エタールコホモロジーとℓ進表現

三枝 洋一（九州大学大学院数理学研究院）

目 次

0　はじめに

本稿は，第 17 回整数論サマースクール「ℓ 進ガロア表現とガロア変形の整数論」における講演「エタールコホモロジーと ℓ 進表現」の内容をまとめたものである．エタールコホモロジーとは，一般の体上の代数多様体に対して機能するコホモロジー理論であり，もともと Grothendieck によって Weil 予想の解決を目的として発明されたものである．その理論は，Grothendieck および彼の弟子たちによっていわゆる SGA (Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie) において徹底的に展開された後，[Del2], [Del3] において元来の目標を達成するに至った（Grothendieck の描いていた方針とは異なっていたようであるが）．それとともに，Weil 予想から Ramanujan 予想を導いた Deligne の仕事 [Del1] を一つの契機として，エタールコホモロジーは整数論にとっても重要な位置を占め始めた．Deligne は，モジュラー曲線上の普遍楕円曲線のファイバー積から作られる高次元代数多様体（久賀・佐藤多様体）のエタールコホモロジーを用いて，（重さの大きい）楕円モジュラー形式から 2 次元 ℓ 進表現を構成した．そして，代数多様体から作られる ℓ 進表現が Weil 予想より来る性質を満たすことから，楕円モジュラー形式の q 展開の係数の絶対値の評価を導いたのである．（もちろん，Eichler や志村五郎氏らによる先駆的な研究がこの仕事の土台となっていることは言うまでもない．）この Deligne の仕事は，大域的 Langlands 予想における「Galois 表現の構成問題」の特別な場合に位置付けることができる．（GL_n の）大域的 Langlands 予想とは，代数体 F に対し，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の保型表現（のうち特別なもの）と $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ の n 次元 ℓ 進表現（のうち特別なもの）の間に自然な一対一対応が存在するという予想であり，そのうち，保型表現 Π から始めてそれに対応する ℓ 進 Galois 表現 $\rho(\Pi)$ を構成する問題が「Galois 表現の構成問題」である．この問題は今日でも完全に解決されてはいないが，できている場合も比較的多く，それが Sato-Tate 予想の完全解決をはじめとする最近の整数論の発展の基礎となっている．Galois 表現の構成についての詳細は吉田輝義氏の記事を参照していただくことにして，ここでは，現在知られている Galois 表現の構成のほとんど全てがエタールコホモロジーによるものだということを強調しておきたい．保型表現の合同関係を用いる方法（例えば [DS]）も有名であるが，これは別の場合（[DS] では重さが大きい場合）に対応する Galois 表現が既に構成されていることを用いるので，結局エタールコホモロジーが必要となる．近年では Galois 表現の代数的取り扱いに関する研究の進歩が目覚ましく，ついそちらに目が行きがちになるが，そのような理論とともにエタールコホモロジー論をはじめとする数論幾何学が Galois 表現の研究を支えていることをこの記事を通じ改めて喚起できればと思っている．また，エタールコホモロジーの応用範囲は整数論や代数幾何にはとどまらないことにも言及しておくべきであろう．例えば，有限 Chevalley 群の既約表現の構成（Deligne-Lusztig 理論）や Kazhdan-Lusztig 予想など，表現論においても重要な役割を担っていることは有名である．

さて，本稿を執筆するにあたって，筆者は二つのことを目標とした．まず一つ目は，エタールコホモロジーの理論そのものの概説である．エタールコホモロジーについてはSGA ([SGA4], [SGA5], [SGA7], [SGA4$\frac{1}{2}$]) というこの上ない基本文献があるうえ，そのダイジェスト版としても [SGA4$\frac{1}{2}$, Arcata] という極めて優れた文献がある（エタールコホモロジーの理論の基礎が，証明付きでたった70ページ程度で紹介されている！）．そのため本稿の前半部では，エタールコホモロジーの導入部分や各基本定理の間の相互関係などを強調することで，これらの文献へと円滑に入門できることを目標とした．二つ目は，エタールコホモロジーを用いて如何にしてGalois 表現を構成するか，また，如何にして構成したGalois 表現を調べるかをできるだけ一般的な立場から紹介することである．Galois 表現の理論へのエタールコホモロジーの応用が盛んになったのはSGA 以後であることもあり，エタールコホモロジーを用いてGalois 表現を調べる技術をまとめた文献はほとんどないようである．そのため本稿の後半部では，このような内容についてなるべく詳しく解説することにした．理解の助けになると思われる具体例や練習もいくつか入れてある．後半部を読むにはある程度コホモロジー論に対する慣れが必要かもしれない．本稿で初めてエタールコホモロジーに触れる読者の方は，3.3 節まで読めば十分だと思われる．逆に，SGA の内容を把握している読者の方は，第1節は飛ばしても支障はないはずである．

なお，コンパクト台コホモロジーや係数理論と6つの関手についてなど，本稿で一切触れることができなかった重要な概念もいくつかある．これらについては適宜文献を参照していただきたい．SGA, [Del3], [BBD] といった定番の他，[KW] もなかなかよい本だと思う．

この記事が少しでも読者の方々のエタールコホモロジーに対する理解の助けとなれば幸いである．

記号・用語

- 本稿では，一般の体を k で表し，代数体を F で，（主に非アルキメデス）局所体を K で表す．F, K の整数環をそれぞれ O_F, O_K と書く．
- 体 k に対し，その分離閉包を $\overline{k}$ で表し，絶対Galois群 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ を G_k と書く．
- G_k の **ℓ 進表現**とは，有限次元 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ベクトル空間（あるいは $\mathbb{Q}_\ell$ ベクトル空間）V への連続表現 $\rho\colon G_k \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ のことをいう（V には ℓ 進位相を考える）．
- G_k の**整 ℓ 進表現**とは，有限生成 $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ 加群（あるいは $\mathbb{Z}_\ell$ 加群）Λ への連続表現 $\rho\colon G_k \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Lambda)$ のことをいう（$\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ は $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ における $\mathbb{Z}_\ell$ の整閉包）．
- 副有限群 G の集合 X への作用が**スムーズ**であるとは，任意の $x \in X$ に対し $\mathrm{Stab}_G(x) := \{g \in G \mid gx = x\}$ が G の開部分群であることをいう．G のスムーズ表現も同様に定義できる．
- $\mathrm{Spec}\, A$ 上のスキーム X および A 代数 B に対し，底変換 $X \times_{\mathrm{Spec}\, A} \mathrm{Spec}\, B$ を $X \otimes_A B$ あるいは X_B と書く．

1　エタールコホモロジー入門

1.1　楕円曲線の Tate 加群

エタールコホモロジーとはどのようなものかを説明するために，まず楕円曲線の Tate 加群について簡単に復習しておこう．以下，k を体とする．

定義 1.1
E を k 上の楕円曲線とする．整数 $n \geq 1$ に対し $E[n] = \{x \in E(\overline{k}) \mid nx = 0\}$ とおく．素数 ℓ に対し

$$T_\ell E = \varprojlim_n E[\ell^n], \qquad V_\ell E = T_\ell E \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

と定める．$T_\ell E$ を E の $\boldsymbol{\ell}$ **進 Tate 加群**と呼び，$V_\ell E$ を E の $\boldsymbol{\ell}$ **進有理 Tate 加群**と呼ぶ．

ℓ が k の標数と異なるときには，$T_\ell E$ は階数 2 の自由 $\mathbb{Z}_\ell$ 加群となることが知られている（例えば [Sil] を参照）．したがって $V_\ell E$ は 2 次元 $\mathbb{Q}_\ell$ ベクトル空間となる．これに対し，ℓ が k の標数と等しいときには $T_\ell E$, $V_\ell E$ はもっと小さくなる．以下では ℓ は k の標数と異なると仮定することにする．

$T_\ell E$, $V_\ell E$ には Galois 群 G_k が自然に作用する．明らかにこれらの作用は連続であるから，G_k の 2 次元 ℓ 進表現 $G_k \xrightarrow{\rho} \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell E)$（および整 ℓ 進表現 $G_k \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell E)$）が定まる．以下で説明するように，この ℓ 進表現は E の幾何学的性質を強く反映したものとなっている．

例 1.2
ρ は E の対称性を反映する．例えば E が虚数乗法を持つ, すなわち $L = (\mathrm{End}_{\overline{k}}\, E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が $\mathbb{Q}$ の虚二次拡大になる場合を考えよう．k が標数 0 の体の場合は $(\mathrm{End}_{\overline{k}}\, E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}$ またはその虚二次拡大になるので，これは E が「より多くの対称性を持つ」場合にあたる．L は自然に $V_\ell E$ に作用するので環準同型 $\iota\colon L \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell} V_\ell E$ が定まり，L の作用が G_k の作用と交換することから $\rho\colon G_k \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell E)$ の像は $\mathrm{Im}\,\iota$ の中心化群 $\{g \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell E) \mid g\iota(a)g^{-1} = \iota(a)\ (\forall a \in L)\}$ に含まれることが分かる．この群は $(L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell)^\times$ と同型であり，$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell E)$ 全体と比べると小さい群である．つまり，E の対称性を反映して $\mathrm{Im}\,\rho$ の像が小さくなっていると解釈できる．この議論の本質は $E \longmapsto V_\ell E$ が k 上の楕円曲線の圏から G_k の ℓ 進表現の圏への関手であるということである．

なお，k が代数体のときは，逆に E が虚数乗法を持たないならば $\mathrm{Im}\,\rho$ が大きくなる（$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell E)$ の開部分群になり，したがって Zariski 稠密である）ことも知られている ([Ser1])．こちらは上記に比べてはるかに深い定理である．

練習 1.3

k を標数 $p>0$ の体とし，E を k 上の超特異楕円曲線（$E[p]=0$ となる楕円曲線）とする．このとき，$D=(\mathrm{End}_{\overline{k}}\,E)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}$ 上の四元数体となることが知られている．$V_\ell E$ を考えることで，D が分岐する素点は無限素点と p のみであることを証明せよ．また，$\mathrm{Im}\,\rho\subset\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell E)$ についてはどのようなことがいえるだろうか？

例 1.4

$k=K$ を局所体とするとき，次の定理の通り ρ は E の還元の様子を反映する：

定理 1.5

i) E が良い還元を持つならば ρ は不分岐表現である．

ii) E が良い還元または乗法的還元を持つならば ρ は惰性群 I_K 上冪単表現である．すなわち，任意の $\sigma\in I_K$ に対し $\rho(\sigma)-1$ は冪零となる．

この定理は逆も成立することが知られているが，それは楕円曲線（あるいはアーベル多様体）に特有の現象であるのでここではあえて強調しない．

Tate 加群についてもう一つ強調しておきたいのは，それが位相幾何学における 1 次ホモロジー群の類似だということである．複素数体 $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線 E は複素トーラスに他ならず，$\mathbb{C}$ の $\mathbb{Z}$ 格子 Λ を用いて $E(\mathbb{C})=\mathbb{C}/\Lambda$ と表すことができるという事実はよく知られている ([Sil])．このとき次のような自然な同型がある：

$$H_1\big(E(\mathbb{C}),\mathbb{Z}\big)\cong\Lambda,\qquad T_\ell E\cong\varprojlim_n\Lambda/\ell^n\Lambda\cong\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_\ell,$$
$$H_1\big(E(\mathbb{C}),\mathbb{Q}\big)\cong\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q},\qquad V_\ell E\cong\Lambda\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell.$$

これらから，$T_\ell E$ や $V_\ell E$ は $E(\mathbb{C})$ の 1 次ホモロジーの「ℓ 進化」にあたることが読みとれるだろう．

本稿で紹介するエタールコホモロジーは，大雑把に言えば，上で紹介した特徴を踏まえて $V_\ell E$ をより一般の代数多様体に拡張したものである．より具体的には，各整数 $i\geq 0$ に対して反変関手

$$(k\text{ 上の代数多様体の圏})\longrightarrow(G_k\text{ の }\ell\text{ 進表現の圏});\quad X\longmapsto H^i(X_{\overline{k}},\mathbb{Q}_\ell)$$

（**i 次 ℓ 進エタールコホモロジー**）で次のような特徴を持つものを構成する：

- $k=\mathbb{C}$ のときは $H^i(X_{\overline{k}},\mathbb{Q}_\ell)$ は $X(\mathbb{C})$ の Betti コホモロジー（特異コホモロジー）$H^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ の「ℓ 進化」$H^i(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_\ell$ と同型である．k が $\mathbb{C}$ でない場合にも，$H^i(X_{\overline{k}},\mathbb{Q}_\ell)$ は Betti コホモロジーと類似した性質を持つ．
- k が代数体あるいは局所体の場合，得られた Galois 表現 $H^i(X_{\overline{k}},\mathbb{Q}_\ell)$ と X の還元の間に深い関係がある．

H^i を構成するアイデアは次小節以降に回すことにして，ここでは k 上の楕円曲線 E の ℓ 進エタールコホモロジーが次のようになることのみ述べておく．

$$H^0(E_{\overline{k}},\mathbb{Q}_\ell)=\mathbb{Q}_\ell,\quad H^1(E_{\overline{k}},\mathbb{Q}_\ell)=(V_\ell E)^\vee,\quad H^2(E_{\overline{k}},\mathbb{Q}_\ell)=\mathbb{Q}_\ell(-1),$$
$$H^i(E_{\overline{k}},\mathbb{Q}_\ell)=0\ (i\geq 3).$$

k が複素数体 $\mathbb{C}$ とは限らない一般の体（正標数であってもよい！）の場合にも，各次数のコホモロジーの次元が $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線の Betti 数と一致していることに注目していただきたい[注 1]．

1.2 層係数コホモロジー再考

エタールコホモロジーを定義するための大まかなアイデアは，位相空間に対するコホモロジーの**層**による定義をスキームに適合するよう変形するというものである．本小節では，このアイデアをより詳しく理解するために位相空間の層係数コホモロジーについて再検討することにする[注 2]．

X を位相空間とし，X 上の層の圏を $\mathbf{Shv}_X$ と書く[注 3]．X の層係数コホモロジーは，大域断面関手 $\Gamma(X,-)\colon \mathbf{Shv}_X \longrightarrow \mathbf{Ab}$（$\mathbf{Ab}$ はアーベル群の圏を表す）の右導来関手として定義されるのであった．すなわち，X 上の層 $\mathcal{F}$ の単射的分解 $0\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{I}^0\longrightarrow\mathcal{I}^1\longrightarrow\cdots$ をとり，それから複体 $0\longrightarrow\Gamma(X,\mathcal{I}^0)\longrightarrow\Gamma(X,\mathcal{I}^1)\longrightarrow\cdots$ をつくり，その i 次コホモロジーをとることで X の $\mathcal{F}$ 係数 i 次コホモロジー $H^i(X,\mathcal{F})$ が定義される（これは単射的分解のとり方によらない）．特に $\mathcal{F}$ として定数層 $\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Q}$ をとると，アーベル群 $H^i(X,\mathbb{Z})$ あるいは $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $H^i(X,\mathbb{Q})$ が得られ，X に対する適切な条件の下でこれらは位相幾何における特異コホモロジーと同型になる（例えば X が位相多様体ならよい）．こうして位相空間に対し定義されたコホモロジー（特に $H^i(X,\mathbb{Z})$ や $H^i(X,\mathbb{Q})$）は **Betti コホモロジー**と呼ばれている．前小節でも述べた我々の目標は，一般の体上の代数多様体，あるいはより広く，一般のスキームに対してこの Betti コホモロジーの類似を定義することである．

最も自然に思いつく方針は，スキームの Zariski 位相に関して同様に定数層係数コホモロジーをとるというものだと思う．しかし，これは全くうまくいかない．例えば，X を既約なスキームとすると，X の任意の空でない開集合は連結であるから，X 上の定数層 $\mathbb{Z}$ は軟弱層となり，その 1 次以上のコホモロジーは消えてしまう．また，k を無限体とすると $\mathbb{A}^1_k$ と $\mathbb{P}^1_k$ の底空間は同相なので，もしスキームの底空間のみからコホモロジーが決まるならばこれらのコホモロジーは同型となるはず

[注 1] 代数幾何でよく現れる構造層係数コホモロジー $H^i(E,\mathcal{O}_E)$ は 0 次と 1 次が 1 次元，2 次以上が 0 となるのでこの条件を満たさない．同じ「コホモロジー」の名を冠してはいるが，別種のものと考えた方がよいだろう．

[注 2] ここでは，位相空間上の層やそのコホモロジーに関する知識をある程度仮定して話を進める．詳しく知りたい方は [KS] や [Ive] を参照していただきたい．

[注 3] 以下では，断りがなければ常に層としてはアーベル群の層を考える．

であるが，一方 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ と $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ の Betti コホモロジーは明らかに異なっている．スキームの Zariski 位相だけを見ていたのでは不十分であるということである．

そのためもっと非自明なアイデアが必要なのであるが，それを説明する前に層を圏論的な言葉で解釈しておこう．位相空間 X に対し，圏 $\mathbf{Open}_X$ を次のような圏とする：

- 対象は X の開集合．
- V, U を X の開集合とするとき，V から U への射は包含写像 $V \hookrightarrow U$．（V が U に含まれるなら射は唯一，そうでないなら射はない．）

このとき，X 上の前層は $\mathbf{Open}_X$ から $\mathbf{Ab}$ への反変関手に他ならず，前層の間の射とは反変関手間の射に他ならない．前層が層になるための条件について考えよう．U を $\mathbf{Open}_X$ の対象とし，$(U_i \longrightarrow U)_{i\in I}$ を $\mathbf{Open}_X$ における射の族（つまり U_i は U に含まれる開集合）で $(U_i)_{i\in I}$ が U の開被覆になっているものとする．このとき，この開被覆に関する層の条件は次の完全系列で表すことができる：

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{(*)} \prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j).$$

ここで $(*)$ は $(x_i)_{i\in I} \longmapsto (x_i|_{U_i\cap U_j} - x_j|_{U_i\cap U_j})_{i,j\in I}$ で与えられる準同型である．$U_i \cap U_j$ は圏 $\mathbf{Open}_X$ 内でのファイバー積 $U_i \times_U U_j$ と解釈できることに注意すると，「$(U_i)_{i\in I}$ が U の被覆になっている」という一点を除けば，層の条件は純粋に圏論的な言葉で書くことができることが分かる．したがって，圏 $\mathbf{Open}_X$ 以外にも，「射の族 $(U_i \longrightarrow U)_{i\in I}$ が被覆である」という条件が与えられているような圏に対してはその上の層という概念が定義できることになる．

例えば，次のような圏 $\mathbf{LIsom}_X$ を考えよう．

定義 1.6

連続写像 $f\colon Y \longrightarrow X$ が**局所同相**であるとは，任意の $y \in Y$ に対し y の開近傍 V, $f(y) \in X$ の開近傍 U が存在して，f が V から U への同相写像を誘導することをいう．

圏 $\mathbf{LIsom}_X$ を次のように定める：

- 対象は局所同相な連続写像 $f\colon Y \longrightarrow X$（誤解のないときには単に Y とも表す）．
- $f\colon Y \longrightarrow X$ から $f'\colon Y' \longrightarrow X$ への射は, 連続写像 $g\colon Y \longrightarrow Y'$ で $f' \circ g = f$ を満たすもの．

$\mathbf{LIsom}_X$ における射の族 $(g_i\colon Y_i \longrightarrow Y)_{i\in I}$（$Y$, Y_i は $\mathbf{LIsom}_X$ の対象）が**被覆**であるとは，$Y = \bigcup_{i\in I} g(Y_i)$ となることをいう．

このように，圏に被覆の概念を定めたものを**サイト** (site) と呼ぶ[注4]．サイト

[注4]正確には，これは圏に対する**前位相** (pretopology) と呼ばれる概念であり，サイトの定義とは少

$\mathbf{LIsom}_X$ に対して，その上の層の概念を定義することができる：

定義 1.7

$\mathbf{LIsom}_X$ 上の**層**とは，反変関手 $\mathcal{F}\colon \mathbf{LIsom}_X \longrightarrow \mathbf{Ab}$ で次を満たすもののことである：$\mathbf{LIsom}_X$ における任意の被覆 $(Y_i \longrightarrow Y)_{i\in I}$ に対し，

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(Y) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{F}(Y_i) \xrightarrow{(*)} \prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(Y_i \times_Y Y_j)$$

は完全系列である．ここで，$\mathrm{pr}_1\colon Y_i \times_Y Y_j \longrightarrow Y_i$ から誘導される準同型を $p_{i,j}\colon \mathcal{F}(Y_i) \longrightarrow \mathcal{F}(Y_i \times_Y Y_j)$ と書き，$\mathrm{pr}_2\colon Y_i \times_Y Y_j \longrightarrow Y_j$ から誘導される準同型を $q_{i,j}\colon \mathcal{F}(Y_j) \longrightarrow \mathcal{F}(Y_i \times_Y Y_j)$ と書くと，$(*)$ は $(x_i)_{i\in I} \longmapsto (p_{i,j}(x_i) - q_{i,j}(x_j))_{i,j\in I}$ で与えられる．$Y_i \times_Y Y_j$ も $\mathbf{LIsom}_X$ の対象であることに注意．

$\mathbf{LIsom}_X$ 上の層 $\mathcal{F}$ および $\mathbf{LIsom}_X$ の対象 Y に対し，$\mathcal{F}(Y)$ のことを $\Gamma(Y, \mathcal{F})$ とも書く．また，$\mathbf{LIsom}_X$ 上の層の圏を $\mathbf{Shv}_X^{\mathrm{LIsom}}$ と書く．

実は，次の命題で示すように，$\mathbf{Shv}_X$ と $\mathbf{Shv}_X^{\mathrm{LIsom}}$ は圏同値となる：

命題 1.8

X 上の層 $\mathcal{F}$ に対して，$\mathbf{LIsom}_X$ 上の層 $\varepsilon^*\mathcal{F}$ が，$\Gamma(Y \xrightarrow{f} X, \varepsilon^*\mathcal{F}) = \Gamma(Y, f^*\mathcal{F})$ によって定義できる．また，$\mathbf{LIsom}_X$ 上の層 $\mathcal{G}$ に対して，X 上の層 $\varepsilon_*\mathcal{G}$ が $\Gamma(U, \varepsilon_*\mathcal{G}) = \Gamma(U \hookrightarrow X, \mathcal{G})$ によって定義できる．

このとき，ε^* と ε_* は $\mathbf{Shv}_X$ と $\mathbf{Shv}_X^{\mathrm{LIsom}}$ の間の圏同値を与える．

証明　まず X 上の層 $\mathcal{F}$ に対し $\varepsilon^*\mathcal{F}$ が $\mathbf{LIsom}_X$ 上の層になることを示す．$\mathbf{LIsom}_X$ における被覆 $(Y_i \xrightarrow{g_i} Y)_{i\in I}$ をとり，$x_i \in \Gamma(Y_i, \varepsilon^*\mathcal{F}) = \Gamma(Y_i, g_i^*(\mathcal{F}|_Y))$ $(i \in I)$ を $p_{i,j}(x_i) = q_{i,j}(x_j)$ となる元の族とする（$Y \longrightarrow X$ による $\mathcal{F}$ の逆像を $\mathcal{F}|_Y$ と表している）．g_i は局所同相写像となるから，Y_i の開被覆 $(U_{i\lambda})_{\lambda\in\Lambda_i}$ をうまくとると，合成 $g_{i\lambda}\colon U_{i\lambda} \hookrightarrow Y_i \xrightarrow{g_i} Y$ が開埋め込みとなるようにできる．$x_{i\lambda} = x_i|_{U_{i\lambda}}$ とおき，同型 $\Gamma(g_{i\lambda}(U_{i\lambda}), \mathcal{F}|_Y) \cong \Gamma(U_{i\lambda}, g_{i\lambda}^*(\mathcal{F}|_Y))$ で $x_{i\lambda}$ に対応する $\Gamma(g_{i\lambda}(U_{i\lambda}), \mathcal{F}|_Y)$ の元を $y_{i\lambda}$ とおく．このとき，任意の $i, j \in I$ および $\lambda \in \Lambda_i$, $\lambda' \in \Lambda_j$ に対し，$y_{i\lambda}$ と $y_{j\lambda'}$ は $g_{i\lambda}(U_{i\lambda}) \cap g_{j\lambda'}(U_{j\lambda'})$ 上で一致することが容易に分かる．したがって，$y \in \Gamma(Y, \mathcal{F}|_Y)$ であって $\Gamma(Y, \mathcal{F}|_Y) \longrightarrow \Gamma(U_{i\lambda}, g_{i\lambda}^*(\mathcal{F}|_Y))$ による像が $x_{i\lambda}$ となるようなものが一意的に存在する．さらに $(U_{i\lambda})_{\lambda\in\Lambda_i}$ が Y_i の開被覆であることから，y の $\Gamma(Y, \mathcal{F}|_Y) \longrightarrow \Gamma(Y_i, g_i^*(\mathcal{F}|_Y))$ による像は x_i となることが従う．このような y は一意であることも容易に分かるので，$\varepsilon^*\mathcal{F}$ が層になることが示された．また，$\mathbf{LIsom}_X$

