x \mapsto x^p$ が同型であること）と同値である．

定義 1.5
A をパーフェクトイド K 代数とする．A° の開部分環 A^+ が**整元環**であるとは，A^+ が A の中で整閉であることとする．パーフェクトイド K 代数 A とその整元環 A^+ の組 (A, A^+) をここでは**パーフェクトイド対**と呼ぶことにする．

例 1.6
$K^\circ[T_1^{p^{-\infty}}, \ldots, T_n^{p^{-\infty}}]$ の ϖ 進完備化を $K^\circ\langle T_1^{p^{-\infty}}, \ldots, T_n^{p^{-\infty}}\rangle$ と書くと，

$$K\langle T_1^{p^{-\infty}}, \ldots, T_n^{p^{-\infty}}\rangle = K^\circ\langle T_1^{p^{-\infty}}, \ldots, T_n^{p^{-\infty}}\rangle[1/\varpi]$$

はパーフェクトイド K 代数であり，$K^\circ\langle T_1^{p^{-\infty}}, \ldots, T_n^{p^{-\infty}}\rangle$ はその整元環である．

2　傾同値 (tilting equivalence)

定義 2.1
　$K^{\flat\circ} = \varprojlim_{x\mapsto x^p} K^\circ/\varpi K^\circ$, $K^\flat = \operatorname{Frac} K^{\flat\circ}$ とおく．$K^\flat$ は標数 p のパーフェクトイド体となる．

例 2.2
　$\mathbb{C}_p^\flat$ は $\mathbb{F}_p((T))$ の代数閉包の完備化と同型である．また，K が $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ または $\mathbb{Q}_p(p^{p^{-\infty}})$ の完備化ならば，$K^\flat$ は $\mathbb{F}_p((T^{p^{-\infty}}))$ の完備化と同型である．なお，K の標数が p ならば $K^\flat = K$ である．

定理 2.3（傾同値）
　パーフェクトイド K 代数の圏とパーフェクトイド $K^\flat$ 代数の圏は圏同値である．パーフェクトイド K 代数 A に対応するパーフェクトイド $K^\flat$ 代数を $A^\flat$ と書き，A の **tilt** と呼ぶ．
　さらに，A の整元環と $A^\flat$ の整元環は一対一に対応する．A の整元環 A^+ に対応する $A^\flat$ の整元環を $A^{+\flat}$ と書く．

　傾同値の構成方法は越川さんの講演で解説される．

例 2.4
　$A = K\langle T_1^{p^{-\infty}}, \dots, T_n^{p^{-\infty}}\rangle$, $A^+ = K^\circ\langle T_1^{p^{-\infty}}, \dots, T_n^{p^{-\infty}}\rangle$ のとき，$A^\flat = K^\flat\langle T_1^{p^{-\infty}}, \dots, T_n^{p^{-\infty}}\rangle$, $A^{+\flat} = K^{\flat\circ}\langle T_1^{p^{-\infty}}, \dots, T_n^{p^{-\infty}}\rangle$ である．

3　有理局所化

定義 3.1
　A をパーフェクトイド K 代数とする．$f_1, \dots, f_n, g \in A$ が $f_1 A + \cdots + f_n A = A$ を満たすとき，以下の手順によって位相的 K 代数 $A\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g}\rangle$ を構成することができる：

　　$A[\frac{1}{g}]$ の位相を，$\{\varpi^m A^\circ[\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_n}{g}]\}_{m\geq 0}$ が 0 の基本近傍系となるように定める．この位相に関する $A[\frac{1}{g}]$ の完備化を $A\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g}\rangle$ と定める．

これはパーフェクトイド K 代数となることが証明できる．このようなパーフェクトイド K 代数を A の**有理局所化 (rational localization)** と呼ぶ．
　A^+ を A の整元環とするとき，$A^+[\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_n}{g}]$ は $A[\frac{1}{g}]$ の開部分環である．これの整閉包の完備化を $A^+\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g}\rangle$ と書く．$(A\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g}\rangle, A^+\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{g}\rangle)$ はパーフェクトイド対となる．