し異なる．圏に前位相を定めることはちょうど位相空間の開基を定めることにあたる．異なる開基が同じ位相を定めることがあるように，異なる前位相が同じサイトを生むこともある．詳細は [SGA4] を参照していただきたい．

上の層 $\mathcal{G}$ に対して $\varepsilon_*\mathcal{G}$ が X 上の層になることは明らかである．

ε^* と ε_* が準逆であることを示す．X 上の層 $\mathcal{F}$ に対して $\varepsilon_*\varepsilon^*\mathcal{F}=\mathcal{F}$ となることは明らかである．$\mathbf{LIsom}_X$ 上の層 $\mathcal{G}$ に対して $\varepsilon^*\varepsilon_*\mathcal{G}\cong\mathcal{G}$ となることを証明しよう．まず射 $\varepsilon^*\varepsilon_*\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}$ を構成する．$f\colon Y\longrightarrow X$ を局所同相写像とすると，Y の開集合 V に対し $\Gamma(V\xrightarrow{f}X,\mathcal{G})$ を対応させることで Y 上の層が得られる．これを $\mathcal{G}_Y$ とおく．すると，X の開集合 U に対し

$$\Gamma(U,\varepsilon_*\mathcal{G})=\Gamma(U\hookrightarrow X,\mathcal{G})\longrightarrow\Gamma\bigl(f^{-1}(U)\xrightarrow{f}X,\mathcal{G}\bigr)=\Gamma(U,f_*\mathcal{G}_Y)$$

という準同型が得られるので，X 上の層の射 $\varepsilon_*\mathcal{G}\longrightarrow f_*\mathcal{G}_Y$ が得られ，随伴性より Y 上の層の射 $f^*\varepsilon_*\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}_Y$ が得られる．これの $\Gamma(Y,-)$ をとることで，準同型 $\Gamma(Y\xrightarrow{f}X,\varepsilon^*\varepsilon_*\mathcal{G})=\Gamma(Y,f^*\varepsilon_*\mathcal{G})\longrightarrow\Gamma(Y,\mathcal{G}_Y)=\Gamma(Y\xrightarrow{f}X,\mathcal{G})$ が得られ，それによって $\mathbf{LIsom}_X$ 上の層の射 $\varepsilon^*\varepsilon_*\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{G}$ が引き起こされる．

あとはこの射が同型であることを示せばよいが，そのためには $\mathbf{LIsom}_X$ の各対象 Y に対して $\Gamma(Y,-)$ をとったものが同型になることを示せばよい．さらに Y の開被覆をとることで $Y\longrightarrow X$ が開埋め込みの場合に示せばよいことになるが，この場合は構成より明らかである． ∎

この命題から，$\mathbf{Shv}_X^{\mathrm{LIsom}}$ も十分単射的対象を持つアーベル圏であることが分かる．さらに，$\Gamma(X,-)\colon\mathbf{Shv}_X^{\mathrm{LIsom}}\longrightarrow\mathbf{Ab}$ の右導来関手を考えると通常の層係数コホモロジーと一致することも分かる．つまり，$\mathbf{Open}_X$ を考える代わりに $\mathbf{LIsom}_X$ を考えても，全く同様の理論ができるということである．

エタールコホモロジーの基本的なアイデアは，エタール射（後で復習する）が局所同相写像のスキーム類似であることに注目し，サイト $\mathbf{LIsom}_X$ の定義において局所同相写像を全てエタール射に置き換えたサイトを考え，その上で層係数コホモロジーの理論を展開するというものである．

1.3　エタールコホモロジーの定義

1.3.1　エタール射・エタール層・エタールコホモロジー

スキーム論における局所同相写像の類似物が，次に定義するエタール射である．

定義 1.9

$f\colon Y\longrightarrow X$ をスキーム間の局所有限表示な射とする．

i) 任意の $y\in Y$ に対し次が成り立つとき，f は**不分岐** (unramified/neat) であるという（$\mathfrak{m}_{Y,y}$, $\mathfrak{m}_{X,f(y)}$ はそれぞれ $\mathcal{O}_{Y,y}$, $\mathcal{O}_{X,f(y)}$ の極大イデアル）：
- $\mathfrak{m}_{Y,y}=\mathfrak{m}_{X,f(y)}\mathcal{O}_{Y,y}$.
- $\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_{Y,y}$ は $\mathcal{O}_{X,f(y)}/\mathfrak{m}_{X,f(y)}$ の有限次分離拡大.

なお，これは相対微分加群 $\Omega^1_{Y/X}$ が 0 であることと同値である．

ii) f が不分岐かつ平坦であるとき，**エタール** (étale) であるという．

注意 1.10

スキーム間の射 $f\colon Y \longrightarrow X$ がエタールであることは次と同値である：

任意の $y \in Y$ に対し，$f(y)$ のアフィン開近傍 $U = \operatorname{Spec} A$ および $f^{-1}(U)$ に含まれる y のアフィン開近傍 $V = \operatorname{Spec} B$ で，f によって誘導される B の A 代数の構造が以下のような形をしているものが存在する：

$$B \cong A[T_1, \ldots, T_n]/(f_1, \ldots, f_n),$$

$$\det\Bigl(\frac{\partial f_i}{\partial T_j}\Bigr)_{i,j} \text{の } A[T_1, \ldots, T_n]/(f_1, \ldots, f_n) \text{ における像は可逆.}$$

この事実と多様体論における陰関数定理を見比べることで，エタール射が局所同相写像の類似であることが理解できるだろう．

例 1.11

A を環とし，n を A において可逆な正整数とする．このとき，$a \in A^\times$ に対し，$\operatorname{Spec} A[T]/(T^n - a) \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ はエタールである．実際，$T^n - a$ を T で微分すると nT^{n-1} であり，これの $A[T]/(T^n - a)$ における像は $(na)^{-1}T$ 倍すると 1 になるので可逆である．（直接不分岐性と平坦性を確かめることもできる．）

例 1.12

k を体とする．このとき，k 上エタールなスキーム X は $\operatorname{Spec} k'$（k' は k の有限次分離拡大）という形のスキームの直和である．実際，X がアフィンスキーム $\operatorname{Spec} A$ の場合に確かめればよいが，このとき不分岐性の条件から A の任意の素イデアルにおける局所化は k の有限次分離拡大であることが分かるので，特に A は Artin 環であり，$A \cong \prod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} A_{\mathfrak{p}}$ は k の有限次分離拡大の直積となる．

逆にこのようなスキームは k 上エタールである．

エタール射の基本的な性質をまとめておく．証明は [EGA4] 等を参照されたい．

命題 1.13（エタール射の性質）

i) 開埋め込みはエタールである．

ii) エタール射の合成はエタールである．

iii) エタール射の底変換はエタールである．すなわち，$f\colon Y \longrightarrow X$ をエタール射とし，X' を X 上のスキームとするとき，$X' \longrightarrow X$ での f の底変換 $f'\colon Y \times_X X' \longrightarrow X'$ もエタールである．

iv) $f\colon Y \longrightarrow X$, $g\colon Z \longrightarrow Y$ をスキームの射とする．$f \circ g$ がエタールであり，f が不分岐ならば g はエタール射である．

v) エタール射は開写像である（これはより一般に平坦射に対して成立する）．

定義 1.6 において局所同相写像をエタール射で置き換えることで，サイト $\mathbf{LIsom}_X$ のスキーム類似を考えることができる：

定義 1.14

スキーム X に対し, X 上エタールなスキームの圏を $\mathbf{Et}_X$ と書く．すなわち, $\mathbf{Et}_X$ の対象はエタール射 $Y \longrightarrow X$ であり，対象 $f\colon Y \longrightarrow X$ から対象 $f'\colon Y' \longrightarrow X$ への射はスキームの射 $g\colon Y \longrightarrow Y'$ で $f = f' \circ g$ を満たすものである（命題 1.13 iv) より，このような g は自動的にエタールになる）．以下誤解のないときには, Y のみで $\mathbf{Et}_X$ の対象を表し，X への構造射を明示しないことにする．

$\mathbf{Et}_X$ における射の族 $(g_i\colon Y_i \longrightarrow Y)_{i\in I}$（$Y$, Y_i は $\mathbf{Et}_X$ の対象）が**被覆**であるとは，$Y = \bigcup_{i\in I} g_i(Y_i)$ となることをいう．

こうして得られるサイト $\mathbf{Et}_X$ を X の**エタールサイト** (étale site) という．

エタールサイトに対して層を定義することができる．

定義 1.15

$\mathbf{Et}_X$ 上の層，あるいは X 上の**エタール層**とは，反変関手 $\mathcal{F}\colon \mathbf{Et}_X \longrightarrow \mathbf{Ab}$ で次を満たすもののことである：$\mathbf{Et}_X$ における任意の被覆 $(Y_i \longrightarrow Y)_{i\in I}$ に対し，

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(Y) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{F}(Y_i) \xrightarrow{(*)} \prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(Y_i \times_Y Y_j)$$

は完全系列である．ここで，$\mathrm{pr}_1\colon Y_i \times_Y Y_j \longrightarrow Y_i$ から誘導される準同型を $p_{i,j}\colon \mathcal{F}(Y_i) \longrightarrow \mathcal{F}(Y_i \times_Y Y_j)$ と書き, $\mathrm{pr}_2\colon Y_i \times_Y Y_j \longrightarrow Y_j$ から誘導される準同型を $q_{i,j}\colon \mathcal{F}(Y_j) \longrightarrow \mathcal{F}(Y_i \times_Y Y_j)$ と書くと，$(*)$ は $(x_i)_{i\in I} \longmapsto (p_{i,j}(x_i) - q_{i,j}(x_j))_{i,j\in I}$ で与えられる．命題 1.13 ii), iii) より $Y_i \times_Y Y_j$ も $\mathbf{Et}_X$ の対象であることに注意.

位相空間の場合と同様に，X 上のエタール層 $\mathcal{F}$ および $\mathbf{Et}_X$ の対象 Y に対し，$\mathcal{F}(Y)$ のことを $\Gamma(Y, \mathcal{F})$ とも書く．また，X 上のエタール層の圏を $\mathbf{Shv}_X^{\text{ét}}$ と書く．

例 1.16

k を体とする．$\operatorname{Spec} k$ 上のエタール層 $\mathcal{F}$ にはどのようなものがあるかを考えよう．まず例 1.12 より，$\mathcal{F}$ を与えるには $\overline{k}$ に含まれる k の有限次分離拡大 L に対して $\mathcal{F}_L := \mathcal{F}(\operatorname{Spec} L)$ を与えればよいことが分かる．

ここで L' を（$\overline{k}$ に含まれる）L の Galois 拡大としてみよう．このとき, 射 $\operatorname{Spec} L' \longrightarrow \operatorname{Spec} L$ に伴って準同型 $\mathcal{F}_L \longrightarrow \mathcal{F}_{L'}$ がある．また, 各 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L'/L)$ に対して $\operatorname{Spec} L$ 上の射 $\sigma^*\colon \operatorname{Spec} L' \longrightarrow \operatorname{Spec} L'$ が誘導されるので，これに伴って $\mathrm{Gal}(L'/L)$ が $\mathcal{F}_{L'}$ に作用し，かつ $\mathcal{F}_L \longrightarrow \mathcal{F}_{L'}$ の像は $\mathcal{F}_{L'}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ に含まれる．

一方，$\operatorname{Spec} L' \longrightarrow \operatorname{Spec} L$ は被覆であるから，これに対する $\mathcal{F}$ の層の条件を考えることができる．$L' \otimes_L L' \xrightarrow{\cong} \prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L'/L)} L'$; $a \otimes b \longmapsto (a\sigma(b))_\sigma$ に注意すると，

層の条件は次の完全性に相当する：

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_L \longrightarrow \mathcal{F}_{L'} \xrightarrow{(*)} \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L'/L)} \mathcal{F}_{L'}.$$

ここで $(*)$ は $x \longmapsto (x - \sigma(x))_\sigma$ で与えられる．明らかに，この完全性は $\mathcal{F}_L \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_{L'}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ と同値である．

$M_{\mathcal{F}} = \varinjlim_L \mathcal{F}_L$（$L$ は $\overline{k}$ に含まれる k の有限次 Galois 拡大を動く）とおく．G_k は $\mathrm{Gal}(L/k)$ を経由して $\mathcal{F}_L$ に作用するので，$M_{\mathcal{F}}$ への G_k のスムーズな作用が定まる．さらに，上で示したことから，$\overline{k}$ に含まれる k の任意の有限次分離拡大 L に対し，$M_{\mathcal{F}}^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/L)} \cong \mathcal{F}_L$ が得られる．

逆に，G_k がスムーズに作用するアーベル群 M から出発して，$\overline{k}$ に含まれる k の有限次分離拡大 L に対し $\mathcal{F}_M(\operatorname{Spec} L) = M^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/L)}$ と定めると，これは $\operatorname{Spec} k$ 上のエタール層を与えることも容易に分かる．$\mathcal{F} \longmapsto M_{\mathcal{F}}$ と $M \longmapsto \mathcal{F}_M$ が互いに逆を与えることも明らかであろう．

以上の考察から，$\mathbf{Shv}^{\text{ét}}_{\operatorname{Spec} k}$ は G_k がスムーズに作用するアーベル群の圏と圏同値であることが分かる．特に，k が分離閉体ならば $\mathbf{Shv}^{\text{ét}}_{\operatorname{Spec} k}$ はアーベル群の圏と圏同値であり，$\operatorname{Spec} k$ 上のエタール層 $\mathcal{F}$ に対応するアーベル群は $\Gamma(\operatorname{Spec} k, \mathcal{F})$ で与えられる．

このことから理解できるように，エタール位相の世界において位相空間論での一点空間に対応するのは一般の体のスペクトラムではなく，分離閉体のスペクトラムである．この視点を強調するために，分離閉体のスペクトラムのことを**幾何学的点** (geometric point) と呼ぶことがある（スキーム X およびその点 x について，x の剰余体の分離閉な拡大体をとることを「$x \in X$ の上にある幾何学的点 $\overline{x}$ をとる」などという）．

次の命題は，一般のスキームに対し，その上のエタール層を構成する手段を与えるものである．

命題 1.17

X をスキームとし，Z を X 上のスキームとする．さらに，X 上の任意のスキーム Y に対し，集合 $\mathcal{F}(Y) := \mathrm{Hom}_X(Y, Z)$ が自然にアーベル群の構造を持つと仮定する．（正確には，Y について関手的であることを要求する．このような Z を X 上の**可換群スキーム**という．）このとき，反変関手 $\mathcal{F}\colon \mathbf{Et}_X \longrightarrow \mathbf{Ab}$ は X 上のエタール層である．これを Z によって表現されるエタール層という．

証明　一般の X スキーム Z に対して反変関手 $\mathcal{F}\colon \mathbf{Et}_X \longrightarrow \mathbf{Set}$ を同様に定義し，

$\mathbf{Et}_X$ における任意の被覆 $(Y_i \longrightarrow Y)_{i\in I}$ に対し，自然な同型

$$\mathcal{F}(Y) \cong \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{F}(Y_i) \;\middle|\; p_{i,j}(x_i) = q_{i,j}(x_j)\ (\forall i,j \in I) \right\}$$

があることを示せばよい．容易に X, Y, Y_i がアフィンである場合に帰着でき, さらに Y の準コンパクト性から I が有限集合である場合に帰着できる．さらに $Y' = \coprod_{i\in I} Y_i$（これはアフィンスキームである）とおき，$(Y_i \longrightarrow Y)_{i\in I}$ の代わりに一元からなる被覆 $(Y' \longrightarrow Y)$ を考えればよい．$X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $Y' = \operatorname{Spec} B'$, $Z = \operatorname{Spec} C$ とおくと，証明すべきことは次の同型である（$\mathbf{Alg}_A$ は A 代数の圏）：

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Alg}_A}(C, B) \cong \left\{ \varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{Alg}_A}(C, B') \;\middle|\; \varphi(c)\otimes 1 = 1\otimes\varphi(c) \in B'\otimes_B B'\ (\forall c \in C) \right\}.$$

一方, $Y' \longrightarrow Y$ はエタールな全射なので特に忠実平坦であるから, B' は忠実平坦 B 代数である．このとき, B 加群の準同型 $d\colon B' \xrightarrow{(*)} B'\otimes_B B'$ を $d(b') \longmapsto b'\otimes 1 - 1\otimes b'$ で定めると，$0 \longrightarrow B \longrightarrow B' \xrightarrow{d} B' \otimes_B B'$ は完全系列となる．実際，忠実平坦性より B' をテンソルして完全性を示せばよいので，B, B' をそれぞれ $B', B' \otimes_B B'$ に置き換えてよい．特に，B 代数の準同型 $s\colon B' \longrightarrow B$ が存在する場合に示せば十分である．このとき $B \longrightarrow B'$ は単射であり，また，$b' \in B'$ が $d(b') = 0$ を満たすならば $b' \otimes 1 - 1 \otimes b' = 0$ の両辺を準同型 $s \otimes \mathrm{id}\colon B' \otimes_B B' \longrightarrow B'$ でうつすことで $b' = s(b') \in B$ が得られる．

示すべき同型はこの完全系列より容易に導かれる． ∎

例 1.18

X をスキーム，$n \geq 1$ を整数とする．

i) $\mathbb{G}_a\colon Y \longmapsto \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ は $\mathbb{G}_{a,X} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X[T]$ で表現される X 上のエタール層である．

ii) $\mathbb{G}_m\colon Y \longmapsto \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)^\times$ は $\mathbb{G}_{m,X} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X[T, T^{-1}]$ で表現される X 上のエタール層である．

iii) $\mu_n = \operatorname{Ker}(\mathbb{G}_m \xrightarrow{n\text{ 乗}} \mathbb{G}_m)$ は $\mu_{n,X} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X[T]/(T^n - 1)$ で表現される X 上のエタール層である．μ_n のことを $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)$ とも書く．

iv) 定数可換群スキーム $\coprod_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} X$（$X$ の n 個の直和に $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ から誘導される可換群スキームの構造を入れたもの）で表現される X 上のエタール層を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と書く．

$f\colon X \longrightarrow X'$ をスキームの射とすると，位相空間上の層の場合と同様に，X 上のエタール層 $\mathcal{F}$ に対しその f による**順像** $f_*\mathcal{F}$ が $(f_*\mathcal{F})(Y) = \mathcal{F}(Y \times_{X'} X)$ によって定義される．$f_*\colon \mathbf{Shv}_X^{\text{ét}} \longrightarrow \mathbf{Shv}_{X'}^{\text{ét}}$ は左完全関手であり，完全な左随伴関手 $f^*\colon \mathbf{Shv}_{X'}^{\text{ét}} \longrightarrow \mathbf{Shv}_X^{\text{ét}}$（$f$ による**逆像**）を持つ．特に，スキーム X およびその幾

何学的点 $i\colon \overline{x} \longrightarrow X$ に対し，$\mathcal{F}$ の i に関する逆像 $i^*\mathcal{F}$ に対応するアーベル群（例 1.16）を $\mathcal{F}_{\overline{x}}$ と書き，$\mathcal{F}$ の $\overline{x}$ における**茎** (stalk) と呼ぶ．茎はより具体的に次のようにも記述できる：$\mathcal{F}_{\overline{x}} = \varinjlim \mathcal{F}(U)$．ただし，帰納極限は次の可換図式にわたってとるものとする：

$$\begin{tikzcd} \overline{x} \arrow[r] \arrow[dr, "i"'] & U \arrow[d, "\text{エタール}"] \\ & X. \end{tikzcd}$$

次の命題により，左完全関手 $\Gamma\colon \mathbf{Shv}^{\text{ét}}_X \longrightarrow \mathbf{Ab}$, $f_*\colon \mathbf{Shv}^{\text{ét}}_X \longrightarrow \mathbf{Shv}^{\text{ét}}_{X'}$ の右導来関手がとれることが分かる：

命題 1.19

X をスキームとするとき，$\mathbf{Shv}^{\text{ét}}_X$ はアーベル圏であり，十分単射的対象を持つ．

よって，位相空間のときと同じように，Γ の右導来関手をとることでエタールコホモロジーを定義することができる：

定義 1.20

X をスキームとし，$\mathcal{F}$ を X 上のエタール層とする．$\mathcal{F}$ の単射的分解 $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^0 \longrightarrow \mathcal{I}^1 \longrightarrow \cdots$ から定まる複体 $0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^0) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^1) \longrightarrow \cdots$ を $R\Gamma(X, \mathcal{F})$ と書く．これは $\mathbf{Ab}$ に伴う導来圏において well-defined である（単射的分解のとり方によらない）．さらに，複体 $R\Gamma(X, \mathcal{F})$ の i 次コホモロジー

$$\operatorname{Ker}\bigl(\Gamma(X, \mathcal{I}^i) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^{i+1})\bigr) \big/ \operatorname{Im}\bigl(\Gamma(X, \mathcal{I}^{i-1}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^i)\bigr)$$

を $H^i(X, \mathcal{F})$ と書き，X の **$\mathcal{F}$ 係数 i 次エタールコホモロジー**という．

同様に，$f\colon X \longrightarrow X'$ をスキームの射とするとき，$\mathbf{Shv}^{\text{ét}}_{X'}$ における複体 $0 \longrightarrow f_*\mathcal{I}^0 \longrightarrow f_*\mathcal{I}^1 \longrightarrow \cdots$ を $Rf_*\mathcal{F}$ と書き，その i 次コホモロジーを $R^i f_*\mathcal{F}$ と書く．

例 1.21

X が体のスペクトラム $\operatorname{Spec} k$ である場合にエタールコホモロジーがどうなるかを考えてみよう．$\mathcal{F}$ を $\operatorname{Spec} k$ 上のエタール層とすると，例 1.16 より，これは G_k がスムーズに作用するアーベル群 M と対応する．さらにこのとき，$\Gamma(\operatorname{Spec} k, \mathcal{F}) = M^{G_k}$（$M^{G_k}$ は G_k によって固定される元からなる M の部分アーベル群）が成り立つ．左完全関手 $M \longmapsto M^{G_k}$ の右導来関手は Galois コホモロジー $H^i(G_k, M)$ であるから，$H^i(\operatorname{Spec} k, \mathcal{F}) = H^i(G_k, M)$ が成立する．つまり，エタールコホモロジーは Galois コホモロジーの一般化となっている．

1.3.2　代数曲線のエタールコホモロジー

ここでは代数曲線のエタールコホモロジーの計算を紹介しよう．k を代数閉体とし，X を k 上固有かつ滑らかな連結代数曲線とする．まず，$\mathbb{G}_m$ 係数のエタールコホモロジーは次のようになる：

定理 1.22
$H^i(X, \mathbb{G}_m)$ について次が成り立つ：

$$H^0(X, \mathbb{G}_m) = k^\times, \quad H^1(X, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}(X), \quad H^i(X, \mathbb{G}_m) = 0 \ (i \geq 2).$$

ここで $\mathrm{Pic}(X)$（X の **Picard 群**）とは，X 上の直線束の同型類全体に加法をテンソル積で定めて得られるアーベル群である．

略証　$H^0(X, \mathbb{G}_m) = \Gamma(X, \mathbb{G}_m) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times = k^\times$ はよい．$H^1(X, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Pic}(X)$（これは任意のスキーム X に対して成り立つ性質である）を示す．例えば H^1 の Čech コホモロジーによる計算により，$H^1(X, \mathbb{G}_m)$ の各元が「エタール局所的に自明化される直線束」と対応することが分かる（多様体の場合の証明を参考にせよ）．一方，fpqc 降下により，「エタール局所的に自明化される直線束」は通常の直線束（Zariski 局所的に自明化される）に他ならないことが分かる．これより主張が従う．

$H^i(X, \mathbb{G}_m) = 0 \ (i \geq 2)$ の証明のポイントは，X の有理関数体 $k(X)$ の Galois コホモロジー $H^i(G_{k(X)}, \overline{k(X)}^\times)$ が $i \geq 2$ で消えること（**Tsen の定理**）である．これは $k(X)$ が C_1 体であることの帰結である ([Ser2, II, §3])．Tsen の定理から $H^i(X, \mathbb{G}_m) = 0 \ (i \geq 2)$ はおおむね次のようにして導かれる．まず，X 上エタールかつ連結な任意のスキーム X'（これは自動的に k 上滑らかな連結代数曲線になる）に対し，次のような完全系列があることに注意する：

$$0 \longrightarrow \Gamma(X', \mathbb{G}_m) \longrightarrow k(X')^\times \xrightarrow{\mathrm{ord}} \bigoplus_{x \in |X'|} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

ここで，$|X'|$ は X' の閉点の集合であり，ord は $f \in k(X')$ に対し f の各閉点での極の位数を対応させる準同型である．この完全系列から，次のような X 上のエタール層の完全系列が得られる（下の完全系列の $\Gamma(X', -)$ をとったものが上の完全系列である）：

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow j_* \mathbb{G}_{m,\eta} \longrightarrow \bigoplus_{x \in |X|} i_{x*}\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

ここで，η は X の生成点，j は η から X への自然な射である．また，$x \in |X|$ に対し，x から X への自然な閉埋め込みを i_x と書いている．この完全系列に伴い，コ

ホモロジー長完全系列

$$
\begin{aligned}
&\cdots \longrightarrow \bigoplus_{x\in|X|} H^{i-1}(X, i_{x*}\mathbb{Z}) \\
\longrightarrow H^i(X,\mathbb{G}_m) \longrightarrow H^i(X, j_*\mathbb{G}_{m,\eta}) \longrightarrow &\bigoplus_{x\in|X|} H^i(X, i_{x*}\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots
\end{aligned}
$$

がある[注5].

一方，$H^i(X, j_*\mathbb{G}_{m,\eta}) = H^i(G_{k(X)}, \overline{k(X)}^\times)$ および $H^i(X, i_{x*}\mathbb{Z}) = H^i(G_k,\mathbb{Z}) = 0$ $(i \geq 1)$ が比較的容易に証明できる（練習 1.42 参照）．この計算と Tsen の定理，上の完全系列から $H^i(X,\mathbb{G}_m) = 0$ が直ちに従う． ∎

定理 1.22 より，X の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)$ 係数コホモロジーを計算することができる．

定理 1.23

$n \geq 1$ を k で可逆な整数とするとき，$H^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))$ について次が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
H^0(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) &= \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1), & H^1(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) &= \mathrm{Pic}(X)[n], \\
H^2(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) &= \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, & H^i(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) &= 0 \ (i \geq 3).
\end{aligned}
$$

ここで，第一式右辺の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)$ は k 内の 1 の n 乗根のなすアーベル群である（k は代数閉体なので，非標準的な同型 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ がある）．また，$\mathrm{Pic}(X)[n]$ は $\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{n\text{ 倍}} \mathrm{Pic}(X)$ の核である．

証明　まず，$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1) \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{n\text{ 乗}} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$ が X 上のエタール層の完全系列であることを示す．$\mathbb{G}_m$ から $\mathbb{G}_m$ への全射性のみが問題である．U を $\mathbf{Et}_X$ の対象とし，$a \in \Gamma(U,\mathbb{G}_m) = \Gamma(U,\mathcal{O}_U)^\times$ をとる．層の全射とは，断面が局所的に持ち上がることであったから，U の被覆 $(U_i \longrightarrow U)_{i\in I}$ および $a_i \in \Gamma(U_i,\mathbb{G}_m)$ で $a_i^n = a|_{U_i}$ となるものの存在を示せばよい．$V = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_U[T]/(T^n - a)$ とおくと，$V \longrightarrow U$ はエタールな全射であり（例 1.11），$T \in \Gamma(V,\mathbb{G}_m)$ の n 乗は $\Gamma(U,\mathbb{G}_m) \longrightarrow \Gamma(V,\mathbb{G}_m)$ による a の像と一致する．これで $\mathbb{G}_m \xrightarrow{n\text{ 乗}} \mathbb{G}_m$ の全射性が示された．

上記の完全系列に伴うコホモロジー長完全系列をとり定理 1.22 を用いることで，$H^i(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) = 0$ $(i \geq 3)$ および次の完全系列が得られる：

$$
\begin{aligned}
0 &\longrightarrow H^0(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) \longrightarrow k^\times \xrightarrow{n\text{ 乗}} k^\times \\
&\longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{n\text{ 倍}} \mathrm{Pic}(X) \\
&\longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)) \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

[注5] コホモロジーが直和と交換する部分には少々議論が必要である．

これより，$H^0(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)$, $H^1(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))=\mathrm{Pic}(X)[n]$ が従う．また，$\deg\colon \mathrm{Pic}(X)\xrightarrow{\deg}\mathbb{Z}$ の核を $\mathrm{Pic}^0(X)$ とおくと，$\mathrm{Pic}^0(X)$ は X の Jacobi 多様体（g 次元アーベル多様体）の k 値点として得られるから，$\mathrm{Pic}^0(X)$ における n 倍写像は全射である（Jacobi 多様体やアーベル多様体については [CS]，[Mum] 等を参照）．よって $\deg\colon \mathrm{Pic}(X)\xrightarrow{\deg}\mathbb{Z}$ より誘導される全射 $\mathrm{Pic}(X)/n\,\mathrm{Pic}(X)\longrightarrow\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は単射であることが分かり，$H^2(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1))\cong\mathrm{Pic}(X)/n\,\mathrm{Pic}(X)\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が従う． ∎

k における 1 の原始 n 乗根を固定するたびに X 上の層の同型 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ および $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 加群の同型 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が決まることに注意すると，定理 1.23 から X の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 係数コホモロジーが得られる：

定理 1.24

$n\geq 1$ を k で可逆な整数とするとき，$H^i(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ について次が成り立つ：

$$H^0(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\qquad H^1(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=\mathrm{Pic}(X)[n](-1),$$
$$H^2(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1),\qquad H^i(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=0\ (i\geq 3).$$

ただし, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)=\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1),\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ とおいた．また, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 加群 M に対し $M(-1)=M\otimes_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)$ と書いている．より一般に, 整数 m に対し，$m\geq 0$ ならば $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(m)=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)^{\otimes m}$，$m<0$ ならば $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(m)=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)^{\otimes(-m)}$ とおき，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 加群 M に対し $M(m)=M\otimes_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(m)$ と定める（M の **Tate 捻り** (Tate twist) と呼ぶ）．

特に，$H^0(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, $H^1(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, $H^2(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ はそれぞれ階数 1, $2g$（g は X の種数），1 の自由 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 加群である．

証明　コホモロジーの計算の部分は定理1.23より明らかである．あとは $H^1(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ が階数 $2g$ の自由 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 加群であることを示せばよい．完全系列 $0\longrightarrow\mathrm{Pic}^0(X)\longrightarrow\mathrm{Pic}(X)\xrightarrow{\deg}\mathbb{Z}\longrightarrow 0$ より，$\mathrm{Pic}(X)[n]=\mathrm{Pic}^0(X)[n]$ である．$\mathrm{Pic}^0(X)$ は X の Jacobi 多様体の k 値点の集合であるから，n が k の標数と互いに素であることと合わせて $\mathrm{Pic}^0(X)[n]\cong(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ を得る．これよりよい． ∎

例 1.25

E を k 上の楕円曲線とする．このとき，同型 $E(k)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Pic}^0(X)$; $P\longmapsto[P]-[O]$（$O\in E(k)$ は $E(k)$ の単位元）がある（$\mathrm{Pic}(X)$ と因子類群を同一視している）．したがって，$H^1(E,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=E[n](-1)$ である．また，Weil ペアリング $E[n]\times E[n]\longrightarrow\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)$ により，$E[n](-1)\cong E[n]^\vee$ である．以上より，$H^1(E,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=E[n]^\vee$ を得る．

練習 1.26

上の方法を参考にして，$\mathbb{A}^1_k$ の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 係数コホモロジーを計算せよ．また，より一般に，k 上滑らかな（固有とは限らない）代数曲線のコホモロジーはどうなるか？

注意 1.27

定理 1.24 において n が k で可逆でない場合，$H^i(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ の計算結果は大きく変わる．例えば，k の標数が $p>0$ であり，$n=p$ の場合，$H^2(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})=0$ となる．また，次の練習が示すように，X が k 上固有でない場合には $H^i(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ は有限 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 加群になるとは限らない．これらの理由から，スキーム X の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 係数コホモロジーを考えるには，n が X において可逆であるという条件を課す場合がほとんどである．

練習 1.28

k を標数 $p>0$ の代数閉体とし，X をその上の連結代数曲線とする．

i) X 上のエタール層の完全系列 $0\longrightarrow\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{G}_a\xrightarrow{\wp}\mathbb{G}_a\longrightarrow 0$ があることを示せ．ここで $\wp$ は，$\mathbb{G}_a$ の断面 a を a^p-a にうつす準同型である．

ii) $H^i(X,\mathbb{G}_a)=H^i(X,\mathcal{O}_X)$（後者は Zariski 位相に関するコホモロジー）である．これを用いて，X が k 上固有かつ滑らかである場合に $H^i(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ を計算し，$H^i(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})=0$ $(i\geq 2)$ であることを示せ．またこのとき，$H^0(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, $H^1(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ は有限次元 $\mathbb{F}_p$ ベクトル空間であることを確認せよ．

iii) X が k 上固有でない場合には，$H^i(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ は有限次元 $\mathbb{F}_p$ ベクトル空間とは限らないことを示せ．

注意 1.29

位相空間のコホモロジーとの類似で考えると，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 係数のコホモロジーではなく $\mathbb{Z}$ 係数のコホモロジーを考える方が自然であると思われるかもしれない．しかし，代数閉体 k 上滑らかな連結代数曲線 X に対して $H^1(X,\mathbb{Z})=0$ となるなど，位相空間のコホモロジーとは大きく異なる結果となる．このため，スキームに対してその $\mathbb{Z}$ 係数コホモロジーを考えることはほとんどない．

1.3.3　ℓ 進エタールコホモロジー

これまで説明してきたことから，スキーム X および X で可逆な整数 $n\geq 1$ に対し，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 係数のエタールコホモロジー $H^i(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ はよい性質を持ちそうだと想像できる．しかし我々の求めるものは ℓ 進 Galois 表現であったから，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 加群ではなく $\mathbb{Q}_\ell$ ベクトル空間を出力する方法を考えなくてはならない．もちろん X 上の定数層 $\mathbb{Q}_\ell$ を係数とするエタールコホモロジーも考えることができるが，$\mathbb{Z}$ 係数のコホモロジーと同様にうまくいかないことが分かる．基本的なアイデアは，各整数 $n\geq 1$ に対しコホモロジー $H^i(X,\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$ を考え，それの射影極限をとることで $\mathbb{Z}_\ell$

加群を得て，さらに $\mathbb{Q}_\ell$ をテンソルすることで $\mathbb{Q}_\ell$ ベクトル空間を得るというものである．ただ，この方法で得られた関手が $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 係数エタールコホモロジーと同様の性質を持つ「よいコホモロジー」となるためには，スキーム X にかなり強い制限を付ける必要がある．そのため，ここではもう少し洗練された方法を紹介する．

以下，素数 ℓ を固定する．まず，コホモロジーの係数を用意するところから始めよう．

定義 1.30

スキーム X 上の $\mathbb{Z}_\ell$ **層**とは，X 上のエタール層の射影系 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ で，任意の $n \geq 0$ に対して $\ell^{n+1}\mathcal{F}_n = 0$, $\mathcal{F}_{n+1}/\ell^{n+1}\mathcal{F}_{n+1} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_n$ を満たすもののことである．

例 1.31

i) $(\mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z})_{n\geq 0}$ は $\mathbb{Z}_\ell$ 層である．これを単に $\mathbb{Z}_\ell$ と書く．同様に，$\mathbb{Z}_\ell$ 層 $\mathbb{Z}_\ell(m)$ が定義できる．

ii) ある整数 $n \geq 1$ に対して $\ell^n\mathcal{F} = 0$ となるようなエタール層 $\mathcal{F}$ は自然に $\mathbb{Z}_\ell$ 層とみなすことができる．

iii) X が連結な Noether スキームであるとし, その幾何学的点 $\overline{x}$ を固定すると, 基本群 $\pi_1(X,\overline{x})$（これは副有限群である）を考えることができる．$\rho\colon \pi_1(X,\overline{x}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell}(\Lambda)$ を有限生成 $\mathbb{Z}_\ell$ 加群 Λ への $\pi_1(X,\overline{x})$ の整 ℓ 進表現とする．このとき，有限 $\pi_1(X,\overline{x})$ 加群 $\Lambda/\ell^{n+1}\Lambda$ に対応して X 上の有限エタール可換群スキーム Y_n が定まり，それで表現されるエタール層を $\mathcal{F}_n$ と書くと $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ は $\mathbb{Z}_\ell$ 層となる．これを ρ から定まる $\mathbb{Z}_\ell$ 層という．

一般のスキーム X に対して，その上の $\mathbb{Z}_\ell$ 層 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ は各 $\mathcal{F}_n$ が X 上の有限エタール可換群スキームで表現されるとき**スムーズ** (smooth) であると言われる．連結な Noether スキーム X 上のスムーズ $\mathbb{Z}_\ell$ 層の圏は $\pi_1(X,\overline{x})$ の整 ℓ 進表現の圏と圏同値になる．

定義 1.32

$\mathbb{Q}_\ell$ 層のなす圏を次のように定義する：

- 対象は $\mathbb{Z}_\ell$ 層とする．
- $\mathbb{Z}_\ell$ 層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ の間の射の集合は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ とする．

この圏の対象のことを $\mathbb{Q}_\ell$ **層**あるいは単に ℓ **進層**と呼ぶ．$\mathbb{Z}_\ell$ 層 $\mathcal{F}$ から自然に ℓ 進層を定めることができるが，これを $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_\ell}$ と書く．

例 1.33

i) $\mathbb{Z}_\ell$ 層 $\mathbb{Z}_\ell(m)$ に伴う ℓ 進層を $\mathbb{Q}_\ell(m)$ と書く．

ii) ある整数 $n \geq 1$ に対して $\ell^n\mathcal{F} = 0$ となるようなエタール層 $\mathcal{F}$ は自然に $\mathbb{Z}_\ell$ 層

とみなすことができるが，これに伴う ℓ 進層は 0 と同型である．

iii) X が連結な Noether スキームであるとし，その幾何学的点 $\overline{x}$ を固定する．$\rho\colon \pi_1(X,\overline{x}) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ を基本群 $\pi_1(X,\overline{x})$ の ℓ 進表現とし，その $\mathbb{Z}_\ell$ 格子 Λ をとる．このとき，整 ℓ 進表現 (ρ,Λ) に対して X 上のスムーズ $\mathbb{Z}_\ell$ 層 $\mathcal{F}$ が定まるが，それに伴う ℓ 進層 $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_\ell}$ の同型類は Λ のとり方に依存しない．これを ℓ 進表現 ρ に伴う ℓ 進層という．
一般のスキーム X に対して，スムーズ $\mathbb{Z}_\ell$ 層に伴う ℓ 進層と同型な ℓ 進層は**スムーズ** (smooth) であると言われる．連結な Noether スキーム X 上のスムーズ ℓ 進層は $\pi_1(X,\overline{x})$ の ℓ 進表現と圏同値になる．

次に，$\mathbb{Z}_\ell$ 層，ℓ 進層を係数とするコホモロジーを定義する．

定義 1.34

X 上のエタール層の射影系のなす圏は十分単射的対象を持つアーベル圏である．この圏からアーベル群の圏への左完全関手 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0} \longmapsto \varprojlim_n \Gamma(X,\mathcal{F}_n)$ の i 次右導来関手を $H^i(X,-)$ と書く．

特に，$\mathbb{Z}_\ell$ 層 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ に対し，X の $\mathcal{F}$ 係数 **ℓ 進エタールコホモロジー** $H^i(X,\mathcal{F})$ を定義することができる．さらに，ℓ 進層 $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_\ell}$ に対し，その ℓ 進エタールコホモロジーを $H^i(X,\mathcal{F}_{\mathbb{Q}_\ell}) = H^i(X,\mathcal{F})\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell$ と定める．

後によく出てくるのは $H^i(X,\mathbb{Q}_\ell(m))$ である．

$H^i(X,(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0})$ と $\varprojlim_n H^i(X,\mathcal{F}_n)$ の違いは次の命題によって測ることができる（証明は [Jan] を参照）：

命題 1.35

$\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ を $\mathbb{Z}_\ell$ 層（より一般にエタール層の射影系でもよい）とするとき，次の完全系列がある（$\varprojlim_n^1$ は $\varprojlim_n$ の 1 次右導来関手）：

$$0 \longrightarrow \varprojlim_n{}^1 H^{i-1}(X,\mathcal{F}_n) \longrightarrow H^i(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \varprojlim_n H^i(X,\mathcal{F}_n) \longrightarrow 0.$$

特に，射影系 $(H^{i-1}(X,\mathcal{F}_n))_{n\geq 0}$ が Mittag-Leffler 条件を満たす（例えば任意の $n\geq 0$ に対し $H^{i-1}(X,\mathcal{F}_n)$ が有限ならよい）ならば $H^i(X,\mathcal{F})\cong \varprojlim_n H^i(X,\mathcal{F}_n)$ である．

例 1.36

i) X を代数閉体 k 上固有かつ滑らかな連結代数曲線とし，ℓ が k で可逆であると仮定する．このとき，定理 1.24 より任意の i, n に対し $H^i(X,\mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z})$ は有限である．よって $H^i(X,\mathbb{Q}_\ell)\cong(\varprojlim_n H^i(X,\mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z}))\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell$ が成り立ち，

次の計算結果が得られる：

$$H^0(X,\mathbb{Q}_\ell)=\mathbb{Q}_\ell, \qquad H^1(X,\mathbb{Q}_\ell)=V_\ell\operatorname{Pic}(X)(-1),$$
$$H^2(X,\mathbb{Q}_\ell)=\mathbb{Q}_\ell(-1), \qquad H^i(X,\mathbb{Q}_\ell)=0\ (i\geq 3).$$

ii) より一般に, X が分離閉体 k 上有限型なスキームであり, ℓ が k において可逆なとき, X 上のスムーズ ℓ 進層 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ に対し $H^i(X,\mathcal{F}_n)$ は有限 $\mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z}$ 加群であることが知られている（次小節でも少し述べる）．よってこのとき $H^i(X,\mathcal{F})\cong\varprojlim_n H^i(X,\mathcal{F}_n)$ が得られる．

練習 1.37

k を体とし，G_k の ℓ 進表現 (ρ,V) を考える．ρ には $\operatorname{Spec}k$ 上の ℓ 進層 $\mathcal{F}$ が対応し，$H^i(\operatorname{Spec}k,\mathcal{F})\cong H^i(G_k,V)$ が成り立つことを示せ．

$\mathbb{Z}_\ell$ 層や ℓ 進層の高次順像 R^if_* もかなり一般の状況で定義することができる．この場合 $\mathbb{Z}_\ell$ 層 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ に対し射影系 $(R^if_*\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ が $\mathbb{Z}_\ell$ 層になるとは限らないので少し工夫が必要である．これに対し，$\mathbb{Z}_\ell$ 層や ℓ 進層の逆像の定義は容易である．

また，$\mathbb{Z}_\ell$ 層や ℓ 進層の導来圏を構成し，その間に関手 Rf_* 等を定義することも（多くの場合）可能である．このあたりのことについては [Eke] に詳しく述べられているので，必要に応じて参照するとよいと思われる．

1.4 エタールコホモロジーの諸性質

ここでは，エタールコホモロジー[注6]の持つ重要な性質のうち，Galois 表現と関係が深いと思われるものを紹介する．いずれも完全に一般的な形で述べるのではなく，後に用いる際に十分な状況に制限して述べることにする．より詳細な内容に興味を持たれた方は [SGA4], [SGA4$\frac{1}{2}$] 等をご覧いただきたい．

1.4.1 関手性・カップ積

$f\colon Y\longrightarrow X$ をスキームの射とし，$\mathcal{F}$ を X 上のエタール層とする．このとき，コホモロジー間の準同型 $f^*\colon H^i(X,\mathcal{F})\longrightarrow H^i(Y,f^*\mathcal{F})$ が自然に導かれる．これは合成に関して整合的である．すなわち，$g\colon Z\longrightarrow Y$ をもう一つの射とすると，$(f\circ g)^*=g^*\circ f^*$ である．特に，$\mathcal{F}$ が定数層 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ である場合には，$f^*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ であるから，$f^*\colon H^i(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\longrightarrow H^i(Y,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ が得られる．これによって，$X\longmapsto H^i(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ はスキームの圏から $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 加群の圏への反変関手を与える．

全く同様のことが ℓ 進層に対しても成り立つ．特に，$X\longmapsto H^i(X,\mathbb{Q}_\ell)$ はスキームの圏から $\mathbb{Q}_\ell$ ベクトル空間の圏への反変関手を与える．

[注6] 今後は，エタールコホモロジーという言葉で通常のエタールコホモロジーと ℓ 進エタールコホモロジーの双方を表すことにする．

X をスキームとするとき，そのコホモロジーの**カップ積**

$$\cup\colon H^i(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\times H^j(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\longrightarrow H^{i+j}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

が自然に定まる．これは双線型写像であり，$x\in H^i(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, $y\in H^j(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ に対し $x\cup y=(-1)^{ij}(y\cup x)$ を満たす．また，$f\colon Y\longrightarrow X$ をスキームの射とするとき，$f^*(x\cup y)=(f^*x)\cup(f^*y)$ が成り立つ．ℓ 進コホモロジーに対しても同様のことが成立する．

例 1.38
E を代数閉体 k 上の楕円曲線とするとき，

$$H^1(E,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=E[n](-1),\quad H^2(E,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(-1)$$

であった．この同一視で，カップ積は Weil ペアリング $E[n]\times E[n]\longrightarrow\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1)$ の (-2) 捻りと一致する．

1.4.2　極限との交換

I を有向集合とし，$(X_i)_{i\in I}$ を準コンパクトかつ準分離的なスキーム (特に Noether スキームならよい) の射影系とする．さらに，$i\le j$ のときに存在する射 $p_{ij}\colon X_j\longrightarrow X_i$ は全てアフィン射であるとする．このとき，スキームの射影極限 $X=\varprojlim_{i\in I}X_i$ が存在する（X_i が全てアフィンのときには，$X_i=\operatorname{Spec}A_i$, $A=\varinjlim_{i\in I}A_i$ とおくと $X=\operatorname{Spec}A$ である）．自然な射 $X\longrightarrow X_i$ を p_i と書く．

定理 1.39（極限との交換：[SGA4, Exposé VII]）
各 $i\in I$ に対し X_i 上のエタール層 $\mathcal{F}_i$ が与えられていて，任意の $i\le j$ に対し $p_{ij}^*\mathcal{F}_i=\mathcal{F}_j$ が成り立っているとする．$i\in I$ を任意に選び $\mathcal{F}=p_i^*\mathcal{F}_i$ とおくとこれは i のとり方によらない．このとき，自然な同型 $H^m(X,\mathcal{F})\cong\varinjlim_{i\in I}H^m(X_i,\mathcal{F}_i)$ がある．
特に，整数 $n\ge 1$ に対し，$H^m(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\cong\varinjlim_{i\in I}H^m(X_i,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ が成り立つ．

この定理は，後にエタールコホモロジーが ℓ 進表現を与えることの証明に用いられる．それ以外にも，エタールコホモロジーの基本性質を証明する際にはいたるところで現れるきわめて重要な性質である．
なお，この定理は ℓ 進層に対しては一般には成立しない (次の練習の ii) を参照)．帰納極限と射影極限は一般には交換しないためである．

練習 1.40
k を体とする．I を $\overline{k}$ に含まれる k の有限次拡大のなす有向集合とし，スキームの射影系 $(\operatorname{Spec}L)_{L\in I}$ を考える．このとき，$\varprojlim_{L\in I}\operatorname{Spec}L=\operatorname{Spec}\overline{k}$ である．

i) $\mathcal{F}$ を $\operatorname{Spec} k$ 上のエタール層とし，その $\operatorname{Spec} L$（L は k の拡大体）への引き戻しを $\mathcal{F}_L$ と書く．このとき，$\varinjlim_{L \in I} H^i(\operatorname{Spec} L, \mathcal{F}_L) \cong H^i(\operatorname{Spec} \overline{k}, \mathcal{F}_{\overline{k}})$ が成り立つことを Galois コホモロジーを用いて直接確認せよ.

ii) $\mathcal{F}$ を $\operatorname{Spec} k$ 上の ℓ 進層とし，その $\operatorname{Spec} L$（L は k の拡大体）への引き戻しを $\mathcal{F}_L$ と書く．このとき，$\varinjlim_{L \in I} H^0(\operatorname{Spec} L, \mathcal{F}_L) \cong H^0(\operatorname{Spec} \overline{k}, \mathcal{F}_{\overline{k}})$ は一般には成り立たないことを示せ.