　有理局所化は以下のような「層の条件」を満たす：

定理 3.2
　(A, A^+) を K 上のパーフェクトイド対とする．$f_1, \dots, f_n \in A$ が $f_1 A + \cdots + f_n A = A$ を満たすとする．$1 \leq i \leq n$ に対し $A_i = A\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{f_i}\rangle$ とおき，さらに $1 \leq i, j \leq n$ に対し $A_{ij} = A_i\langle \frac{f_1,\dots,f_n}{f_j}\rangle$ とおく．同様に A_i^+, A_{ij}^+ を定める．このとき，以下の完全系列がある：

$$0 \to A \to \prod_i A_i \to \prod_{i,j} A_{ij}, \quad 0 \to A^+ \to \prod_i A_i^+ \to \prod_{i,j} A_{ij}^+.$$

有理局所化および定理 3.2 の背後には，以下のような幾何学的対象がある．K 上のパーフェクトイド対 (A, A^+) に対し，位相空間 $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ および X 上の層 $\mathcal{O}_X$ とその部分層 $\mathcal{O}_X^+$ の組が定まり，以下を満たす：

> $f_1, \ldots, f_n, g \in A$ が $f_1 A + \cdots + f_n A = A$ を満たすとき，X の開集合 $U = U(\frac{f_1,\ldots,f_n}{g})$ が定まり，$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = A\langle \frac{f_1,\ldots,f_n}{g} \rangle$, $\Gamma(U, \mathcal{O}_X^+) = A^+\langle \frac{f_1,\ldots,f_n}{g} \rangle$ を満たす．$U(\frac{f_1,\ldots,f_n}{g})$ の形の開集合を**有理部分集合**と呼ぶ．有理部分集合全体は X の開基をなす．

有理部分集合 $U \subset X$ に対し，$A(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, $A^+(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X^+)$ とおく．局所的に $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ ((A, A^+) はパーフェクトイド対）という形をしている空間を**パーフェクトイド空間**と呼ぶ．

傾同値（定理 2.3）との関係は以下のようになっている：

定理 3.3

(A, A^+) を K 上のパーフェクトイド対とし，$X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$, $X^\flat = \mathrm{Spa}(A^\flat, A^{+\flat})$ とおく．

(i) 同相写像 $X \cong X^\flat$ が自然に定まる．この同相による $x \in X$ の像を $x^\flat$ と書く．

(ii) X の有理部分集合 U の像を $U^\flat$ と書くと，$U \mapsto U^\flat$ は X の有理部分集合と $X^\flat$ の有理部分集合との間の全単射を引き起こす．

(iii) X の有理部分集合 U に対し，$A(U)^\flat \cong A^\flat(U^\flat)$, $A^+(U)^\flat \cong A^{+\flat}(U^\flat)$ が成り立つ．

本節の内容は津嶋さんの講演においてもう少し詳しく解説される．

4 Almost purity

定理 4.1（Almost purity）

A をパーフェクトイド K 代数とし，B を A 上有限エタールな完備位相的 K 代数とする．このとき，B はパーフェクトイド K 代数であり，$A^\circ \to B^\circ$ は almost 有限エタールである．

Almost 有限エタールの定義は越川さんの講演で説明される．

定理 4.1 の証明のポイントは以下の 3 つである：

(a) K の標数が p のとき，定理 4.1 が成り立つ（A の Frobenius 射を用いる．越川さんの講演を参照）．

(b) $A = K$ のとき定理 4.1 が成り立つ．より正確には，次が分かる：L を K の有限次分離拡大とすると，L はパーフェクトイド体である．さらに，$L \mapsto L^\flat$ により K の有限次分離拡大の圏と $K^\flat$ の有限次分離拡大の圏は圏同値になる．特に，K と $K^\flat$ の絶対 Galois 群は同型になる．