次の系は, 高次順像の茎がコホモロジーで捉えられることを主張するものである.

系 1.41

$f \colon Y \longrightarrow X$ をスキーム間の準コンパクトかつ準分離的な射とし，$\overline{x} \longrightarrow X$ を X の幾何学的点とする．また，$\overline{x}$ における X の強ヘンゼル化を $X^h_{\overline{x}}$ とおく．このとき，Y 上のエタール層 $\mathcal{F}$ について次が成り立つ：

$$(R^i f_* \mathcal{F})_{\overline{x}} \cong H^i(Y \times_X X^h_{\overline{x}}, \mathcal{F}|_{Y \times_X X^h_{\overline{x}}}).$$

特に，$Y = X$, $f = \mathrm{id}$ の場合に適用すると次が得られる：

$$H^i(X^h_{\overline{x}}, \mathcal{F}|_{X^h_{\overline{x}}}) \cong \begin{cases} \mathcal{F}_{\overline{x}} & (i = 0), \\ 0 & (i \geq 1). \end{cases}$$

略証　まず強ヘンゼル化について思い出しておこう．$\overline{x}$ における X の強ヘンゼル化 $X^h_{\overline{x}}$ とは，茎の定義の際にも出てきた可換図式

$$\begin{tikzcd} \overline{x} \arrow[r] \arrow[dr, "i"'] & U \arrow[d, "\text{エタール}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

にわたって U の射影極限をとることで得られるスキームである．U はアフィンとしてとっても射影極限は変わらないので，そのことから射影極限の存在がいえる.

さて, 位相空間の場合と同様, $R^i f_* \mathcal{F}$ は関手 (= X 上の「エタール前層」) $\mathbf{Et}_X \longrightarrow \mathbf{Ab}$; $V \longmapsto H^i(Y \times_X V, \mathcal{F}|_{Y \times_X V})$ の「層化」として得られるから，$\varprojlim_U (Y \times_X U) = Y \times_X X^h_{\overline{x}}$ および定理 1.39 より

$$(R^i f_* \mathcal{F})_{\overline{x}} = \varinjlim_U H^i(Y \times_X U, \mathcal{F}|_{Y \times_X U}) \cong H^i(Y \times_X X^h_{\overline{x}}, \mathcal{F}|_{Y \times_X X^h_{\overline{x}}})$$

を得る．後半は $f = \mathrm{id}$ のとき $R^i f_* \mathcal{F} = 0$ $(i \geq 1)$ であることに注意すればよい．■

練習 1.42

$j\colon \eta \longrightarrow X$ を定理 1.22 の証明中の記号とする．このとき，茎をとることで $R^i j_* \mathbb{G}_m = 0\ (i \geq 1)$ を示せ．

1.4.3　コホモロジー次元

n 次元位相多様体の $n+1$ 次以上のコホモロジーは 0 になることが知られているが，これと同様のことは分離閉体上有限型なスキームに対しても成立する．それを説明するために，用語を一つ導入しておこう．スキーム上のエタール層の各断面が局所的に捻れ元である（ある正整数倍すると 0 になる）とき，**捻れ層** (torsion sheaf) であるという．さらに，そのような正整数を X で可逆なようにとることができるとき，X の標数と素な捻れ層と呼ぶ（これは後の平滑底変換定理の主張で出てくる）．

定理 1.43（コホモロジー次元：[SGA4, Exposé X]）
k を分離閉体とし，X を k 上有限型な d 次元スキームとする．このとき，X 上の任意の捻れエタール層（あるいは ℓ 進層）$\mathcal{F}$ に対して，$H^i(X, \mathcal{F}) = 0\ (i > 2d)$ が成立する．

この定理は後に述べる比較定理と見比べると理解しやすいだろう．さらに X がアフィンスキームである場合には，$H^i(X, \mathcal{F}) = 0\ (i > d)$ が成り立つことも知られている（**アフィン Lefschetz 定理**，[SGA4, Exposé XIV]）．

1.4.4　底変換定理

定理 1.44（固有底変換定理：[SGA4, Exposé XII, XIII]）
スキームのカルテシアンな図式

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

において，f が固有射であるとする．このとき，Y 上の捻れエタール層 $\mathcal{F}$ に対し，次の自然な同型がある：$g^* R f_* \mathcal{F} \cong R f'_* g'^* \mathcal{F}$.
同様のことが ℓ 進層に対しても成り立つ．

例 1.45

X' が X の幾何学的点 $\overline{x}$ である場合を考えてみよう（実はこの場合が本質的である）．このとき，系 1.41 より $g^* R^i f_* \mathcal{F} = (R^i f_* \mathcal{F})_{\overline{x}} = H^i(Y \times_X X^h_{\overline{x}}, \mathcal{F}|_{Y \times_X X^h_{\overline{x}}})$ であり，また，$R^i f'_* g'^* \mathcal{F} \cong H^i(Y_{\overline{x}}, \mathcal{F}|_{Y_{\overline{x}}})$ である（$\overline{x}$ 上のエタール層とアーベル群を同一視

している）．したがって，$H^i(Y \times_X X^h_{\overline{x}}, \mathcal{F}|_{Y\times_X X^h_{\overline{x}}}) \cong H^i(Y_{\overline{x}}, \mathcal{F}|_{Y_{\overline{x}}})$ が成り立つ．特に X が強ヘンゼル局所環のスペクトラムであり（例えば分離閉な剰余体を持つ完備局所環のスペクトラムならよい）$\overline{x}$ がその閉点である場合，$H^i(Y, \mathcal{F}) \cong H^i(Y_{\overline{x}}, \mathcal{F}|_{Y_{\overline{x}}})$ が成り立つ．

練習 1.46

位相空間の場合に固有底変換定理が成り立つことを示せ．次の性質を用いるとよい：X を Hausdorff 空間とし，Z をそのコンパクト部分集合とすると，X 上の層 $\mathcal{F}$ に対して $H^i(Z, \mathcal{F}|_Z) \cong \varinjlim_{U\,:\,Z\text{ の開近傍}} H^i(U, \mathcal{F}|_U)$ となる．

定理 1.47（平滑底変換定理：[SGA4, Exposé XV, XVI]）

スキームのカルテシアンな図式

$$\begin{CD} Y' @>{g'}>> Y \\ @V{f'}VV @VV{f}V \\ X' @>{g}>> X \end{CD}$$

において，g が滑らかな射であり，f が準コンパクトかつ準分離的な射であるとする．このとき，Y 上の標数と互いに素な捻れエタール層 $\mathcal{F}$ に対し，次の自然な同型がある：$g^*Rf_*\mathcal{F} \cong Rf'_*g'^*\mathcal{F}$.

ℓ が Y において可逆ならば，同様のことが ℓ 進層に対しても成り立つ．

平滑底変換定理の応用として，分離閉体上のスキームのエタールコホモロジーが分離閉な底変換で不変であることが証明できる[注 7].

系 1.48

k を分離閉体とし，X を k 上有限型なスキームとする．また，k' を分離閉な k の拡大体とする．このとき，k において可逆な整数 $n \geq 1$ に対し次の自然な同型がある：$H^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^i(X_{k'}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

証明　まず k' が k の代数拡大（したがって特に純非分離拡大）である場合には，$\mathbf{Et}_X$ と $\mathbf{Et}_{X_{k'}}$ は圏同値であることが知られており ([SGA4, Exposé VIII])，それから明らかに従う．次に，k' が $k(T_1, \ldots, T_m)$ の分離閉包である場合を考える．このとき，$\operatorname{Spec} k'$ は $\mathbb{A}^m_k = \operatorname{Spec} k[T_1, \ldots, T_m]$ の生成点上の幾何学的点 $\overline{x}$ を与え，$\overline{x}$ における $\mathbb{A}^m_k$ の強ヘンゼル化は $\operatorname{Spec} k'$ に一致する．また，合成 $\operatorname{Spec} k' \longrightarrow \mathbb{A}^m_k \longrightarrow \operatorname{Spec} k$

[注 7] これはエタールコホモロジーに特有の現象である．例えば，体 k 上のスキームのクリスタルコホモロジーは $\operatorname{Frac} W(k)$ ベクトル空間となるので，k を拡大するとコホモロジーの係数体も大きくなる．

によって得られる幾何学的点において $\operatorname{Spec} k$ を強ヘンゼル化すると $\operatorname{Spec} k$ のままである．よって，カルテシアンな図式

$$\begin{tikzcd} X \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}_k^m \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{A}_k^m \arrow[r, "g"] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

に平滑底変換定理を適用することで $g^* R^i f_* \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong R^i f'_* \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が得られ，それの両辺の $\overline{x}$ における茎をとって系 1.41 を用いることで $H^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong H^i(X_{k'}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ が得られるのでよい．

上記の 2 つの場合より，k' が $k(T_1, \ldots, T_m)$ の代数拡大である場合が従う．任意の k' はこのような k の拡大体の合併として書けるので定理 1.39 より主張が従う． ∎

1.4.5　有限性

定理 1.49（有限性定理：[SGA4$\frac{1}{2}$, Finitude]）

k を分離閉体とし，X を k 上有限型なスキームとする．このとき，k において可逆な整数 $n \geq 1$ に対し，$H^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ は有限 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 加群である．

また，ℓ を k の標数と異なる素数とするとき，$H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ は有限次元 $\mathbb{Q}_\ell$ ベクトル空間である．より一般に，$\mathcal{F}$ をスムーズな ℓ 進層とするとき，$H^i(X, \mathcal{F})$ は有限次元 $\mathbb{Q}_\ell$ ベクトル空間である．

証明について少し述べる．X が k 上固有である場合には，固有底変換定理と次元の帰納法で曲線の場合（定理 1.24）に帰着できる．X が k 上固有でない場合にはいわゆる Deligne のトリックを用いるものが有名であるが，現在ではオルタレーション ([dJ]) を用いて X が k 上固有かつ滑らかなスキームから強正規交叉因子を除いて得られる場合に帰着し，さらに平滑底変換定理の系である純性定理 (smooth purity) を用いて k 上固有な場合に帰着させるのが早いと思う．

1.4.6　比較定理

定理 1.50（比較定理：[SGA4, Exposé XI, XVI]）

X を複素数体 $\mathbb{C}$ 上有限型なスキームとする．X の $\mathbb{C}$ 値点全体の集合 $X(\mathbb{C})$ には自然に複素解析空間の構造が入り，したがってその位相空間としてのコホモロジーを考えることができる．

このとき，整数 $n \geq 1$ に対し，自然な同型 $H^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ がある．また，素数 ℓ に対し，自然な同型 $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \cong H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ がある．

この定理も有限性と同様の方針で示すことができる．

練習 1.51

X が $\mathbb{C}$ 上固有かつ滑らかな代数曲線の場合に，上の定理が成り立っていることを確認せよ（H^1 については，Jacobi 多様体の古典的な記述を思い出せ）．

1.4.7 Poincaré 双対性

k を分離閉体とし，X を k 上固有かつ滑らかな純 d 次元スキームとする．また，$n \geq 1$ を k で可逆な整数とする．このとき，**トレース射** (trace map) と呼ばれる準同型 $\rho_X\colon H^{2d}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)) \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が標準的に定まる．例えば $d = 1$ かつ X が連結な場合には，ρ_X は定理 1.23 で構成した同型である．ℓ が k で可逆な素数のとき，同様にトレース射 $\rho_X\colon H^{2d}(X, \mathbb{Q}_\ell(d)) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell$ がある．

さらに，このトレース射について次が成り立つ：

定理 1.52（Poincaré 双対定理：[SGA4, Exposé XVIII]）
カップ積によって与えられる双線型形式

$$H^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times H^{2d-i}\bigl(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)\bigr) \xrightarrow{\cup} H^{2d}\bigl(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)\bigr) \xrightarrow{\rho_X} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

は完全ペアリングである．すなわち，自然な準同型

$$H^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\bigl(H^{2d-i}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\bigr)$$

は同型である．同様のことが ℓ 進コホモロジーに対しても成立する．

練習 1.53

X が k 上固有かつ滑らかな連結代数曲線の場合に定理が成り立つことを確認せよ（Jacobi 多様体の自己双対性を用いる）．

X, Y を k 上固有かつ滑らかなスキームとし，X が純 d 次元，Y が純 d' 次元であると仮定する．$f\colon Y \longrightarrow X$ を k 上の射とするとき，引き戻し $f^*\colon H^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(Y, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ の双対をとることで**押し出し** (push-forward) $f_*\colon H^i(Y, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{i+2d-2d'}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d-d'))$ を定義することができる．同様に $f_*\colon H^i(Y, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^{i+2d-2d'}(X, \mathbb{Q}_\ell(d-d'))$ も定義できる．

押し出しに関する次の性質は定義から容易に導くことができる：

命題 1.54（射影公式）
上の状況において $x \in H^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, $y \in H^j(Y, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ とすると次が成り立つ：

$$f_*(f^*x \cup y) = x \cup f_*y.$$

注意 1.55
実は，f_* はより一般に X, Y, f が次の仮定を満たす状況で定義することができる：X：k 上有限型，滑らかかつ純 d 次元，Y：k 上有限型かつ純 d' 次元，f：固有.

1.4.8　Künneth 公式

定理 1.56（Künneth 公式：[SGA4$\frac{1}{2}$, Finitude]）
k を分離閉体とし，ℓ を k で可逆な素数とする．このとき，k 上有限型なスキーム X, Y に対し次の自然な同型がある：

$$H^m(X \times_k Y, \mathbb{Q}_\ell) \cong \bigoplus_{i+j=m} H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} H^j(Y, \mathbb{Q}_\ell).$$

$i + j = m$ となる整数 i, j に対し，自然な線型写像

$$H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} H^j(Y, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\mathrm{pr}_1^* \cup \mathrm{pr}_2^*} H^m(X \times_k Y, \mathbb{Q}_\ell)$$

があり，定理中の同型はこれより誘導されるものである．
X, Y のいずれかが k 上固有または滑らかである場合には，Künneth 公式は底変換定理より容易に従う（カルテシアンな図式

$$\begin{array}{ccc} X \times_k Y & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & X \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_2}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & \operatorname{Spec} k \end{array}$$

に適用する）．一般の場合には Deligne のトリックで証明できる ([SGA4$\frac{1}{2}$, Finitude]) が，オルタレーションを用いて X が k 上滑らかな場合に帰着するという方針でもできる．

1.4.9　サイクル類・Lefschetz 跡公式

k を分離閉体とし，X を k 上有限型かつ滑らかな純 d 次元スキームとする．ℓ を k で可逆な素数とする．また，Z を X の既約閉部分スキームとし，その余次元を c と書く．このとき，Z の X における**サイクル類** (cycle class) $\mathrm{cl}(Z) \in H^{2c}(X, \mathbb{Q}_\ell(c))$ が定まり，次のような性質を満たす ([SGA4$\frac{1}{2}$, Cycle])：

- cl は有理同値で不変である．すなわち，cl は X の Chow 群 $\mathrm{CH}_{d-c}(X)$（X の $d-c$ 次元サイクルが自由に生成するアーベル群を有理同値で割って得られるアーベル群）からの準同型 $\mathrm{cl}\colon \mathrm{CH}_{d-c}(X) \longrightarrow H^{2c}(X, \mathbb{Q}_\ell(c))$ を誘導する．
- cl はサイクルに対する操作（固有射による押し出し，平坦射による引き戻し，正則埋め込みによる引き戻しなど）と整合的である．特に，Chow 群の元 ζ_1,

ζ_2 に対し，$\mathrm{cl}(\zeta_1 \cap \zeta_2) = \mathrm{cl}(\zeta_1) \cup \mathrm{cl}(\zeta_2)$ が成り立つ．また，X が k 上固有であるとき，$\zeta \in \mathrm{CH}_0(X)$ に対し $\deg \zeta = \rho_X(\mathrm{cl}(\zeta))$ が成り立つ．

- $c = 0$ の場合，X の連結成分 Z（これは整スキームである）に対し，$\mathrm{cl}(Z) \in H^0(X, \mathbb{Q}_\ell)$ は Z 上 1，Z の外で 0 な X 上の（$\mathbb{Q}_\ell$ 値）局所定数関数に対応する．

X が k 上固有であり，その既約閉部分スキーム Z が k 上滑らかである場合は，$\mathrm{cl}(Z)$ は次のようにして構成することができる：自然な閉埋め込み $Z \hookrightarrow X$ を i と書くと，以前述べたように，Poincaré 双対定理から押し出し $i_*\colon H^j(Z, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^{j+2c}(X, \mathbb{Q}_\ell(c))$（この場合は **Gysin 準同型**とも呼ばれる）が誘導される．特に $j = 0$ とすると $i_*\colon H^0(Z, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^{2c}(X, \mathbb{Q}_\ell(c))$ が得られるが, これによる $1 \in H^0(Z, \mathbb{Q}_\ell)$ の像が $\mathrm{cl}(Z)$ である．

練習 1.57

X を分離閉体 k 上固有かつ滑らかな連結代数曲線とし，$x \in X$ を任意の閉点とする．このとき $H^2(X, \mathbb{Q}_\ell(1))$ は $\mathrm{cl}(x)$ によって生成されることを示せ．これは代数曲線の H^2 に誘導される準同型を調べる際に便利である．なお，同様のことが k 上固有かつ滑らかな d 次元連結スキームの $H^{2d}(X, \mathbb{Q}_\ell(d))$ に対しても成立する．

Künneth 公式およびサイクル類の存在とその性質から形式的な議論によって次の Lefschetz 跡公式が導かれる：

定理 1.58（Lefschetz 跡公式）

k を分離閉体，X を k 上固有かつ滑らかなスキームとし，$f\colon X \longrightarrow X$ を k 上の射とする．また，Γ_f を閉埋め込み $X \xrightarrow{f \times \mathrm{id}} X \times_k X$ の像として得られる $X \times_k X$ の閉部分スキームとする．このとき，k において可逆な素数 ℓ に対して次が成り立つ（$\Delta_X \subset X \times_k X$ は対角，すなわち Γ_{id} を表す）：

$$\sum_{i=0}^{2\dim X} (-1)^i \operatorname{Tr}\bigl(f^*; H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)\bigr) = \deg(\Gamma_f \cap \Delta_X).$$

上の等式の右辺 $\deg(\Gamma_f \cap \Delta_X)$ は $f\colon X \longrightarrow X$ の重複度込みでの固定点の個数を表していると考えられる．

証明　簡単のため $d = \dim X$ とおき，コホモロジーの係数および Tate 捻りは省略する．

$\gamma = \mathrm{cl}(\Gamma_f) \in H^{2d}(X \times_k X)$ とおき，$\delta\colon X \longrightarrow X \times_k X$ を対角埋め込みとする．サイクル類の性質より $\deg(\Gamma_f \cap \Delta_X) = \rho_X \delta^*(\gamma)$ であるから，示すべき等式の左辺がこれに一致することを証明すればよい．

$f = \mathrm{pr}_1 \circ (f \times \mathrm{id})$, $\mathrm{id} = \mathrm{pr}_2 \circ (f \times \mathrm{id})$ に注意すると，$x \in H^i(X)$ に対し

$$f^*(x) = \mathrm{pr}_{2*}(f \times \mathrm{id})_*(f \times \mathrm{id})^* \mathrm{pr}_1^*(x) = \mathrm{pr}_{2*}\bigl(\mathrm{pr}_1^*(x) \cup (f \times \mathrm{id})_*(1)\bigr)$$

$$= \mathrm{pr}_{2*}\bigl(\mathrm{pr}_1^*(x) \cup \gamma\bigr)$$

が成り立つ (2 つ目の等号で射影公式を, 3 つ目の等号でサイクル類の Gysin 準同型による記述を用いた). Künneth 同型 $H^{2d}(X \times_k X) \cong \bigoplus_{s+t=2d} H^s(X) \otimes H^t(X)$ で γ が対応する元の (s,t) 成分を $\sum_n a_{s,n} \otimes b_{t,n}$ とおくと, $f^*(x) = \sum_n \rho_X(x \cup a_{2d-i,n}) b_{i,n}$ と書くことができる. このことから $\mathrm{Tr}(f^*; H^i(X)) = \sum_n \rho_X(b_{i,n} \cup a_{2d-i,n})$ が分かり, したがって

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \,\mathrm{Tr}\bigl(f^*; H^i(X)\bigr) &= \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \sum_n \rho_X(b_{i,n} \cup a_{2d-i,n}) \\ &= \sum_{i=0}^{2d} \sum_n \rho_X(a_{2d-i,n} \cup b_{i,n}) = \rho_X \delta^*(\gamma)\end{aligned}$$

が得られるのでよい. ∎

この Lefschetz 跡公式は, エタールコホモロジーから得られる Galois 表現を調べる際に中心的な役割を果たす. 特に 3.3 節を参照されたい.

2　エタールコホモロジーを用いた Galois 表現の構成

2.1　エタールコホモロジーとして得られる Galois 表現

本節では，体 k および k において可逆な素数 ℓ を固定する．X を k 上固有かつ滑らかなスキームとする[注 8]．このとき，$\sigma \in G_k$ に対し $X_{\overline{k}}$ の（スキームとしての）自己同型 σ^* が $X_{\overline{k}} = X \otimes_k \overline{k} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{Spec}\, \sigma} X \otimes_k \overline{k} = X_{\overline{k}}$ によって定まるので，$X_{\overline{k}}$ のエタールコホモロジーにも自己同型 $(\sigma^*)^* \colon H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ が定まる．これによって G_k の $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への表現が得られる．

命題 2.1
G_k の $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への表現は連続である．

証明　G_k の $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}_\ell)$ への表現の連続性を示せばよい．例 1.36（あるいは有限性定理）より $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}_\ell) = \varprojlim_n H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z})$ である．まず，$\varprojlim_n H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z})$ の副有限位相が ℓ 進位相と一致することを示そう．$m \geq 1$ を整数とする．$X_{\overline{k}}$ 上のエタール層の完全系列 $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell^{n+1-m}\mathbb{Z} \xrightarrow{\ell^m \text{ 倍}} \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ に伴うコホモロジー長完全系列の射影極限をとることで，完全系列

$$\varprojlim_n H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z}) \xrightarrow{\ell^m \text{ 倍}} \varprojlim_n H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})$$

が得られる（射影極限は一般には完全関手ではないが，コホモロジーの有限性から完全性を保証する Mittag-Leffler 条件が得られる）．これより，

$$\ell^m \varprojlim_n H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z}) = \mathrm{Ker}\Bigl(\varprojlim_n H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})\Bigr)$$

となるのでよい．

したがって，G_k の $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z})$ への作用がスムーズであることを示せば十分である．定理 1.39 より $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z}) = \varinjlim_L H^i(X_L, \mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z})$（$L$ は $\overline{k}$ に含まれる k の有限次拡大を動く）であり，$H^i(X_L, \mathbb{Z}/\ell^{n+1}\mathbb{Z})$ に $\mathrm{Gal}(\overline{k}/L) \subset G_k$ は自明に作用するのでよい．∎

2.2　一般化：代数的対応付きの場合

エタールコホモロジー $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ 全体を考えると，Galois 表現として大きすぎる場合がある．例えば，保型表現に伴う Galois 表現を構成する際にも，志村多様体のコホモロジー全体を考えるのではなく，その一部分（大体，考えている保型表現 Π の

[注 8] ここでは簡単のためこのように仮定しているが，多くの場合さらに弱めることが可能である．

有限部分 Π^∞ の isotypic 部分）をとってくることで行われる．しかし，「$H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の部分表現」というだけではあまりにも漠然としすぎていて，どのように調べてよいかが分からない．そこで，$H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の部分表現のうち「冪等な代数的対応で切り取られる部分」という幾何学的解釈を持つものを考えることにする．

まずは代数的対応について説明しておこう．以下では，X, Y を k 上固有かつ滑らかなスキームとし，X は純 d 次元，Y は純 d' 次元であるとする．

定義 2.2

有理 Chow 群 $\mathrm{CH}_{d'}(X \times_k Y)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{CH}_{d'}(X \times_k Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の元を Y から X への**代数的対応** (algebraic correspondence) と呼ぶ．

例えば，$f\colon Y \longrightarrow X$ を k 上の射とすると，そのグラフ $Y \xhookrightarrow{f\times\mathrm{id}} X \times_k Y$ は純 d' 次元閉部分スキームであるから，それに伴うサイクルの同値類は代数的対応を与える．

より一般に，k 上固有な純 d' 次元スキーム Z からの k 上の射 $a\colon Z \longrightarrow X \times_k Y$ が与えられると，代数的対応 $a_*[Z]$ が得られる．これを単に $[a]$ と書くことにする．$i = 1, 2$ に対し $a_i = \mathrm{pr}_i \circ a$ とおく．a_2 がエタール射であるような a に伴う $[a]$（および その $\mathbb{Q}$ 線型結合）は代数的対応の中でも特に扱いやすい．本稿の 3.3 節においても，考える代数的対応をこのような $[a]$ に限ることでより強い結論を導くことを行う．

例えば，次に例として挙げる Hecke 対応の場合には a_2 はエタール射になる（この場合は a_1 もエタール射になる）．

例 2.3

Sh_U を代数群 G に伴うレベル U（$U \subset G(\mathbb{A}^\infty)$ はコンパクト開部分群）の志村多様体とし，$g \in G(\mathbb{A}^\infty)$ とする．このとき，**Hecke 対応**は次の図式で与えられる：

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Sh}_{U\cap gUg^{-1}} \arrow[r, "\mathrm{pr}"] \arrow[dl, "\mathrm{pr}"'] & \mathrm{Sh}_{g^{-1}Ug} \arrow[dr, "g"] & \\
\mathrm{Sh}_U & & & \mathrm{Sh}_U.
\end{tikzcd}$$

これより射 $\mathrm{Sh}_{U\cap gUg^{-1}} \longrightarrow \mathrm{Sh}_U \times \mathrm{Sh}_U$ が誘導され，代数的対応 $[g]$ が得られる．

代数的対応が与えられると，コホモロジー間の射が誘導される：

定義 2.4

γ を Y から X への代数的対応とするとき，

$$H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\mathrm{pr}_1^*} H^i(X_{\overline{k}} \times_{\overline{k}} Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\cup\,\mathrm{cl}(\gamma)} H^{i+2d}\bigl(X_{\overline{k}} \times_{\overline{k}} Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(d)\bigr)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{pr}_{2*}} H^i(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

の合成として $\gamma^*\colon H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^i(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ を定める．これは G_k の作用と可換な $\mathbb{Q}_\ell$ 線型写像となる．

γ が $f\colon Y \longrightarrow X$ のグラフとして得られる場合には，$\gamma^* = f^*$ となることが射影公式より分かる（Lefschetz 跡公式の証明を参照）．よって上の定義はコホモロジーの引き戻しの一般化であるといえる．別の見方をすると，代数的対応もスキーム間の「射」と見なした方がコホモロジーの観点からは自然だということである．（これは注意 2.8 で紹介するモチーフの概念にも繋がる考え方である．）

練習 2.5
$a\colon Z \longrightarrow X \times_k Y$ を以前の通りとし，a_2 はエタールであると仮定する．このとき，$[a]^* = a_{2*}a_1^*$ であることを示せ．

練習 2.6

i) Y' を k 上固有かつ滑らかな純 d'' 次元スキームとし，γ_1, γ_2 をそれぞれ Y から X，Y' から Y への代数的対応とする．$\gamma_1 \circ \gamma_2 = \mathrm{pr}_{13*}(\mathrm{pr}_{12}^*\,\gamma_1 \cap \mathrm{pr}_{23}^*\,\gamma_2)$ とおくとこれは Y' から X への代数的対応を与えることを確認せよ．これを γ_1 と γ_2 の**合成**という．
ii) $(\gamma_1 \circ \gamma_2)^* = \gamma_2^* \circ \gamma_1^*$ を証明せよ．

定義 2.7
X から X への代数的対応 γ および任意の i に対し，γ^* の $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用が冪等であるとき，γ は**冪等** (idempotent) であるという．
X とその上の冪等な代数的対応 γ の組 (X, γ) に対して，

$$H^i(X_{\overline{k}}, \gamma, \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Im}\bigl(\gamma^*\colon H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)\bigr)$$

と定める．これは G_k の ℓ 進表現を与える．

$H^i(X_{\overline{k}}, \gamma, \mathbb{Q}_\ell)$ の定義は γ が冪等でなくとも機能するが，$H^i(X_{\overline{k}}, \gamma, \mathbb{Q}_\ell)$ の性質を $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ および γ を調べることによって導き出すためには冪等性の条件をつけておいた方が都合がよい．例えば，冪等性の条件があると，$H^i(X_{\overline{k}}, \gamma, \mathbb{Q}_\ell)$ への $\sigma \in G_k$ の作用の跡が

$$\mathrm{Tr}\bigl(\sigma; H^i(X_{\overline{k}}, \gamma, \mathbb{Q}_\ell)\bigr) = \mathrm{Tr}\bigl(\sigma \circ \gamma^*; H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)\bigr) = \mathrm{Tr}\bigl(\gamma^* \circ \sigma; H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)\bigr)$$

と計算できる．

注意 2.8

ここでは k 上固有かつ滑らかなスキーム X とその上の冪等な代数的対応を組にして考えたが，そのような考え方をさらに推し進めると**モチーフ** (motive) の概念に到達する．非常に大雑把に言えば，モチーフの圏とは次のようなものである[注 9]：

- 対象は k 上射影的かつ滑らかなスキーム X とその上の冪等な代数的対応 γ からなる組 (X, γ).
- (X, γ) から (X', γ') への射は，X' から X への代数的対応 δ で $\gamma \circ \delta = \delta \circ \gamma'$ を満たすもの[注 10].

このとき，$(X, \gamma) \longmapsto H^i(X_{\overline{k}}, \gamma, \mathbb{Q}_\ell)$ はモチーフの圏から G_k の ℓ 進表現の圏への共変関手を与える．

組 (X, γ) が見かけ上異なっていてもモチーフとして同型であれば同型な Galois 表現が得られるわけであるから，Galois 表現を生み出すおおもとはモチーフであると考える方がすっきりしているといえる．Galois 表現とモチーフの関わりについては，[Ito2] に分かりやすい解説がある．

注意 2.9

実際に志村多様体のコホモロジーを Hecke 対応で切り取って Galois 表現を構成する際には，$\mathbb{C}$（あるいはそれと同型な体である $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$）を係数に持つ代数的対応を考える必要がある．このような場合には，$H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ ではなくさらに $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ をテンソルしたコホモロジー $H^i(X_{\overline{k}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ への $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 係数（冪等）代数的対応 γ の作用を考え，その像をとることで (X, γ) に対応する Galois 表現 $H^i(X_{\overline{k}}, \gamma, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を定義する．より一般に，$\mathbb{Q}_\ell$ 層（ℓ 進層）の $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 版を考える必要がある場合もあるが，ここでは深入りしない．

注 9 実際には，このままだと $\mathbb{Q}_\ell(1)$ のような正の Tate 捻りができないので，負の Tate 捻りを可逆化する操作も必要である．詳細は例えば [Sch2] をご覧いただきたい．

注 10 モチーフは普遍的なコホモロジー理論となるよう定義されたものなので，X に対して (X, Δ_X) を対応させる関手が反変関手になるようにしている．

3　整モデルと Galois 表現の関係

本節では，代数体 F 上固有かつ滑らかなスキーム（およびその上の冪等な代数的対応）より得られる G_F の ℓ 進表現を幾何の立場から調べる技術を紹介する．

S を F 上固有かつ滑らかなスキームとする．まず始めに, コホモロジー $H^i(S_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の次元は S の $\mathbb{C}$ 値点 $S(\mathbb{C})$ の幾何を用いて求めることができることに注意する．実際, 系 1.48 と比較定理を合わせると, $H^i(S_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell) \cong H^i(S_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}_\ell) \cong H^i(S(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ となるので $\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(S_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell) = \dim_{\mathbb{Q}} H^i(S(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ である．代数的対応付きの場合も同様の結果が得られる．

$\dim_{\mathbb{Q}} H^i(S(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ を計算するには，古典的な位相幾何学の他，de Rham コホモロジーなども使うことができる．例えば S が志村多様体の場合は $S(\mathbb{C})$ は対称空間による一意化を持つので，$S(\mathbb{C})$ の de Rham コホモロジーは Lie 環のコホモロジー（より正確には，**$(\mathfrak{g}, K)$ コホモロジー**）によって記述される．特に $S(\mathbb{C})$ がコンパクトである場合には，$H^i(S(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ を Hecke 対応で切り取って得られる Galois 表現の次元の計算は $(\mathfrak{g}, K)$ コホモロジーの次元の計算という表現論的な問題に帰着できることが知られている（**松島の公式**）.

より詳しく G_F の表現 $H^i(S_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ を調べるには，F の各素点 v に対し F の v における完備化を K と書き，表現 $H^i(S_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ を G_K に制限して得られる局所 Galois 表現を調べる[注 11]．系 1.48 より，G_K の作用と可換な同型 $H^i(S_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell) \cong H^i(S_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ があるので，S の代わりに K 上のスキーム S_K を考え，それに伴う Galois 表現を考えればよいことになる．以下では S_K のみに注目するので，より一般に K 上固有かつ滑らかなスキーム X から得られる Galois 表現 $H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$（あるいはその代数的対応付きバージョン）を考えることにしよう．また，v が無限素点である場合は状況はかなり簡単である[注 12]から，v が有限素点である場合に限って考察を進めることにする．このとき，K は完備離散付値体となるので，その整数環 O_K 上の X の**整モデル**というものを考えることができる：

定義 3.1
K 上固有かつ滑らかなスキーム X の**整モデル**とは，O_K 上固有なスキーム $\mathfrak{X}$ で $\mathfrak{X} \otimes_{O_K} K \cong X$（$F$ 上の同型）を満たすもののことである．
同様に，代数体 F 上固有かつ滑らかなスキーム S の整モデルも定義できる．

注意 3.2

i) 永田のコンパクト化定理 ([Nag1], [Nag2], [Lüt], [Con]) より，整モデルは常に存在することが分かる．

注 11 正確には，$\overline{F}$ の $\overline{K}$ への埋め込みを固定している．

注 12 G_K は自明であるか $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であるかのいずれかであり，$G_K \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である場合に $H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ にどのように作用するかは Hodge 理論から分かる．

ii) 整モデルの定義には他にも流儀がある．例えば，O_K 上平坦であることを要求する場合もあるが，このように定義を強めても整モデルは常に存在することが分かる（i) のようにして得られた $\mathfrak{X}$ の中で $\mathfrak{X}_K$ のスキーム論的閉包をとればよい).

本節の目標は，v が ℓ を割らない場合に，X からできる G_K の ℓ 進表現を O_K 上のスキーム $\mathfrak{X}$（あるいはより簡単に，κ 上のスキーム $\mathfrak{X}_\kappa$）の幾何を用いて記述することである．なお，$v \mid \ell$ である場合にはそうでない場合と比べてずっと複雑な現象が起こるが，これに対しても ***p* 進 Hodge 理論**という大理論があり，いろいろなことが分かる．特に，G_K の ℓ 進表現 $H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ に伴う Weil-Deligne 表現[注 13]については本稿で紹介する $v \nmid \ell$ の場合とほぼ同様の戦略で調べられることが分かっている．詳細は本報告集中の中村健太郎氏による記事を参照していただきたい[注 14].

本節で通して用いる記号をまとめておく．素数 ℓ を固定する．F を代数体とし，v を ℓ を割らない F の有限素点とする．F の v における完備化を K と書く．K の整数環 O_K の剰余体を κ と書き，その標数を p とする．κ は有限体であるが，その元の個数を q と書く.

$\overline{\kappa}$ における q 乗写像の逆写像を Frob_v と書く（なぜわざわざ逆写像を考えるかは 3.3 節で説明する）．これは $G_\kappa \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ の位相的生成元である.

Frob_v で生成される部分群 $\mathrm{Frob}_v^{\mathbb{Z}} \subset G_\kappa$ の自然な全射 $G_K \longrightarrow G_\kappa; \sigma \longmapsto \overline{\sigma}$ による逆像を W_K と書き，K の **Weil 群**と呼ぶ．定義より，$\sigma \in W_K$ に対し $\overline{\sigma} = \mathrm{Frob}_v^{n(\sigma)}$ を満たす整数 $n(\sigma)$ が一意的に定まるので，自然な準同型 $n\colon W_K \longrightarrow \mathbb{Z}$ がある．$W_K^+ = \{\sigma \in W_K \mid n(\sigma) \geq 0\}$ とおく.

$n(\varphi) = 1$ を満たす $\varphi \in W_K$（**Frobenius 持ち上げ**と呼ぶ）を一つ固定する．**惰性群** $I_K = \{\sigma \in W_K \mid n(\sigma) = 0\}$ に G_K からの誘導位相を入れ，$W_K = \coprod_{i \in \mathbb{Z}} \varphi^i I_K$ を I_K の可算個のコピーとみなすことで W_K にも位相を入れる．これによって W_K は局所副有限群となり，I_K はそのコンパクト開部分群となる.

O_K の素元 ϖ およびその ℓ 冪乗根の系 $(\varpi^{1/\ell^m})_m$ をとり，$t_\ell\colon I_K \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$ を $\sigma \longmapsto (\sigma(\varpi^{1/\ell^m})/\varpi^{1/\ell^m})_m$ で定めるとこれは ϖ と ℓ 冪乗根の系 $(\varpi^{1/\ell^m})_m$ のとり方によらない全射準同型である．t_ℓ によって $\mathbb{Z}_\ell(1)$ は I_K の最大副 ℓ 商と同一視することができる.

X を K 上固有かつ滑らかな純 d 次元スキームとし，$\mathfrak{X}$ をその整モデルとする．また，γ を X 上の代数的対応とする．これに対し，代数体 F 上固有かつ滑らかなスキームを考えたい場合には S と書き，その整モデルは $\mathfrak{S}$ と記す.

[注 13] Fontaine による関手 D_{pst} によって定義される．$v \nmid \ell$ の場合と異なり，ℓ 進表現そのものよりも情報が落ちている.
[注 14] 志村曲線の場合には [Mie] にも簡単に説明を書いた.

3.1 Weil-Deligne 表現

まずはじめに，G_K の ℓ 進表現を理解する際に有用な Weil-Deligne 表現の概念を復習しよう．詳細は [BH, §7] などを参照していただきたい．本報告集中の山内卓也氏による記事にも詳しい説明がある．

定義 3.3
標数 0 の体 Ω 上の **Weil-Deligne 表現**とは，W_K の Ω 上の有限次元スムーズ表現 (r, V) と冪零な線型写像 $N\colon V \longrightarrow V$（**モノドロミー作用素**と呼ばれる）の組で，任意の $\sigma \in W_K$ に対し $Nr(\sigma) = q^{n(\sigma)}r(\sigma)N$ を満たすもののことである．

注意 3.4
モノドロミー作用素 N の定義は，W_K の作用と可換な線型写像 $N\colon V \longrightarrow V(-1)$ で十分大きな正整数 m に対して $N^m\colon V \longrightarrow V(-m)$ が 0 になるものとされることもある．この 2 つの定義は同型 $\mathbb{Z}_\ell(1) \cong \mathbb{Z}_\ell$ が固定されるごとに自然に同一視することができる．

Weil-Deligne 表現は係数体 Ω に対して代数的な概念である．特に，同型な体（$\mathbb{C}$ と $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ など）上の Weil-Deligne 表現は（体の同型を固定するごとに）同一視することができる．本稿では断りのない限り常に $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の Weil-Deligne 表現を考えるものとする．

Weil-Deligne 表現から次のようにして ℓ 進表現を構成することができる：

定義 3.5
同型 $\mathbb{Z}_\ell(1) \cong \mathbb{Z}_\ell$ を一つ固定する．Weil-Deligne 表現 (r, N) に対し，

$$\rho(\sigma) = r(\sigma)\exp\bigl(t_\ell(\varphi^{-n(\sigma)}\sigma)N\bigr) \quad (\sigma \in W_K)$$

とすることで W_K の ℓ 進表現 ρ が定まる（固定した同型 $\mathbb{Z}_\ell(1) \cong \mathbb{Z}_\ell$ によって t_ℓ を I_K から $\mathbb{Z}_\ell$ への準同型と見ている）．

関手 $(r, N) \longmapsto \rho$ は固定した Frobenius 持ち上げ φ および同型 $\mathbb{Z}_\ell(1) \cong \mathbb{Z}_\ell$ に依存するが，同型類の対応 $(r, N) \longmapsto \rho$ は依存しない．

W_K の全ての ℓ 進表現が Weil-Deligne 表現から上記の方法で得られることを主張するのが Grothendieck のモノドロミー定理である．

定理 3.6（Grothendieck のモノドロミー定理）
定義 3.5 における $(r, N) \longmapsto \rho$ は（$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の）Weil-Deligne 表現の圏と ℓ 進表現の圏との圏同値を誘導する．この関手の準逆を WD と書く．

関手 $(r,N)\longmapsto\rho$ が充満忠実であること，その本質的像が準冪単表現[注 15]となることは容易に分かる．したがって，Grothendieck のモノドロミー定理の本質的な主張は，「G_K の任意の ℓ 進表現は準冪単である」というものである．これは [ST] の付録において証明された．

注意 3.7

i) 上の定理より特に，κ の標数 p と互いに素な素数 ℓ および ℓ' に対し，W_K の（有限次元）ℓ 進表現の圏と W_K の ℓ' 進表現の圏は圏同値になることが分かる．このことは，
   - W_K の n 次元 ℓ 進表現の同型類
   - $\mathrm{GL}_n(K)$ の既約スムーズ表現の同型類（素数 ℓ に依存しない！）

   の間に自然な一対一対応があることを主張する**局所 Langlands 対応**（Harris-Taylor [HT]，Henniart [Hen] により証明された）の反映であると考えることができる．

ii) これに対し，Galois 群 G_K の ℓ 進表現の圏は素数 ℓ に依存する（次の練習を参照）．このため，局所体の場合は Galois 群ではなく Weil 群の ℓ 進表現の方が自然な考察対象であるといえる．

練習 3.8

W_K の ℓ 進表現 ρ が G_K の ℓ 進表現へと延長されるためには，$\rho(\varphi)$ の固有値が ℓ 進単数であることが必要十分である．

練習 3.9

ρ を W_K の ℓ 進表現とし，$\mathrm{WD}(\rho)=(r,N)$ とおく．ρ が冪単であるためには $r|_{I_K}$ が自明であることが必要十分であることを示せ．

このとき，N は次のようにして計算できる：$t_\ell\colon I_K\longrightarrow\mathbb{Z}_\ell(1)\cong\mathbb{Z}_\ell$ で 1 にうつるような元 $\sigma_0\in I_K$ をとると，$N=\log\rho(\sigma_0)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\rho(\sigma_0)-1)^n/n$.

Weil-Deligne 表現を記述するにはどうすればよいだろうか？ 本稿では，以下で導入する Frobenius 半単純な Weil-Deligne 表現のみを考え，その同型類がどのようにして区別できるかを説明する．

定義 3.10

W_F の Weil-Deligne 表現 (r,N) に対し，次は同値である：
- r は半単純表現，すなわち既約表現の直和である．
- $r(\varphi)$ は半単純（対角化可能）な線型写像である．

(r,N) がこの同値な 2 条件を満たすとき，**Frobenius 半単純**な Weil-Deligne 表現

[注 15] G_K の ℓ 進表現 ρ が**準冪単** (quasi-unipotent) であるとは，任意の $\sigma\in I_K$ に対し整数 $m\geq 1$ が存在して $\rho(\sigma)^m-1$ が冪零になることをいう．

であるという．

一般の Weil-Deligne 表現 (r, N) が与えられたとき，それから Frobenius 半単純な Weil-Deligne 表現 (r^{ss}, N) を次のようにして得ることができる：$r(\varphi) = su = us$ を $r(\varphi)$ の Jordan 分解とし（s は半単純，u は冪単），$r^{\mathrm{ss}}(\varphi^n\sigma) = s^n r(\sigma)$ $(\sigma \in I_K)$ とおく（r^{ss} の同型類は φ のとり方によらない）．(r^{ss}, N) を (r, N) の **Frobenius 半単純化**といい，$(r, N)^{F\text{-ss}}$ と書く．また，Weil-Deligne 表現 $(r^{\mathrm{ss}}, 0)$ を $(r, N)^{\mathrm{ss}}$ で表し，(r, N) の**半単純化**という．

では，2 つの Frobenius 半単純な Weil-Deligne 表現 (r, N), (r', N') を比較する方法を紹介しよう．まず，r と r' を比べるためには，それらの指標を比較すればよい：

命題 3.11（[SaT1, Lemma 1 (1)]）

r, r' を W_K の半単純スムーズ表現とし，任意の $\sigma \in W_K^+$ に対し $\mathrm{Tr}\, r(\sigma) = \mathrm{Tr}\, r'(\sigma)$ が成り立っているとする．このとき $r \cong r'$ である．

これを証明するために，少々準備を行う．

補題 3.12

$r\colon W_K \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ を W_K の有限次元スムーズ表現とするとき，次が成り立つ：

i) $r(I_K)$ は有限群である．

ii) 整数 $m \geq 1$ が存在して $r(\varphi^m)\colon V \longrightarrow V$ は W_K の作用と可換になる．

証明　V の基底 $x_1, \ldots, x_n \in V$ をとる．r はスムーズ表現であるから，$\mathrm{Stab}_{I_K}(x_i)$ は I_K の開部分群である．よって F の有限次拡大体 L が存在して $I_K \cap W_L \subset \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Stab}_{I_K}(x_i)$ となる．必要なら L を大きくして F の Galois 拡大とすることで，$H = I_K \cap W_L$ は W_K の正規部分群となるようにできる．H は I_K の指数有限な開部分群であり $\mathrm{Ker}\, r$ に含まれるので，まず $r(I_K)$ は有限群であることが分かる．一方，φ は共役によって I_K/H に作用するが，I_K/H は有限群なので，ある整数 $m > 0$ に対し φ^m は I_K/H に自明に作用する．この m に対し，$r(\varphi^m)\colon V \longrightarrow V$ は W_K の作用と可換であるのでよい（W_K は I_K と φ で生成されることに注意）．■

命題 3.11 の証明　補題 3.12 ii) より，$r(\varphi^m), r'(\varphi^m)$ がともに W_K の作用と可換であるような整数 $m \geq 1$ がとれる．$r(\varphi^m)$ または $r'(\varphi^m)$ の固有値として現れる $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ の元を $a_1, \ldots, a_k$ とおき，r の $r(\varphi^m)$ に関する固有分解を $r = r_1 \oplus \cdots \oplus r_k$ (r_i に $r(\varphi^m)$ が a_i 倍で作用する)，r' の $r'(\varphi^m)$ に関する固有分解を $r' = r'_1 \oplus \cdots \oplus r'_k$ (r'_i に $r'(\varphi^m)$ が a_i 倍で作用する）とおく．多項式 $Q_i(T), P_i(T)$ を $Q_i(T) = (T - a_i)^{-1} \prod_{j=1}^n (T - a_j)$, $P_i(T) = Q_i(a_i)^{-1} Q_i(T)$ で定めると，$P_i(r(\varphi^m))$ は r から r_i への射影子であり，

$P_i(r'(\varphi^m))$ は r' から r'_i への射影子であるから，任意の $\sigma \in W_K^+$ に対し

$$\operatorname{Tr} r_i(\sigma) = \operatorname{Tr}\Big(P_i\big(r(\varphi^m)\big)r(\sigma)\Big) = \operatorname{Tr}\Big(P_i\big(r'(\varphi^m)\big)r'(\sigma)\Big) = \operatorname{Tr} r'_i(\sigma)$$

となる．これより，一般の $\sigma \in W_K$ に対しても，$\varphi^{ml}\sigma \in W_K^+$ となる整数 l をとると $\operatorname{Tr} r_i(\sigma) = a_i^{-l} \operatorname{Tr} r_i(\varphi^{ml}\sigma) = a_i^{-l} \operatorname{Tr} r'_i(\varphi^{ml}\sigma) = \operatorname{Tr} r'_i(\sigma)$ となるので同様の等式が成り立つ．

さて，不分岐指標 $\chi_i \colon W_K \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ を $\varphi \longmapsto a_i^{-1/m}$ で定めると，$\chi_i \otimes r_i$, $\chi_i \otimes r'_i$ は W_K の有限商を経由する．実際，$(\chi_i \otimes r_i)(\varphi^m) = \mathrm{id}$ なので，$(\chi_i \otimes r_i)(W_K)$ の元は $r_i(I_K)$（補題 3.12 よりこれは有限群である）の元と $\chi_i(\varphi^n)$ $(0 \le n \le m-1)$ の積で書くことができる．上で示したことから $\chi_i \otimes r_i$ と $\chi_i \otimes r'_i$ の指標は一致するので，有限群の表現論により $\chi_i \otimes r_i \cong \chi_i \otimes r'_i$ すなわち $r_i \cong r'_i$ が得られる．これよりよい． ∎

次に，2 つの半単純 Weil-Deligne 表現 (r, N), (r', N') において $r \cong r'$ となることが分かったとして，N を比較する方法を考えよう．まず，Weil-Deligne 表現の**重さフィルトレーション**という概念を導入する．

定義 3.13

(r, V) を W_K のスムーズ表現とする．

実数 k に対し，(r, V) が**強い意味で純（重さ k）**(strictly pure of weight k) であるとは，$r(\varphi)$ の固有値が代数的数であり，その全ての共役元の複素絶対値が $q^{k/2}$ であることをいう（この条件は Frobenius 持ち上げ φ のとり方によらない）．

W_K の作用で安定な V の増大フィルトレーション $\{\mathrm{Fil}_i^W\}_{i\in\mathbb{R}}$ が (r, V) の**重さフィルトレーション** (weight filtration) であるとは，任意の $i \in \mathbb{R}$ に対し $\mathrm{gr}_i^W V := \mathrm{Fil}_i^W V/(\bigcup_{j<i} \mathrm{Fil}_j^W V)$ が強い意味で純（重さ i）となることをいう．

重さフィルトレーションは常に存在するとは限らないが，存在すれば一意である．(r, V) が重さフィルトレーションを持つとき，**混** (mixed) であるという．またそのとき，$\mathrm{gr}_i^W \neq 0$ となる $i \in \mathbb{R}$ の集合を (r, V) の**重さ** (weight) と呼ぶ．

Weil-Deligne 表現 (r, V, N) に対しても同様の用語を用いる．例えば，(r, V, N) が混であるとは，(r, V) が混であることをいう．

注意 3.14

Weil-Deligne 表現の定義より $Nr(\varphi) = qr(\varphi)N$ となるので，(r, N, V) が混ならば $N \,\mathrm{Fil}_i^W \subset \mathrm{Fil}_{i-2}^W$ が成り立つ．よって $N\colon \mathrm{gr}_i^W V \longrightarrow \mathrm{gr}_{i-2}^W V$ が自然に誘導される．

注意 3.15

混な表現を考える際には，重さが整数からなるものを考えることがほとんどである．このときには，重さフィルトレーションとして整数で添字付けられたもの $\mathrm{Fil}_\bullet^W = \{\mathrm{Fil}_i^W\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を用いることが多い．

次のような条件を満たす Weil-Deligne 表現のモノドロミー作用素は比較することができる.