(c) $X = \mathrm{Spa}(A, A^\circ)$ および $x \in X$ に対し，$\widehat{\kappa}(x) = \mathcal{O}_{X,x}^{+\wedge}[1/\varpi]$ はパーフェクトイド体となる．ここで，$\mathcal{O}_{X,x}^{+\wedge}$ は $\mathcal{O}_{X,x}^+$ の ϖ 進完備化を表す．

これらを組み合わせると，以下のような議論ができる．B および各 $x \in X = \mathrm{Spa}(A, A^\circ)$ に対し，有限エタール $\widehat{\kappa}(x)$ 代数 $\widehat{B}_x$ が得られる．このとき，(b), (c) より $\widehat{B}_x$ はパーフェクトイド $\widehat{\kappa}(x)$ 代数であるから，パーフェクトイド $\widehat{\kappa}^\flat(x)$ 代数 $\widehat{B}_x^\flat$ を考えることができる．(b) より，これは有限エタール $\widehat{\kappa}^\flat(x)$ 代数になる．定理 3.3 から $\widehat{\kappa}^\flat(x) \cong \widehat{\kappa}(x^\flat) = \mathcal{O}_{X^\flat,x^\flat}^{+\wedge}[1/\varpi^\flat]$ となる（$\varpi^\flat \in \mathfrak{m}_{K^\flat} \setminus \{0\}$ を固定した）．したがって Elkik の定理 [Elk73]（[GR03, §5.4] も参照）から，$\mathcal{O}_{X^\flat,x^\flat} = \mathcal{O}_{X^\flat,x^\flat}^+[1/\varpi^\flat]$ 上の有限エタール代数 $B_x^\flat$ が得られる．よって，$x^\flat$ を含む有理部分集合 V が存在して，$B_x^\flat$ は有限エタール $A^\flat(V)$ 代数 $B_V^\flat$ から来る．$X^\flat$ に対する定理 3.2 を使ってこれらを貼り合わせることで，有限エタール $A^\flat$ 代数 $B^\flat$ が得られる．(a) より，各 V に対して $B_V^\flat$ はパーフェクトイド $K^\flat$ 代数になるから，$B^\flat$ もパーフェクトイド $K^\flat$ 代数になることが分かる（$K^\flat$ が標数 p なので，$B^\flat$ が完全であることを確認すればよい）．$B^\flat$ に対応す

るパーフェクトイド K 代数を B' と書くと，X に対する定理 3.2 を使うことで $B \cong B'$ が示せる．特に B はパーフェクトイド K 代数である．$A^\circ \to B^\circ$ が almost 有限エタールであることは，(a) すなわち $A^{\flat\circ} \to B^{\flat\circ}$ が almost 有限エタールであることと傾同値（定理 2.3）の構成から従う．

定理 3.2 の主張は完全に環論の言葉で書けるが，その証明には幾何学的な解釈が必要となることを注意しておきたい．

5 直和因子予想との関係

最後に，almost purity と直和因子予想との関係について述べる．

定理 5.1（[Bha14]）
R を Noether 整域とし，S を R の有限拡大環とする．p を素数とし，以下の条件を仮定する：

- $R[1/p] \hookrightarrow S[1/p]$ はエタールである．
- 標数 0 かつ剰余標数 p のパーフェクトイド体 K，パーフェクトイド K 代数 A および忠実平坦な環準同型 $R \to A^\circ$ が存在する．

このとき，R 加群の準同型 $\phi\colon S \to R$ で $R \hookrightarrow S \xrightarrow{\phi} R$ が恒等写像になるものが存在する．

証明 $B = S \otimes_R A = S[1/p] \otimes_{R[1/p]} A$ とおくと，B は A 上有限エタールなので，定理 4.1 より B はパーフェクトイド K 代数であり，$A^\circ \to B^\circ$ は almost 有限エタールである．

$Q = S/R, Q' = B^\circ/A^\circ$ とおき，完全系列 $0 \to R \to S \to Q \to 0, 0 \to A^\circ \to B^\circ \to Q' \to 0$ の定める拡大類を $\alpha \in \mathrm{Ext}^1_R(Q,R), \beta \in \mathrm{Ext}^1_{A^\circ}(Q',A^\circ)$ と書く．$S \otimes_R A^\circ \to B$ の像が B° に含まれることに注意すると，以下の可換図式がある：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A^\circ & \longrightarrow & S \otimes_R A^\circ & \longrightarrow & Q \otimes_R A^\circ & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A^\circ & \longrightarrow & B^\circ & \longrightarrow & Q' & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

したがって，β の $\mathrm{Ext}^1_{A^\circ}(Q',A^\circ) \to \mathrm{Ext}^1_{A^\circ}(Q \otimes_R A^\circ, A^\circ) = \mathrm{Ext}^1_R(Q,R) \otimes_R A^\circ$ による像は $\alpha \otimes 1$ に一致する．特に，$I = \mathrm{Ann}_R(\alpha)$ とおくと，$\mathrm{Ann}_{A^\circ}(\beta) \subset \mathrm{Ann}_{A^\circ}(\alpha \otimes 1) = IA^\circ$ が成り立つ（$R \to A^\circ$ の平坦性を用いた）．一方，$A^\circ \to B^\circ$ が almost 有限エタールであることから，$0 \to A^\circ \to B^\circ \to Q' \to 0$ は「almost に分裂する」ことが分かる．つまり，$\mathfrak{m}_K A^\circ \subset \mathrm{Ann}_{A^\circ}(\beta)$ が成り立つ．以上で $\mathfrak{m}_K A^\circ \subset IA^\circ$ が分かった．$\mathfrak{m}_K^2 = \mathfrak{m}_K$ より，任意の整数 $n \geq 1$ に対し $\mathfrak{m}_K A^\circ \subset I^n A^\circ$ が成り立つ．特に $pA^\circ \subset I^n A^\circ$ であるから，$R \to I^\circ$ の忠実平坦性より $pR \subset I^n$ が成り立つ．したがって $0 \neq pR \subset \bigcap_{n \geq 1} I^n$ となるので，Krull の交叉定理から $I = R$ すなわち $\alpha = 0$ が従う． ■

直和因子予想を一般の場合に証明するためには，$R[1/p] \hookrightarrow S[1/p]$ がエタールであるという仮定を外す必要がある．これは以下のようにして行われる：

- $g \in R$ を $R[1/pg] \hookrightarrow S[1/pg]$ がエタールになるようにとり，パーフェクトイド K 代数 A 上 almost 忠実平坦なパーフェクトイド K 代数 A' および g の p 冪根の系 $(g^{p^{-m}} \in A')_{m \geq 0}$ を構成する．[Bha16, §2].
- A' の有理局所化 $A'_n = A'\langle \frac{p^n}{g} \rangle$（これは $\mathrm{Spa}(A', A'^\circ)$ における $g = 0$ の管状近傍の補集合に対応する）を考え，A' と $\varprojlim_n A'_n$ に「それほど差がない」こと（Hebbarkeitssatz：除去可能特異点定理のパーフェクトイド類似）を示す．[Sch15, Proposition 2.3.2], [Bha16, §4].
- 各 A'_n に定理 5.1 の証明と同様の議論を適用する．

参考文献

[Bha14] B. Bhatt, *Almost direct summands*, Nagoya Math. J. **214** (2014), 195–204.

[Bha16] B. Bhatt, *On the direct summand conjecture and its derived variant*, arXiv:1608.08882, 2016.

[Elk73] R. Elkik, *Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **6** (1973), 553–603 (1974).

[GR03] O. Gabber and L. Ramero, *Almost ring theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1800, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[Sch15] P. Scholze, *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*, Ann. of Math. (2) **182** (2015), no. 3, 945–1066.