定義 3.16
混な Weil-Deligne 表現 (r, N, V) が**純** (pure) であるとは，ある $w \in \mathbb{R}$ があって (r, N, V) の重さが $w + \mathbb{Z}$ に含まれ，任意の整数 $i \geq 0$ に対し $N^i\colon \mathrm{gr}^W_{w+i} V \longrightarrow \mathrm{gr}^W_{w-i} V$ が同型であることをいう．また，このとき w を (r, N, V) の**重さ** (weight) という.

注意 3.17
局所 Langlands 対応によって，純な n 次元 Weil-Deligne 表現は $\mathrm{GL}_n(K)$ の既約な**絶対緩増加表現** (absolutely tempered representation)[注 16] と対応する ([TY, Lemma 1.4 (3)]).

例 3.18
W_K のスムーズ表現 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \oplus \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-1)$ を考える．これは混な表現であり，重さフィルトレーションは次で与えられる：$\mathrm{Fil}^W_{-1} = 0, \mathrm{Fil}^W_0 = \mathrm{Fil}^W_1 = \mathbb{Q}_\ell, \mathrm{Fil}^W_2 = \mathbb{Q}_\ell \oplus \mathbb{Q}_\ell(-1)$. また，その重さは $\{0, 2\}$ である.

$(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \oplus \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-1), 0)$ は混な Weil-Deligne 表現であるが，純ではない．一方，$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと $(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \oplus \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-1), N)$ は純な Weil-Deligne 表現である．この Weil-Deligne 表現は局所 Langlands 対応で $\mathrm{GL}_2(K)$ の Steinberg 表現（の適切な指標による捻り）と対応する.

練習 3.19

i) Weil-Deligne 表現 (r, N) に対し，(r, N) が純であることと $(r, N)^{F\text{-ss}}$ が純であることは同値であることを示せ.
ii) L を K の有限次拡大とし，K 上の Weil-Deligne 表現 (r, N) に対し，その L への制限を $(r|_{W_L}, N)$ で定める（これは ℓ 進表現の制限と整合的である)．このとき，(r, N) が純であることと $(r|_{W_L}, N)$ が純であることは同値であることを示せ.

次の命題より，純な Frobenius 半単純 Weil-Deligne 表現はその半単純化から決定されることが分かる.

命題 3.20（[TY, Lemma 1.4 (4)]）
(r, V, N), (r, V, N') を純な Frobenius 半単純 Weil-Deligne 表現で半単純化が一致するものとする．このとき，$(r, V, N) \cong (r, V, N')$ である.

[注 16] $\mathbb{C}$ の任意の自己同型で捻っても緩増加となる表現のこと.

証明　W_K のスムーズ表現 (r, V) および実数 m に対し，表現 $(r(m), V)$ を $r(m)(\sigma) = q^{-n(\sigma)m} r(\sigma)$ によって定める．必要なら (r, V) を $(r(m), V)$ に置き換えることで，(r, V) の重さは整数であるとしてよい．

まず $V_i = \mathrm{gr}_i^W V$ とおくと，(r, V) は半単純なので W_K の表現として $V \cong \bigoplus_i V_i$ である．よって $V = \bigoplus_i V_i$ としてよい．

このとき，N は $N|_{V_i}\colon V_i \longrightarrow V_{i-2}$ の直和となる．$i \geq 0$ に対し，$N^{i+1}\colon V_i \longrightarrow V_{-i-2}$ の核を P_i とおく．すると，合成 $V_{i+2} \xrightarrow{N} V_i \xrightarrow{N^{i+1}} V_{-i-2}$ が同型であることから，$V_i = NV_{i+2} \oplus P_i$ と直和分解する．したがって $V_i = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{j=0}^{i+2j} N^j P_{i+2j} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{j=0}^{i} N^j P_i$ が得られる（原始分解）．ここで，$0 \leq j \leq i$ に対し $N^j\colon P_i \longrightarrow V_{i-2j}$ は単射である（N^{i-j} を合成すると単射なので）．したがって，$r_i = r|_{P_i}$ とおくと，$\bigoplus_{i,j} N^j\colon \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{j=0}^{i} r_i(j) \longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{j=0}^{i} N^j P_i$ は W_K の表現としての同型を与える．さらに，この同型によって $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{j=0}^{i} r_i(j)$ 上に誘導されるモノドロミー作用素を $r_i(j)$ に制限すると，$0 \leq j < i$ のときは $\mathrm{id}_{P_i}\colon r_i(j) \longrightarrow r_i(j+1)$ となり，$j = i$ のときは 0 となる．同様に，N' に対しても同様に P'_i, r'_i を定めることができ，上と全く同じことが成り立つ．

ここで，P_i も P'_i も V_i から $V_{-i-2}(-i-1)$ への全射 W_K 準同型の核であり，V_i と $V_{-i-2}(-i-1)$ は半単純であるから，$r_i \cong r'_i$ となる．この同型を一つ固定すると，同型 $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{j=0}^{i} r_i(j) \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{j=0}^{i} r'_i(j)$ が得られ，さらにこの同型によって両辺のモノドロミー作用素は対応する．これより $(r, V, N) \cong (r, V, N')$ が得られるのでよい．∎

最後に，これまでの話を W_K の ℓ 進表現の言葉に翻訳しておこう．エタールコホモロジーとして自然に得られるのは Weil-Deligne 表現ではなく ℓ 進表現の方だからである．ρ, ρ' を W_K の ℓ 進表現とする．

- ρ が Frobenius 半単純であるとは，$\mathrm{WD}(\rho)$ が Frobenius 半単純であることをいう．ρ の Frobenius 半単純化 $\rho^{F\text{-ss}}$，半単純化 ρ^{ss} を WD によってそれぞれ $\mathrm{WD}(\rho)^{F\text{-ss}}, \mathrm{WD}(\rho)^{\mathrm{ss}}$ に対応するものとして定義する（同型を除いて自然に定まる）．
- 任意の $\sigma \in W_K^+$ に対し $\mathrm{Tr}\,\rho(\sigma) = \mathrm{Tr}\,\rho'(\sigma)$ ならば $\rho^{\mathrm{ss}} \cong \rho'^{\mathrm{ss}}$ である．（命題 3.11 の言い換え．$\mathrm{WD}(\rho) = (r, N)$ とするとき，$\rho(\sigma)$ と $r(\sigma)$ は冪単自己同型の違いしかないので，$\mathrm{Tr}\,\rho(\sigma) = \mathrm{Tr}\,r(\sigma)$ であることに注意．）
- ρ が強い意味で純であるとは $\mathrm{WD}(\rho)$ が強い意味で純であることをいう．重さフィルトレーション，混，純についても同様に定義する．
- ρ, ρ' が純な Frobenius 半単純 ℓ 進表現であり，$\rho^{\mathrm{ss}} \cong \rho'^{\mathrm{ss}}$ ならば $\rho = \rho'$ である（命題 3.20 の言い換え）．

注意 3.21

ここで導入した重さという概念は，もともと有限体の Galois 表現に対して考察

されたものである：G_κ の（$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の）有限次元表現 (ρ, V) が重さ w であるとは，$\rho(\mathrm{Frob}_v)$ の固有値が代数的数であり，その全ての共役元の複素絶対値が $q^{w/2}$ であることをいう（この用語は 3.3 節で用いる）．これは ρ を G_K の不分岐 ℓ 進表現と同一視し，それを W_K に制限したものが重さ w（あるいは強い意味で重さ w）であることと同値である．

3.2　隣接輪体関手 $R\psi$

$H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への G_K の作用を調べるための一般的な手法として，以下で導入する**隣接輪体関手**を用いるというものがある．O_K の最大不分岐拡大を O_K^{ur} と書き，O_K 上のスキーム Y に対して次のカルテシアンな図式を考えよう：

$$\begin{tikzcd} Y_{\overline{\kappa}} \arrow[r, "\overline{i}"] \arrow[d] & Y_{O_K^{\mathrm{ur}}} \arrow[d] & Y_{\overline{K}} \arrow[l, "\overline{j}"'] \arrow[d] \\ \operatorname{Spec}\overline{\kappa} \arrow[r] & \operatorname{Spec} O_K^{\mathrm{ur}} & \operatorname{Spec}\overline{K}. \arrow[l] \end{tikzcd}$$

定義 3.22（[SGA7, Exposé XIII]）
Y 上のエタール層または ℓ 進層 $\mathcal{F}$ に対し，$R\psi\mathcal{F} = \overline{i}^* R\overline{j}_*(\mathcal{F}|_{Y_{\overline{K}}})$ とおく．これは $Y_{\overline{\kappa}}$ 上のエタール層あるいは ℓ 進層の導来圏の対象である．関手 $R\psi$ を**隣接輪体関手** (nearby cycle functor) と呼ぶ．$R\psi\mathcal{F}$ の i 次コホモロジーを $R^i\psi\mathcal{F}$ と書く．

$R\psi\mathbb{Q}_\ell$ には以下のような意味で G_K が作用する：各 $\sigma \in G_K$ に対し，導来圏の射 $(\overline{\sigma}^*)^* R\psi\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow R\psi\mathbb{Q}_\ell$（$\overline{\sigma}^*$ は $\overline{\sigma} \in G_\kappa$ より誘導される $Y_{\overline{\kappa}}$ の自己同型）が自然に定まり，G_K における積と両立する．特に $R\psi\mathbb{Q}_\ell$ には（通常の意味で）I_K が作用する．

特に Y が X の整モデル $\mathfrak{X}$ である場合（すなわち Y が O_K 上固有である場合）には，次の命題により，$R\psi\mathbb{Q}_\ell$ のコホモロジーは $X_{\overline{K}}$ のコホモロジーと結び付く：

命題 3.23
G_K の作用と可換な同型 $H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, R\psi\mathbb{Q}_\ell) \cong H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ がある．（特に，G_K の作用と可換なスペクトル系列 $E_2^{i,j} = H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, R^j\psi\mathbb{Q}_\ell) \Longrightarrow H^{i+j}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ がある．）

証明　O_K^{ur} は強ヘンゼル局所環であり，自然な構造射 $\mathfrak{X}_{O_K^{\mathrm{ur}}} \longrightarrow \operatorname{Spec} O_K^{\mathrm{ur}}$ は仮定より固有射である．よって，この射に固有底変換定理（特に例 1.45）を適用することで，$H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, R\psi\mathbb{Q}_\ell) = H^i(\mathfrak{X}_{O_K^{\mathrm{ur}}}, R\overline{j}_*\mathbb{Q}_\ell) = H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ を得る．■

この命題より，$H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ を調べるには，$R\psi\mathbb{Q}_\ell$ を計算する，$\mathfrak{X}_\kappa$ の幾何を調べるという 2 つのステップに分けて考えるとよさそうだと想像できる．

3.3 良い還元の場合

まず，$\mathfrak{X}$ が $\mathrm{Spec}\, O_K$ 上滑らかである場合を考える．このような整モデル $\mathfrak{X}$ が存在するとき，X は v において良い還元を持つという．このとき，$R\psi\mathbb{Q}_\ell$ は次のように計算できる：

定理 3.24
$\mathfrak{X}$ が $\mathrm{Spec}\, O_K$ 上滑らかであるとき，$R\psi\mathbb{Q}_\ell = \mathbb{Q}_\ell$ である（すなわち，$R^0\psi\mathbb{Q}_\ell = \mathbb{Q}_\ell$ かつ $R^i\psi\mathbb{Q}_\ell = 0$ $(i \geq 1)$ である）．特に，$R\psi\mathbb{Q}_\ell$ への I_K の作用は自明である．

証明　次の図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}} \arrow[r, "\overline{i}"] \arrow[d, "f"] & \mathfrak{X}_{O_K^{\mathrm{ur}}} \arrow[d, "f"] & X_{\overline{K}} \arrow[l, "\overline{j}"'] \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{Spec}\,\overline{\kappa} \arrow[r, "i"] & \mathrm{Spec}\, O_K^{\mathrm{ur}} & \mathrm{Spec}\,\overline{K}. \arrow[l, "j"']
\end{tikzcd}$$

平滑底変換定理から，$f^*i^*Rj_*\mathbb{Q}_\ell = \overline{i}^* f^*Rj_*\mathbb{Q}_\ell = \overline{i}^* R\overline{j}_* f^*\mathbb{Q}_\ell = R\psi\mathbb{Q}_\ell$ が得られる．また，定理 3.23 を $\mathfrak{X} = \mathrm{Spec}\, O_K$ に対して適用することで $H^m(\mathrm{Spec}\,\overline{\kappa}, i^*Rj_*\mathbb{Q}_\ell) = H^m(\mathrm{Spec}\,\overline{K}, \mathbb{Q}_\ell)$ が得られるが，これは $m = 0$ のとき $\mathbb{Q}_\ell$（I_K の作用は自明）であり，$m \geq 1$ のとき 0 である．よってこれより $i^*Rj_*\mathbb{Q}_\ell = \mathbb{Q}_\ell$, $R\psi\mathbb{Q}_\ell = f^*\mathbb{Q}_\ell = \mathbb{Q}_\ell$ となるのでよい．■

この定理と命題 3.23 より直ちに次の系を得る（これは定理 1.5 i) の拡張となっている）：

系 3.25
$\mathfrak{X}$ が $\mathrm{Spec}\, O_K$ 上滑らかであるとき, G_K の作用と可換な自然な同型 $H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \cong H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell)$ がある．ただし，右辺への G_K の作用は G_κ の $H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への自然な作用から準同型 $G_K \twoheadrightarrow G_\kappa$ によって誘導されるものである．特にこのとき，$H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は不分岐表現である．

さらにこれの系として，$H^i(S_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ はほとんど全ての素点で不分岐であることが分かる：

系 3.26
G_F の ℓ 進表現 $H^i(S_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は有限個の素点の外で不分岐である．

証明　S の整モデル $\mathfrak{S}$ について，$\mathfrak{S} \longrightarrow \mathrm{Spec}\, O_F$ が滑らかであるような $\mathfrak{S}$ の点全体 U は $\mathfrak{S}$ の開集合である．$\mathfrak{S} \longrightarrow \mathrm{Spec}\, O_F$ は固有射であるから，U の補集合の

$\operatorname{Spec} O_F$ における像 W は $\operatorname{Spec} O_F$ の閉集合であり，$(\operatorname{Spec} O_F) \setminus W$ は $\operatorname{Spec} O_F$ の生成点を含むから，W は有限集合である．$\mathfrak{S} \longrightarrow \operatorname{Spec} O_F$ は $(\operatorname{Spec} O_F) \setminus W$ 上で滑らかな射であるから，系 3.25 より，$v \notin W$ ならば $H^i(S_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は v において不分岐であることが分かる．これよりよい． ∎

系 3.25 より，$\mathfrak{X}$ が $\operatorname{Spec} O_K$ 上滑らかである場合に G_K の $H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用を理解するには，G_κ の $H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用を理解すればよい．G_κ は幾何学的 Frobenius 元 $\mathrm{Frob}_v \in G_\kappa$ で位相的に生成されるので，Frob_v の $H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用を記述すればよい．この記述を部分的に与えるのが次の命題である．

命題 3.27
κ の m 次拡大を κ_m と書くと，κ 上固有かつ滑らかなスキーム Y に対し次が成り立つ：

$$\sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \operatorname{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}_v^m; H^i(Y_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell)\bigr) = \#Y(\kappa_m).$$

証明 κ_m を κ に，Y_{κ_m} を Y に置き換えることで $m = 1$ の場合に帰着できる．$\phi_v \colon Y \longrightarrow Y$ を q 乗 Frobenius 射（座標を q 乗する κ 上の射）とすると，Frob_v は $\phi_v^* \colon H^i(Y_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^i(Y_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell)$ と一致することが証明できる[注 17]．ϕ_v の固定点は Y の κ 有理点，すなわち $Y(\kappa)$ の元に他ならず，各固定点における重複度はいずれも 1 である（ϕ_v の微分は 0 であることに注意）．よって，Lefschetz 跡公式から主張が従う． ∎

注意 3.28
この命題は，より一般に $\operatorname{Spec} \kappa$ 上有限型なスキームに対しても成立する ([SGA4$\frac{1}{2}$, Rapport]).

命題 3.27 の**合同ゼータ関数**を用いた言い換えについて簡単に思い出しておこう：

定義 3.29
κ 上有限型なスキーム Y に対し，次で定まる形式的冪級数 $Z(Y, T)$ を Y の**合同ゼータ関数** (congruence zeta function) という（κ_n は κ の n 次拡大体）：

$$Z(Y, T) = \exp\Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\#Y(\kappa_n)}{n} T^n\Bigr).$$

[注 17] つまり，Frob_v の作用は幾何学的な射による引き戻しとして記述することができる．そのため，Frob_v は**幾何学的 Frobenius 元**と呼ばれる．

例 3.30

$Y = \mathbb{P}^1_\kappa$ の場合 $\#\mathbb{P}^1(\kappa_n) = q^n + 1$ であるから，$Z(\mathbb{P}^1_\kappa, T)$ は次のように計算できる：

$$\begin{aligned} Z(\mathbb{P}^1_\kappa, T) &= \exp\Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n T^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n}{n}\Bigr) = \exp\bigl(-\log(1-qT) - \log(1-T)\bigr) \\ &= \frac{1}{(1-T)(1-qT)}. \end{aligned}$$

上の例では合同ゼータ関数は有理式となったが，これは一般的に成立することである．さらに，その有理式の分子・分母に現れる多項式はエタールコホモロジーによる解釈を持つ．

系 3.31（合同ゼータ関数のコホモロジー解釈）

Y を κ 上固有かつ滑らかなスキームとし $P_i(Y,T) = \det(1-\mathrm{Frob}_v T; H^i(Y_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell))$ とおくと，$Z(Y,T) = \prod_{i=0}^{2\dim Y} P_i(Y,T)^{(-1)^{i+1}}$ が成り立つ：

練習 3.32

命題 3.27 から上の系を導け．

命題 3.27 においては，Frob_v の各 H^i への作用の情報が混じった状態で現れている．これを分離するのが有名な **Weil 予想**である．

定理 3.33（Weil 予想／ Deligne の純性定理：[Del2], [Del3]）

Y を κ 上固有かつ滑らかなスキームとし，Frob_v の $H^i(Y_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用の固有値 $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を任意にとる．このとき，α は $\mathbb{Z}$ 上整であり，任意の体同型 $\iota\colon \overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$ に対し $|\iota(\alpha)| = q^{i/2}$ が成り立つ．特に，G_κ の ℓ 進表現 $H^i(Y_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は純（重さ i）である．

Frob_v の $H^i(Y_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用の固有値は $P_i(Y,T)$ の根の逆数をとることによって得られるので，この定理から次が導かれる：

> $P_i(Y,T)$ の根 $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的であり，任意の体同型 $\iota\colon \overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$ に対し $|\iota(\beta)| = q^{-i/2}$ が成り立つ．

これより直ちに次の系が得られる：

系 3.34

κ 上固有かつ滑らかなスキーム Y および相異なる整数 i, j に対し，$P_i(Y,T)$ と $P_j(Y,T)$ は互いに素である．

証明　$P_i(Y,T)$ の根と $P_j(Y,T)$ の根は相異なるのでよい．　∎

この系から，有理式 $\prod_{i=0}^{2\dim Y} P_i(Y,T)^{(-1)^{i+1}}$ において約分は起こらないことが分かる．したがって，$P_i(Y,T)$ および $\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_v^m; H^i(Y_{\overline{\kappa}},\mathbb{Q}_\ell))$ は次のようにして計算できることが分かる：

i) 各 n に対して $\#Y(\kappa_n)$ を計算する．

ii) i) より合同ゼータ関数 $Z(Y,T)$ を計算し，有理式で表す．

iii) $Z(Y,T)$ の分子・分母の根のうち複素絶対値が $q^{-i/2}$ であるものを $\beta_1,\dots,\beta_k$ とすると，$P_i(Y,T)=\prod_{j=1}^k(1-\beta_j^{-1}T)$, $\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_v^m; H^i(Y_{\overline{\kappa}},\mathbb{Q}_\ell))=\beta_1^{-m}+\cdots+\beta_k^{-m}$ となる．

まとめると，$\mathfrak{X}$ が O_K 上滑らかな場合には，各 n に対して $\mathfrak{X}$ の κ_n 有理点の個数を数えれば $\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_v^m; H^i(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell))$ が計算できる．代数体上の場合に言い換えると，S が良い還元を持つような素点 v において $\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_v^m; H^i(S_{\overline{F}},\mathbb{Q}_\ell))$ を求めるには，各 n に対して整モデル $\mathfrak{S}$ の κ_n 有理点の個数を数えればよいということになる．

例 3.35

$\mathbb{F}_3$ 上のアフィン曲線 $Y_0\colon y^2=x^5+1$ を考え，そのコンパクト化として得られる $\mathbb{F}_3$ 上固有かつ滑らかな連結代数曲線を Y とおく．自然な射 $Y_0\longrightarrow\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_3}$; $(x,y)\longmapsto x$ から $f\colon Y\longrightarrow\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_3}$ が誘導され，これは $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_3}$ 上の 5 点または 6 点で分岐する 2 重被覆を与える．さらに Riemann-Hurwitz の公式より f は 6 点で分岐し，Y の種数は 2 であることが分かる．特に f による $\infty\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_3}$ のファイバーは 1 点からなり，その点は $\mathbb{F}_3$ 有理点である．

このとき，$H^1(Y_{\overline{\mathbb{F}}_3},\mathbb{Q}_\ell)$ は 4 次元ベクトル空間である．$P_1(Y,T)$ を計算してみよう．$x\longmapsto x^5+1$ で与えられる写像 $\mathbb{F}_3\longrightarrow\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_9\longrightarrow\mathbb{F}_9$ は全単射であることに注意すると，$\#Y(\mathbb{F}_3)=4$, $\#Y(\mathbb{F}_9)=10$ が容易に分かる（無限遠点の存在に注意）．また，$H^0(Y_{\overline{\mathbb{F}}_3},\mathbb{Q}_\ell)$, $H^2(Y_{\overline{\mathbb{F}}_3},\mathbb{Q}_\ell)$ に Frob_3 はそれぞれ 1 倍，3 倍で作用することに注意すると，$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_3; H^1(Y_{\overline{\mathbb{F}}_3},\mathbb{Q}_\ell))=\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_3^2; H^1(Y_{\overline{\mathbb{F}}_3},\mathbb{Q}_\ell))=0$ が得られる．つまり，Frob_3 の $H^1(Y_{\overline{\mathbb{F}}_3},\mathbb{Q}_\ell)$ における固有値を a, b, c, d とおくと，$a+b+c+d=a^2+b^2+c^2+d^2=0$ である．

一方，$H^1(Y_{\overline{\mathbb{F}}_3},\mathbb{Q}_\ell)$ 上にカップ積から定まる交代双線型形式を $\langle\ ,\ \rangle$ と書くと，Poincaré 双対定理によりこれは非退化であり，$\langle\mathrm{Frob}_3(x),\mathrm{Frob}_3(y)\rangle=3\langle x,y\rangle$ が成り立つ．これより，$\det\mathrm{Frob}_3=9$ すなわち $abcd=9$ が分かる（斜交行列の行列式は 1 であることに注意）．また，再び Poincaré 双対定理より，$\{a,b,c,d\}=\{3/a,3/b,3/c,3/d\}$ も分かる．これより $1/a+1/b+1/c+1/d=0$ となる．

以上より，a, b, c, d は $T^4+9=0$ の 4 解であることが分かり，$P_1(Y,T)=1+9T^4$ が得られる（Weil 予想が成り立っていることも確認できる）．また，

$$\mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}_3^m; H^1(Y_{\overline{\mathbb{F}}_3},\mathbb{Q}_\ell)\bigr)=\begin{cases}0 & (4\nmid m)\\ 4(-9)^{m/4} & (4\mid m)\end{cases}$$

も得られる．

前述の $P_i(Y,T)$, $\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_v^m; H^i(Y_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell))$ の計算法から次の系も得られる：

系 3.36
Y が κ 上固有かつ滑らかなスキームであるとき，$P_i(Y,T)$ は ℓ によらない整数係数多項式である．特に，$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_v^m; H^i(Y_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell))$ は ℓ によらない整数である．

証明　前述の方法から，$P_i(Y,T)$ の根の集合 $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ は ℓ に依存しないことが分かる．よって $P_i(Y,T)$ も ℓ に依存しない．また，$\beta_1, \ldots, \beta_k \in \overline{\mathbb{Q}}$ であり，さらに任意の $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ に対し $\sigma(\beta_j) \in \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ である（定理 3.33 の「任意の ι に対し」という部分に注目）．よって $P_i(Y,T) = \prod_{j=1}^k (1 - \beta_j^{-1} T) \in \overline{\mathbb{Q}}[T]$ は $G_{\mathbb{Q}}$ の作用で不変であるから，$\mathbb{Q}$ 係数多項式である．最後に，定理 3.33 より $\beta_1^{-1}, \ldots, \beta_k^{-1}$ は代数的整数であるから，$P_i(Y,T)$ の係数も代数的整数となり $P_i(Y,T) \in \mathbb{Z}[T]$ が従う．■

系 3.37
$\{H^i(S_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)\}_\ell$ は p の外で弱整合系である[注 18]．すなわち，F の素点からなる有限集合 Σ で全ての無限素点を含むものが存在して次が成り立つ：

　$v \notin \Sigma$ ならば，$v \nmid \ell$ なる任意の ℓ に対し $H^i(S_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell)|_{G_K}$ は不分岐であり，任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対し $\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_v^m; H^i(S_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell))$ は ℓ に依存しない．

以上の議論を代数的対応付きの場合に一般化しよう．γ を X 上の冪等な代数的対応とする．まず，$H^i(X_{\overline{K}}, \gamma, \mathbb{Q}_\ell)$ は $H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の部分表現なので，次が成り立つ：

系 3.38
$H^i(X_{\overline{K}}, \gamma, \mathbb{Q}_\ell)$ は G_K の不分岐表現である．よって，Γ を S 上の冪等な代数的対応とすると，G_F の ℓ 進表現 $H^i(S_{\overline{F}}, \Gamma, \mathbb{Q}_\ell)$ は有限個の素点の外で不分岐である．

さらに，自然な準同型 $\mathrm{CH}_d(\mathfrak{X} \times_{O_K} \mathfrak{X}) \longrightarrow \mathrm{CH}_d(X \times_K X)$ は全射であるから，γ の $\mathfrak{X} \times_{O_K} \mathfrak{X}$ への延長 $\widetilde{\gamma}$ をとることができる（例えば，γ を代表するサイクルの閉包をとればよい）．実は $\widetilde{\gamma}$ の $\mathfrak{X}_\kappa \times_\kappa \mathfrak{X}_\kappa$ への制限は $\widetilde{\gamma}$ のとり方によらない ([Ful, 20.3])．これを $\overline{\gamma} \in \mathrm{CH}_d(\mathfrak{X}_\kappa \times_\kappa \mathfrak{X}_\kappa)$ と書くことにする．このとき次の可換図式がある：

$$\begin{array}{ccc} H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell) & \xrightarrow{\overline{\gamma}^*} & H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) & \xrightarrow{\gamma^*} & H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell). \end{array}$$

注 17 ここでは基本的に [Tay] の用語に従っている．[Tay] における弱整合系の定義では $v \mid \ell$ の場合の条件も課しているので，上の系では「p の外」と書いた．

γ は冪等であったから $\overline{\gamma}$ も冪等であり，G_K の作用と可換な同型 $H^i(X_{\overline{K}}, \gamma, \mathbb{Q}_\ell) \cong H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \overline{\gamma}, \mathbb{Q}_\ell)$ が存在する．したがって，$\sigma \in W_K$ の $H^i(X_{\overline{K}}, \gamma, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用を調べるには，$\mathrm{Frob}_v^{n(\sigma)}$ の $H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \overline{\gamma}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用を調べればよい．

まず，跡の交代和 $\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(\mathrm{Frob}_v^m; H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \overline{\gamma}, \mathbb{Q}_\ell))$（$\overline{\gamma}$ は冪等であったから，これは $\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(\overline{\gamma}^* \circ \mathrm{Frob}_v^m; H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell))$ と一致する）は次の命題によって記述することができる（これは命題 3.27 の拡張であり，証明も同様に行うことができる）．

命題 3.39

$\mathfrak{X}_\kappa$ 上の代数的対応 $\overline{\gamma}^{(m)}$ を $\overline{\gamma}^{(m)} = (\phi_v^m \times \mathrm{id})_* \overline{\gamma}$ で定める（ϕ_v は q 乗 Frobenius 射）．このとき，次が成り立つ：

$$\sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \operatorname{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}_v^m; H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \overline{\gamma}, \mathbb{Q}_\ell)\bigr) = \deg\bigl([\overline{\gamma}^{(m)}] \cap \Delta_X\bigr).$$

この命題は，左辺を $\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(\overline{\gamma}^* \circ \mathrm{Frob}_v^m; H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell))$ に置き換えれば，冪等とは限らない任意の代数的対応 $\overline{\gamma}$ に対して成立する．また，γ が射 $a\colon Z \longrightarrow \mathfrak{X}_\kappa \times_\kappa \mathfrak{X}_\kappa$ によって与えられる場合，上の等式の右辺は，Z の点 z で $\phi_v^m(a_1(z)) = a_2(z)$ を満たすものの「重複度込みの個数」を表していると解釈できる．

系 3.36，系 3.37 の類似としては次が成り立つ：

系 3.40

$\det(1 - \mathrm{Frob}_v T; H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \overline{\gamma}, \mathbb{Q}_\ell))$ は ℓ によらない整数係数多項式である．特に，$\operatorname{Tr}(\mathrm{Frob}_v^m; H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \overline{\gamma}, \mathbb{Q}_\ell))$ は ℓ によらない整数である．したがって，Γ を S 上の冪等な代数的対応とすると，$\{H^i(S_{\overline{F}}, \Gamma, \mathbb{Q}_\ell)\}_\ell$ は弱整合系である．

証明　まず，整数 $m \geq 0$ に対して $\operatorname{Tr}(\mathrm{Frob}_v^m; H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \overline{\gamma}, \mathbb{Q}_\ell))$ が ℓ に依存しない有理数であることを示す．系 3.34 より，$Q(T) = c_0 + c_1 T + \cdots + c_n T^n \in \mathbb{Q}[T]$ を $Q(T) \equiv 1 \pmod{P_i(\mathfrak{X}_\kappa, T)}$, $Q(T) \equiv 0 \pmod{P_j(\mathfrak{X}_\kappa, T)}$ $(j \neq i)$ となるようにとることができる．このとき，$Q(\mathrm{Frob}_v)$ は $H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell)$ 上で id，$H^j(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell)$ $(j \neq i)$ 上で 0 であるから，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}_v^m; H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \overline{\gamma}, \mathbb{Q}_\ell)\bigr) &= \operatorname{Tr}\bigl(\overline{\gamma}^* \circ \mathrm{Frob}_v^m; H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell)\bigr) \\
&= \sum_j (-1)^j \operatorname{Tr}\bigl(\overline{\gamma}^* \circ \mathrm{Frob}_v^m Q(\mathrm{Frob}_v); H^j(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell)\bigr) \\
&= \sum_{l=0}^{n} \sum_j c_l (-1)^j \operatorname{Tr}\bigl(\overline{\gamma}^* \circ \mathrm{Frob}_v^{m+l}; H^j(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell)\bigr) \\
&= \sum_{l=0}^{n} \sum_j c_l (-1)^j \operatorname{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}_v^{m+l}; H^j(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \overline{\gamma}, \mathbb{Q}_\ell)\bigr)
\end{aligned}$$

となり，命題 3.39 からこれは ℓ に依存しない有理数であることが分かる．

このことから，代数的対応 $\overline{\gamma}$ に依存しない整数 $c \geq 1$ が存在して，$\det(1 - \mathrm{Frob}_v T; H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \overline{\gamma}, \mathbb{Q}_\ell))$ の係数の c 倍は整数となることが分かる．よって，$\overline{\gamma}$ をその合成に置き換える議論を行うことで $\det(1 - \mathrm{Frob}_v T; H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, \overline{\gamma}, \mathbb{Q}_\ell)) \in \mathbb{Z}[T]$ を導くことができる．詳細は [Kle] を参照されたい． ∎

注意 3.41

体 k 上固有かつ滑らかなスキーム Y および整数 $i \geq 0$ に対し，$H^i(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ には id で，$H^j(Y_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ $(j \neq i)$ には 0 で作用するような代数的対応を i 次の **Künneth 射影子** (Künneth projector) と呼ぶ．上の命題の証明中では，k が有限体であるときに任意の i に対して Künneth 射影子が存在することが示されている（$Q(\phi_v)$ がそうである）．k が有限体でない場合にも Künneth 射影子の存在が予想されているが，Y が 2 次元以下であるときなどいくつかの特別な場合を除いて証明されていない．

このように理論的な主張を証明するには命題 3.39 は便利であるが，具体的な場合には適用しづらいことが多い．特に志村多様体などのモジュライ空間として与えられるスキームにおいては，重複度込みで点の個数を数えるのが困難であるからである．そこで，a_2 がエタールであるような射 $a\colon Z \longrightarrow \mathfrak{X}_\kappa \times_\kappa \mathfrak{X}_\kappa$（$Z$ は κ 上固有な純 d 次元スキーム）によって γ が与えられる場合に限り，集合論的な点の個数を数えるだけで跡の交代和を求めることができる等式を紹介しよう．

定理 3.42（藤原の跡公式の特別な場合：[Fuj], [Var]）

Z を κ 上固有な純 d 次元スキームとし，$a\colon Z \longrightarrow \mathfrak{X}_\kappa \times_\kappa \mathfrak{X}_\kappa$ を κ 上の射とする．$a_2 = \mathrm{pr}_2 \circ a$ はエタールであると仮定する．このとき，任意の整数 $m \geq 1$ に対して次が成り立つ：

$$\sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \operatorname{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}_v^m; H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, [a], \mathbb{Q}_\ell)\bigr) = \#\bigl\{z \in Z(\overline{\kappa}) \bigm| \phi_v^m(a_1(z)) = a_2(z)\bigr\}.$$

注意 3.43

$m \geq 1$ に対して $\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(\mathrm{Frob}_v^m; H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, [a], \mathbb{Q}_\ell))$ が求まれば，任意の m に対する $\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(\mathrm{Frob}_v^m; H^i(\mathfrak{X}_{\overline{\kappa}}, [a], \mathbb{Q}_\ell))$ も決まる．

注意 3.44

藤原の跡公式は上の定理よりはるかに一般的な公式であり，$\mathfrak{X}_\kappa$ が κ 上固有でも滑らかでもない場合，さらに係数層がある場合にも（m を十分大きくすれば）適用可能である．実際，[HT] や [Laf] においてはそのような場合の結果が使われた．

例 3.45

$\mathbb{F}_7$ 上の 3 次射影曲線 $C\colon X^3+Y^3=Z^3$ を考える．これは種数 1 の代数曲線なので，$H^1(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\mathbb{Q}_\ell)$ は 2 次元ベクトル空間である．C には $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ が $a[X:Y:Z]=[2^aX:Y:Z]$ で作用するので，$H^i(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\mathbb{Q}_\ell)$ にも $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ が作用する．各 $a\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Tr}(a^*\circ\mathrm{Frob}_7;H^1(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\mathbb{Q}_\ell))$ を計算しよう．定理 3.42 より，$[(2^aX)^7:Y^7:Z^7]=[X:Y:Z]$ となる $[X:Y:Z]\in\mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{F}}_7)$ の個数を数えれば $\sum_{i=0}^2(-1)^i\,\mathrm{Tr}(a^*\circ\mathrm{Frob}_7;H^i(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\mathbb{Q}_\ell))$ が求まる．これは $a=0$ のとき 9, $a=1$ のとき 12，$a=-1$ のとき 3 となる．一方，a^* は $H^0(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\mathbb{Q}_\ell)$, $H^2(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\mathbb{Q}_\ell)$ 上恒等写像なので，$\mathrm{Tr}(a^*\circ\mathrm{Frob}_7;H^0(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\mathbb{Q}_\ell))=1$, $\mathrm{Tr}(a^*\circ\mathrm{Frob}_7;H^2(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\mathbb{Q}_\ell))=7$ である．以上より，$\mathrm{Tr}(a^*\circ\mathrm{Frob}_7;H^1(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\mathbb{Q}_\ell))$ は $a=0$ のとき -1，$a=1$ のとき -4, $a=-1$ のとき 5 となることが分かる．

さて，簡単のため $\mathbb{Q}_\ell$ が 1 の原始 3 乗根 ω を含むとしよう（これは $\ell-1$ が 3 の倍数であることと同値である）．$\chi\colon\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Q}_\ell^\times$ を $\chi(a)=\omega^a$ で定め，$i=0,1,2$ に対し代数的対応 $\gamma_i=(1/3)\sum_{a\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}\chi(a)^{-i}[a]$ を考える．これらは冪等であり，$H^1(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\mathbb{Q}_\ell)$ に作用する．さらに，$H^1(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\mathbb{Q}_\ell)=\bigoplus_{i=0}^2H^1(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\gamma_i,\mathbb{Q}_\ell)$ であり，$H^1(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\gamma_i,\mathbb{Q}_\ell)$ は $H^1(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\mathbb{Q}_\ell)$ のうち $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ が χ^i を経由して作用する部分となることが分かる．上の計算結果から，

$$\mathrm{Tr}\big(\mathrm{Frob}_7;H^1(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\gamma_1,\mathbb{Q}_\ell)\big)=1+3\omega,\ \mathrm{Tr}\big(\mathrm{Frob}_7;H^1(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\gamma_2,\mathbb{Q}_\ell)\big)=1+3\omega^2$$

であるから，特に $H^1(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\gamma_i,\mathbb{Q}_\ell)\neq 0$ $(i=1,2)$ であり，$H^1(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\gamma_0,\mathbb{Q}_\ell)=0$, $\dim_{\mathbb{Q}_\ell}H^1(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\gamma_1,\mathbb{Q}_\ell)=\dim_{\mathbb{Q}_\ell}H^1(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\gamma_1,\mathbb{Q}_\ell)=1$ が分かる．したがって，Frob_7 は $H^1(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\gamma_1,\mathbb{Q}_\ell)$, $H^1(C_{\overline{\mathbb{F}}_7},\gamma_2,\mathbb{Q}_\ell)$ にそれぞれ $1+3\omega$ 倍，$1+3\omega^2$ 倍で作用する．

注意 3.46

Weil 予想の Galois 表現への応用としては，本小節で強調したもの（各次数のコホモロジーへの寄与を分離すること）以外に，Ramanujan 予想の解決が挙げられる．これは，保型表現に伴う Galois 表現をエタールコホモロジーを用いて構成し Weil 予想を適用することで，保型表現側でも Weil 予想と類似した結果が導かれるというものである．例えば，Ramanujan の Δ 関数 $\Delta(q)=q\prod_{n=1}^\infty(1-q^n)^{24}=\sum_{n=1}^\infty\tau(n)q^n$ に伴う $G_\mathbb{Q}$ の ℓ 進表現 ρ_Δ（これは任意の素数 $p\neq\ell$ で不分岐であり，$\det(1-\mathrm{Frob}_pT;\rho_\Delta)=1-\tau(p)T+p^{11}T^2$ を満たす）は $\mathbb{Q}$ 上固有かつ滑らかで任意の素数において良い還元を持つような 11 次元スキーム（**久賀・佐藤多様体**と呼ばれる）の 11 次コホモロジーを代数的対応（Hecke 対応）で切り取って得られる ([Del1], [Sch1]) ので，Weil 予想を用いることで $1-\tau(p)T+p^{11}T^2$ の根の複素絶対値は $p^{-11/2}$ であることが分かる．特に，$\tau(p)$ の絶対値の評価 $|\tau(p)|\leq 2p^{11/2}$ が得られる．

3.4 半安定還元の場合

次に，$\mathfrak{X} \longrightarrow \operatorname{Spec} O_K$ が滑らかではないが比較的穏やかな特異性を持つ場合を考える．

定義 3.47
O_K 上有限型なスキーム Y が**半安定** (semistable) であるとは，任意の $y \in Y$ に対して整数 $0 \le r \le n$，O_K の素元 ϖ，y のエタール近傍[注19] $Y' \longrightarrow Y$ およびエタール射 $Y' \longrightarrow \operatorname{Spec} O_K[T_1, \ldots, T_n]/(T_1 \cdots T_r - \varpi)$ が存在することをいう．
さらに Y_κ の任意の既約成分が κ 上滑らかであるとき，Y は**強半安定** (strictly semistable) であるという．

注意 3.48

i) O_K 上半安定なスキームは特に O_K 上平坦な正則スキームであり，その特殊ファイバー Y_κ は被約である．
ii) Y が O_K 上強半安定であることは次と同値である：任意の $y \in Y$ に対して整数 $0 \le r \le n$，O_K の素元 ϖ，y の Zariski 開近傍 $Y' \subset Y$ およびエタール射 $Y' \longrightarrow \operatorname{Spec} O_K[T_1, \ldots, T_n]/(T_1 \cdots T_r - \varpi)$ が存在する．

$\mathfrak{X}$ が半安定になるような整モデル $\mathfrak{X}$（半安定モデルという）が存在するとき，X は半安定還元を持つという．このとき，Galois 表現について一般に次のようなことがいえる（これは 1.5 ii) の拡張となっている）．

定理 3.49
$\mathfrak{X}$ が半安定スキームであるとき，$H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は G_K の冪単表現（特に馴分岐表現）である．

これを証明する前に，まず次のことに注意しておこう：V を G_K の ℓ 進表現とし，$W \subset V$ を G_K 安定な部分空間とするとき，V が冪単表現であることは $W, V/W$ が冪単表現であることと同値である．このことと命題 3.23 から，定理 3.49 を証明するためには I_K の $R^i\psi\mathbb{Q}_\ell$ への作用が冪単であることを示せばよい．よって，定理 3.49 は次に帰着される：

命題 3.50
$\mathfrak{X}$ が半安定スキームであるとき，ある整数 $N \ge 1$ が存在して，任意の $\sigma \in I_K$ および $x \in \mathfrak{X}_\kappa$ に対し，$(\sigma - 1)^N$ は茎 $(R^i\psi\mathbb{Q}_\ell)_{\overline{x}}$ に 0 で作用する．

略証 $(R^i\psi\mathbb{Q}_\ell)_{\overline{x}}$ は x のエタール近傍のみによって決まるから，各整数 $0 \le r \le n$

[注18] 像が y を含むエタール射のこと．

に対しある整数 $N>0$ が存在して，$\operatorname{Spec} O_K[T_1,\dots,T_n]/(T_1\cdots T_r-\varpi)$（あるいはそれと同型なエタール近傍を持つ O_K スキーム）の $R^i\psi\mathbb{Q}_\ell$ の原点における茎に $(\sigma-1)^N$ が 0 で作用することを示せばよい．

まず $\operatorname{Spec} O_K[T_1,\dots,T_n]/(T_1\cdots T_r-\varpi) \longrightarrow \operatorname{Spec} O_K[T_1,\dots,T_r]/(T_1\cdots T_r-\varpi)$ は滑らかな射であるから，平滑底変換定理から前者の $R^i\psi$ は後者の $R^i\psi$ の逆像と一致することに注意する．これより $n=r$ の場合に考えれば十分である．

ここでは，$n=r=2$ の場合を考える．$\mathbb{P}^1_{O_K}$ を特殊ファイバー $\mathbb{P}^1_\kappa$ の原点においてブローアップして得られる O_K スキームを Y と書くと，Y は半安定スキームであり，一点 $y\in Y_\kappa$ の外で O_K 上滑らかである．さらに，$y\in Y$ におけるエタール近傍は $\operatorname{Spec} O_K[T_1,T_2]/(T_1T_2-\varpi)$ と同じ形をしている．よって $(R^i\psi_Y\mathbb{Q}_\ell)_{\overline{y}}$（$Y$ に関する $R\psi$ を $R\psi_Y$ と書いた）への I_K の作用を考えればよい．まず，$U=Y_\kappa\setminus\{y\}$ とおくと，I_K の作用と可換な完全系列

$$H^i(Y_{\overline{\kappa}},R\psi\mathbb{Q}_\ell)\longrightarrow (R^i\psi\mathbb{Q}_\ell)_{\overline{y}}\longrightarrow H^{i+1}_c(U_{\overline{\kappa}},R\psi\mathbb{Q}_\ell)$$

が存在する．Y の一般ファイバーは $\mathbb{P}^1_K$ と同型なので $H^i(Y_{\overline{\kappa}},R\psi\mathbb{Q}_\ell)=H^i(Y_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell)$ への I_K の作用は自明である（系 3.25）．また U は O_K 上滑らかであるから，定理 3.24 より $H^{i+1}_c(U_{\overline{\kappa}},R\psi\mathbb{Q}_\ell)\cong H^{i+1}_c(U_{\overline{\kappa}},\mathbb{Q}_\ell)$ となり[注 20]，これには I_K は自明に作用する．以上より $(\sigma-1)^2$ $(\sigma\in I_K)$ は $(R^i\psi\mathbb{Q}_\ell)_{\overline{y}}$ に 0 で作用する．

一般の場合には，$n=r$ に対する帰納法で証明する．詳細は省略するが，半安定スキーム $\operatorname{Spec} O_K[T_1,\dots,T_n]/(T_1\cdots T_{n-1}-\varpi)$（これには帰納法の仮定が適用できる）をイデアル (T_1,T_n)（これは ϖ を含むイデアルである）に沿ってブローアップすると，再び半安定となり，エタール近傍が $\operatorname{Spec} O_K[T_1,\dots,T_n]/(T_1\cdots T_n-\varpi)$ と同じ形をしている閉点が一つだけ現れる（他の点に対しては帰納法の仮定が適用できる）．また，ブローアップ前後で一般ファイバーは変わらない．これに対して上と同じような議論を行えばよい（有限型 O_K スキーム Y に対して，$j>2\dim Y_\kappa$ あるいは $i>\dim Y_K$ のとき $H^j(Y_{\overline{\kappa}},R^i\psi\mathbb{Q}_\ell)=0$ であることを用いるとよい）． ∎

なお，定理 3.49 は最初に [RZ] において証明された（方針は上の証明と大きく異なる）．ここで紹介したのは斎藤毅氏によって考案された方法である．

注意 3.51

実は，$\mathfrak{X}$ が半安定であるとき，$R^i\psi\mathbb{Q}_\ell$ への I_K の作用は自明であることが証明できる．しかし，その証明の途中で $R^i\psi\mathbb{Q}_\ell$ への P_K（K の暴惰性群）の作用が自明であることを用いるので，結局上記の証明にあたることを行わなくてはならない．

なお，導来圏の対象 $R\psi\mathbb{Q}_\ell$ への I_K の作用は自明ではない（P_K 上自明であることは証明できる）．

[注 20] 定理 3.24 は話の流れの関係で $\mathfrak{X}$ に対して述べているが，証明を見れば分かるように，O_K 上固有でない滑らかなスキームに対しても成立する．

以下では $\mathfrak{X}$ が強半安定であると仮定する．定理 3.49 から I_K の $H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用は冪単であるが，不分岐であるとは限らないので，$H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の Frobenius 半単純化を記述するには次の 2 つを記述する必要がある：

- $\sigma \in W_K^+$ に対する $\mathrm{Tr}(\sigma; H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$.
- $N = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(\sigma_0 - 1)^n / n$（$\sigma_0$ は $t_\ell(\sigma_0)$ が $\mathbb{Z}_\ell(1)$ の位相的生成元となるような I_K の元．練習 3.9 参照）.

これらをともに記述するのが，次に紹介する**重さスペクトル系列**である．$\mathfrak{X}_\kappa$ の既約成分を $D_1, \ldots, D_m$ とおき，$\{1, \ldots, m\}$ の部分集合 I に対して $D_I = \bigcap_{i \in I} D_i$ とおく．さらに，整数 j に対し $D^{(j)} = \coprod_{\# I = j+1} D_I$ とおく．

定理 3.52（**[RZ], [SaT2]**）

$\mathfrak{X}$ が強半安定であるとき，G_K 同変な以下のスペクトル系列がある：

$$E_1^{s,t} = \bigoplus_{i \geq \max\{0, -s\}} H^{t-2i}\big(D_{\overline{\kappa}}^{(s+2i)}, \mathbb{Q}_\ell(-i)\big) \Longrightarrow H^{s+t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell).$$

これを**重さスペクトル系列** (weight spectral sequence) と呼ぶ．さらに，次のスペクトル系列の射がある（収束先の射は $\sigma_0 - 1$ でも N でもどちらでもよい）：

$$\begin{array}{ccc}
E_1^{s,t} = \bigoplus_{i \geq \max\{0,-s\}} H^{t-2i}\big(D_{\overline{\kappa}}^{(s+2i)}, \mathbb{Q}_\ell(-i)\big) & \Longrightarrow & H^{s+t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes t_\ell(\sigma_0)} & & {\scriptstyle \sigma_0 - 1}\Big\downarrow{\scriptstyle N} \\
E_1^{s+2,t-2} = \bigoplus_{i \geq \max\{1,-s-1\}} H^{t-2i}\big(D_{\overline{\kappa}}^{(s+2i)}, \mathbb{Q}_\ell(-i+1)\big) & \Longrightarrow & H^{s+t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell).
\end{array}$$

X は純 d 次元であったので $D^{(s+2i)}$ の次元は $d - s - 2i$ であるから，$E_1^{s,t} \neq 0$ ならば $0 \leq t - 2i \leq 2(d - s - 2i)$ となる $i \geq \max\{0, -s\}$ が存在する．これより，$E_1^{s,t} \neq 0$ となる (s,t) は $0 \leq 2s + t \leq 2d$ および $0 \leq t \leq 2d$ を満たすことが分かる．

$d = 2$ の場合の重さスペクトル系列の E_1 項を下に示す（係数 $\mathbb{Q}_\ell$ は省略した）：

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^0(D_{\overline{\kappa}}^{(2)})(-2) & \xrightarrow{\mathrm{Gys}} & H^2(D_{\overline{\kappa}}^{(1)})(-1) & \xrightarrow{\mathrm{Gys}} & H^4(D_{\overline{\kappa}}^{(0)}) & & & & \\
 & & H^1(D_{\overline{\kappa}}^{(1)})(-1) & \xrightarrow{\mathrm{Gys}} & H^3(D_{\overline{\kappa}}^{(0)}) & & & & \\
 & & H^0(D_{\overline{\kappa}}^{(1)})(-1) & \underset{\mathrm{Res}}{\overset{\mathrm{Gys}}{\longrightarrow}} & \begin{array}{c} {\scriptstyle H^2(D_{\overline{\kappa}}^{(0)}) \oplus} \\ {\scriptstyle H^0(D_{\overline{\kappa}}^{(2)})(-1)} \end{array} & \underset{\mathrm{Gys}}{\overset{\mathrm{Res}}{\longrightarrow}} & H^2(D_{\overline{\kappa}}^{(1)}) & & \\
 & & & & H^1(D_{\overline{\kappa}}^{(0)}) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & H^1(D_{\overline{\kappa}}^{(1)}) & & \\
 & & & & H^0(D_{\overline{\kappa}}^{(0)}) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & H^0(D_{\overline{\kappa}}^{(1)}) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & H^0(D_{\overline{\kappa}}^{(2)})
\end{array}$$

中央縦列が $s = 0$ の部分，下横列が $t = 0$ の部分である．Res と書かれた矢印は自然な引き戻しの ± 1 倍を組み合わせたものであり，Gys と書かれた矢印は Gysin 準

同型（引き戻しの Poincaré 双対）の ± 1 倍を組み合わせたものである．
重さスペクトル系列の性質として，次を挙げておく：

命題 3.53

i) 重さスペクトル系列によって収束先 $H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ に定まるフィルトレーション $\mathrm{Fil}^W_\bullet$ は $H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の重さフィルトレーションを与える．特に，$H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は混な ℓ 進表現である．

ii) 重さスペクトル系列は E_2 退化する．

証明　Weil 予想より，G_κ の表現 $E_1^{s,t}$ は純（重さ t）である（Tate 捻りは重さを 2 下げることに注意）．$\mathrm{Fil}^W_t / \mathrm{Fil}^W_{t-1}$ は $E_1^{i-t,t}$ の部分商なので，G_K の表現として強い意味で純（重さ t）である．したがって $\mathrm{Fil}^W_\bullet$ は重さフィルトレーションであり，i) が示された．

ii) を示すには，$d_2\colon E_2^{s,t} \longrightarrow E_2^{s+2,t-1}$ が 0 であることを示せばよい．これは $E_2^{s,t}$ と $E_2^{s+2,t-1}$ がともに G_κ の表現として純であり，異なる重さを持つことから明らかである． ∎

また，重さスペクトル系列から次が分かる：

系 3.54

i) $\sigma \in W_K^+$ に対し，$\sum_{i=0}^{2d}(-1)^i \operatorname{Tr}(\sigma; H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$ は ℓ に依存しない整数である．

ii) $\sigma \in I_K$ に対し，$(\sigma - 1)^{d+1}$ は $H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ に 0 で作用する．（実はこの性質は $\mathfrak{X}$ が半安定であるという仮定のみから従う．）

証明　i) を示す．重さスペクトル系列は G_K 同変であるから，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{2d}(-1)^i \operatorname{Tr}\bigl(\sigma; H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)\bigr) \\
&\qquad = \sum_{s,t} \sum_{i \geq \max\{0,-s\}} (-1)^{s+t} \operatorname{Tr}\bigl(\overline{\sigma}; H^{t-2i}(D^{(s+2i)}_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell(-i))\bigr) \\
&\qquad = \sum_{s} \sum_{i \geq \max\{0,-s\}} (-1)^s q^{n(\sigma)i} \sum_t (-1)^{t-2i} \operatorname{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}_v^{n(\sigma)}; H^{t-2i}(D^{(s+2i)}_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_\ell)\bigr)
\end{aligned}
$$

が得られる．系 3.36 より右辺は ℓ に依存しない整数なのでよい．

ii) を示す．定理 3.49 より I_K の作用は t_ℓ を経由するので，$\sigma = \sigma_0$ としてよい．定理 3.52 より，$\sigma_0 - 1$ は Fil^W_i を Fil^W_{i-2} にうつす．これと $\mathrm{Fil}^W_{-1} = 0$, $\mathrm{Fil}^W_{2d} = H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ より，$(\sigma_0 - 1)^{d+1}(H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)) \subset \mathrm{Fil}^W_{-2} = 0$ となるのでよい． ∎

例 3.55

E を Weierstrass 方程式 $y^2 = x^3 + x^2 + 25$ で与えられる $\mathbb{Q}_5$ 上の楕円曲線とする．1 次コホモロジー $H^1(E_{\overline{\mathbb{Q}}_5}, \mathbb{Q}_\ell)$ への $W_{\mathbb{Q}_5}$ の作用を考えよう．$\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}_5}$ の 3 次曲線 $\mathcal{E}\colon Y^2Z = X^3 + X^2Z + 25Z^3$ は E の整モデルを与えるが，それは強半安定ではない．$\mathcal{E}$ をイデアル $(x, y, 5)$ で定まる（$\mathbb{Z}_5$ 上のアフィン曲線 $y^2 = x^3 + x^2 + 25$ の）閉部分スキームに沿ってブローアップして得られる $\mathbb{Z}_5$ スキーム $\widetilde{\mathcal{E}}$ は E の強半安定モデルを与える．その特殊ファイバー $\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathbb{F}_5}$ は 2 つの既約成分 D_1, D_2 を持ち，それらはともに $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_5}$ と同型である．$D_1 \cap D_2$ は 2 つの $\mathbb{F}_5$ 有理点からなる．$\widetilde{\mathcal{E}}$ の重さスペクトル系列の E_1 項は

$$\begin{array}{ccc} E_1^{2,-1} & E_1^{2,0} & \\ & E_1^{1,0} & \\ & E_1^{0,0} & E_1^{0,1} \end{array}$$

という 5 項しか残らないが，これらは次のように計算できる：

$$\begin{aligned}
E_1^{2,-1} &= H^0(D_{1,\overline{\mathbb{F}}_5} \cap D_{2,\overline{\mathbb{F}}_5})(-1) = \mathbb{Q}_\ell(-1)^2, \\
E_1^{2,0} &= H^2(D_{1,\overline{\mathbb{F}}_5}) \oplus H^2(D_{2,\overline{\mathbb{F}}_5}) = \mathbb{Q}_\ell(-1)^2, \\
E_1^{1,0} &= 0, \\
E_1^{0,0} &= H^0(D_{1,\overline{\mathbb{F}}_5}) \oplus H^0(D_{2,\overline{\mathbb{F}}_5}) = \mathbb{Q}_\ell^2, \\
E_1^{0,1} &= H^0(D_{1,\overline{\mathbb{F}}_5} \cap D_{2,\overline{\mathbb{F}}_5}) = \mathbb{Q}_\ell^2.
\end{aligned}$$

この計算から $\sigma \in W_{\mathbb{Q}_5}$ は $E_1^{2,-1}$ と $E_1^{2,0}$ には $5^{n(\sigma)}$ 倍で，$E_1^{0,0}$ と $E_1^{0,1}$ には 1 倍で作用することが分かるので，$\sum_{i=0}^{2}(-1)^i \operatorname{Tr}(\sigma; H^i(E_{\overline{\mathbb{Q}}_5}, \mathbb{Q}_\ell)) = 0$ が得られる．$H^0(E_{\overline{\mathbb{Q}}_5}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathbb{Q}_\ell$, $H^2(E_{\overline{\mathbb{Q}}_5}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathbb{Q}_\ell(-1)$ より，$\operatorname{Tr}(\sigma; H^1(E_{\overline{\mathbb{Q}}_5}, \mathbb{Q}_\ell)) = 1 + 5^{n(\sigma)}$ が従う．さらに，$\det(\sigma; H^1(E_{\overline{\mathbb{Q}}_5}, \mathbb{Q}_\ell)) = ((1 + 5^{n(\sigma)})^2 - (1 + 5^{2n(\sigma)}))/2 = 5^{n(\sigma)}$ と求まるので，σ の $H^1(E_{\overline{\mathbb{Q}}_5}, \mathbb{Q}_\ell)$ における固有値は 1 と $5^{n(\sigma)}$ であることも分かる．特に $H^1(E_{\overline{\mathbb{Q}}_5}, \mathbb{Q}_\ell)$ は Frobenius 半単純であり，$\mathrm{WD}(H^1(E_{\overline{\mathbb{Q}}_5}, \mathbb{Q}_\ell))^{\mathrm{ss}} \cong \mathbb{Q}_\ell \oplus \mathbb{Q}_\ell(-1)$ である．

次に，モノドロミー作用素 N がどうなるかを考える．このために，重さスペクトル系列の E_2 項を計算しよう．$\mathrm{pt} \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_5}$ に対して Gysin 準同型 $H^0(\mathrm{pt}) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}}_5})$ は同型であることに注意すると，$d_1\colon E_1^{2,-1} \longrightarrow E_1^{2,0}$ は $(a, b) \longmapsto (-a - b, a + b)$ $(a, b \in \mathbb{Q}_\ell(-1))$ で与えられ，$d_1\colon E_1^{0,0} \longrightarrow E_1^{0,1}$ は $(a, b) \longmapsto (-a + b, -a + b)$ $(a, b \in \mathbb{Q}_\ell)$ で与えられることが分かる（符号についてはここでは触れない）．これと命題 3.53 より，

$$\begin{aligned}
\mathrm{gr}_2^W H^1(E_{\overline{\mathbb{Q}}_5}, \mathbb{Q}_\ell) &= E_2^{2,-1} = \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{Q}_\ell(-1)\} \cong \mathbb{Q}_\ell(-1), \\
\mathrm{gr}_0^W H^1(E_{\overline{\mathbb{Q}}_5}, \mathbb{Q}_\ell) &= E_2^{0,1} = \mathbb{Q}_\ell^2/\{(b, b) \mid b \in \mathbb{Q}_\ell\} \cong \mathbb{Q}_\ell, \\
\mathrm{gr}_i^W H^1(E_{\overline{\mathbb{Q}}_5}, \mathbb{Q}_\ell) &= 0 \ (i \neq 0, 2)
\end{aligned}$$

が得られる．また，定理 3.52 の後半より，$N\colon \mathrm{gr}_2^W \longrightarrow \mathrm{gr}_0^W$ は上の同一視のもとで $(a,-a) \longmapsto (t_\ell(\sigma_0)a, -t_\ell(\sigma_0)a)$ と記述できることも分かる．これより $N\colon \mathrm{gr}_2^W \longrightarrow \mathrm{gr}_0^W$ は同型であることがいえる．

以上より，$W_{\mathbb{Q}_5}$ の ℓ 進表現 $H^1(E_{\overline{\mathbb{Q}}_5}, \mathbb{Q}_\ell)$ の Weil-Deligne 表現による完全な記述が得られる：$\mathrm{WD}(H^1(E_{\overline{\mathbb{Q}}_5}, \mathbb{Q}_\ell)) \cong \left(\mathbb{Q}_\ell \oplus \mathbb{Q}_\ell(-1), \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

この例から分かるように，重さスペクトル系列はモノドロミー作用素 N を調べる際にも有力な手段を提供する（本来はむしろそちらの目的で導入されたものである）．これについては 3.6 節でより詳しく説明する（上の例において得た「$N\colon \mathrm{gr}_2^W \longrightarrow \mathrm{gr}_0^W$ が同型」という結果は，3.6 節で述べるウェイト・モノドロミー予想の特別な場合となっている）．

重さスペクトル系列の構成について簡単に紹介しておこう．重さスペクトル系列は [RZ] において導入されたが，その際の構成方法は単射的分解や二重複体などを用いる極めて複雑なものであった．ここでは，斎藤毅氏によって発見されたより明快な方法 ([SaT2]) を紹介する（このような構成を行うことは，後に触れる代数的対応の作用を定める際にも必要となる）．$\sigma_0 \in I_K$ を $t_\ell(\sigma_0)$ が $\mathbb{Z}_\ell(1)$ の生成元となるように固定する．このとき，導来圏の対象 $R\psi\mathbb{Q}_\ell$ に $\sigma_0 - 1$ は冪零に作用する（$R\psi\mathbb{Q}_\ell$ が有界複体であり，各コホモロジー $R^i\psi\mathbb{Q}_\ell$ に σ_0 が自明に作用することから従う）．ポイントは，$R\psi\mathbb{Q}_\ell$（の適切なシフト）が**偏屈層** (perverse sheaf) になり，アーベル圏の対象と見なせるということである．（偏屈層全体の圏はアーベル圏になる．Riemann-Hilbert 対応を思い出すと理解しやすいだろう．）一般にアーベル圏の対象 A の冪零な自己射 N が与えられたとき，A の増大フィルトレーション $M_\bullet$ で次を満たすものが一意的に存在する ([SaT2, Lemma 2.3])：

- $M_i = 0$ $(i \ll 0)$, $M_i = A$ $(i \gg 0)$
- $N(M_i) \subset M_{i-2}$.
- 任意の $i > 0$ に対し，$N^i\colon \mathrm{gr}_i^M A \longrightarrow \mathrm{gr}_{-i}^M A$ は同型.

これを**モノドロミーフィルトレーション**という．$R\psi\mathbb{Q}_\ell$ の $\sigma_0 - 1$ に関するモノドロミーフィルトレーションを考え，それに伴うスペクトル系列をとることで，重さスペクトル系列が得られるのである．

次に代数的対応付きの場合を考える．γ を X 上の代数的対応とすると，重さスペクトル系列への γ の作用を次を満たすように定めることができる（[SaT2, §2.3, §2.4] 参照）：

- 収束先に γ の作用を誘導する．
- E_1 項への作用も代数的対応で書ける（かなり複雑なのでここでは説明しない）．

その結果，次の定理が得られる：

定理 3.56

$\sigma \in W_K^+$ に対し，$\sum_{i=0}^{2d}(-1)^i \operatorname{Tr}(\gamma^* \circ \sigma; H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$ は ℓ に依存しない整数である．特に γ が冪等であるとすると，$\sum_{i=0}^{2d}(-1)^i \operatorname{Tr}(\sigma; H^i(X_{\overline{K}}, \gamma, \mathbb{Q}_\ell))$ は ℓ に依存しない整数である．

この定理より，もし Künneth 射影子（注意 3.41 参照）が存在すれば，系 3.54 i) を各次数ごとに分離できることが分かる：

系 3.57

$i \geq 0$ を整数とし，X が i 次の Künneth 射影子を持つと仮定する．このとき，$\sigma \in W_K^+$ に対し $\operatorname{Tr}(\gamma^* \circ \sigma; H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell))$ は ℓ に依存しない整数である．特に γ が冪等であるとすると，$\operatorname{Tr}(\sigma; H^i(X_{\overline{K}}, \gamma, \mathbb{Q}_\ell))$ は ℓ に依存しない整数である．

証明　Γ_i を i 次の Künneth 射影子とすると，

$$(-1)^i \operatorname{Tr}\bigl(\gamma^* \circ \sigma; H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)\bigr) = \sum_{j=0}^{2d}(-1)^j \operatorname{Tr}\bigl(\Gamma_i^* \circ \gamma^* \circ \sigma; H^j(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)\bigr)$$

となるので，代数的対応 $\gamma \circ \Gamma_i$（練習 2.6 参照）に定理 3.56 を適用すればよい．■

Künneth 射影子が存在するかどうかは難しい問題であるが，例えば志村多様体から超尖点表現を切り出す代数的対応を考えるような場合には，i がある値 i_0 である場合を除いて $H^i(X_{\overline{K}}, \gamma, \mathbb{Q}_\ell) = 0$ となることがある．この場合には Künneth 射影子を考えるまでもなく定理 3.56 から系にあたることが導かれる．

また, 上で省略した重さスペクトル系列への代数的対応の作用を用いて $H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への代数的対応の作用を調べることも原理的には可能である．この方向の研究については，[Yos] が挙げられる．

3.5　一般の還元の場合

$\mathfrak{X}$ が強半安定でない場合には，体 K の拡大体 L をとり，X_L の O_L 上の強半安定モデルを考えることで前小節の内容に帰着するという方針をとる．強半安定モデルの存在については次の有名な予想がある：

予想 3.58（半安定還元予想）

X を K 上固有かつ滑らかなスキームとするとき，K の有限次拡大 L および O_L 上固有かつ強半安定なスキーム $\mathfrak{Y}$ が存在して，$\mathfrak{Y}_L \cong X_L$ となる．

よく見る半安定還元予想は,「強半安定スキーム」の存在ではなく「半安定スキーム」の存在を主張するものかもしれない．しかし，もし半安定な $\mathfrak{Y}$ の存在が分か

れば，L をさらに拡大して $\mathfrak{Y}$ を底変換し，適切なブローアップをとることで強半安定にできるので，それらは同値である．

この予想は X が 1 次元の場合には証明されている ([DM])．また，K が p 進体ではなく等標数 0 の完備離散付値体 $\mathbb{C}((T))$ である場合にも証明されている ([KKMSD])．

もしこの予想が成り立つならば，G_L 同型 $H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \cong H^i(\mathfrak{Y}_{\overline{L}}, \mathbb{Q}_\ell)$ があるので，$H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への G_K の作用のうち $G_L \subset G_K$ の部分に関しては $\mathfrak{Y}$ の特殊ファイバー $\mathfrak{Y}_\kappa$ の幾何を用いて記述することができることになる．

実際には S やその整モデル $\mathfrak{S}$ として志村多様体のような特別なスキームを考え，$X = S_K$ に対して上記のような L や $\mathfrak{Y}$ を探すことになるので，半安定還元予想が証明されていない現状においても，具体的に構成することで L や $\mathfrak{Y}$ の存在を証明できることがある（実際の計算のためにはむしろ具体的な構成こそが必要である）．$\mathfrak{S}_{O_K}$ を適切な拡大体 $L \supset K$ の整数環 O_L に底変換し，それを正規化したり特殊ファイバーに沿ってブローアップしたりするという方法がよく採用されているようである．例えば [TY, §3]（岩堀レベル付き Harris-Taylor 型志村多様体の強半安定モデルが構成されている）などを参照されたい．

注意 3.59

もし予想 3.58 が正しいならば，予想中の L は K の Galois 拡大であるようにとれる．実際，L（K は標数 0 なのでこれは K の分離拡大である）の Galois 閉包を L' とすると，$\mathfrak{Y}_{O_{L'}}$ は一般には $O_{L'}$ 上強半安定ではないが，それを特殊ファイバーの閉部分スキームに沿ってブローアップすることにより強半安定にすることができる（[SaT2, Lemma 1.11] 参照）．

現在証明されているのは，半安定還元予想を少し弱めた次のような定理である：

定理 3.60（de Jong のオルタレーション：[dJ]）

X を K 上固有かつ滑らかなスキームとするとき，K の有限次拡大 L，O_L 上固有かつ強半安定なスキーム $\mathfrak{Y}$ および固有な全射 $f\colon \mathfrak{Y}_L \longrightarrow X$ で次を満たすものが存在する：稠密な開集合 $U \subset X$ が存在して，$f|_U\colon f^{-1}(U) \longrightarrow U$ は有限射である（実はさらに $\mathfrak{Y}$ が O_L 上射影的であり，$f|_U$ がエタール射であるようにとることもできる）．

注意 3.61

注意 3.59 と同様，上の定理中の L は K の Galois 拡大であるようにとれる．

以下，記号を定理 3.60 の通りとする．特に理論的な主張を証明する場合には，半安定還元予想ではなく上記の定理で十分な場合も多い．その根拠を示すのが次の命題である：

命題 3.62
$H^i(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{f^*} H^i(\mathfrak{Y}\otimes_{O_K}\overline{K},\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{f_*} H^i(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell)$ の合成は $\deg f$ 倍である（$\deg f$ は有限射 $f|_U$ の次数を表す）．

証明 $Y=\mathfrak{Y}\otimes_{O_K}K=\mathfrak{Y}\otimes_{O_L}(O_L\otimes_{O_K}K)=\mathfrak{Y}\otimes_{O_L}L$ とおくと，これは K 上滑らかなスキームである．$H^i(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{f^*} H^i(Y_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{f_*} H^i(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell)$ の合成が $\deg f$ 倍になることを示せばよい．$\xi\in H^i(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell)$ に対し，射影公式より

$$\begin{aligned} f_*(f^*\xi) &= f_*(f^*\xi\cup 1) = f_*\bigl(f^*\xi\cup \mathrm{cl}([Y])\bigr) = \xi\cup f_*\bigl(\mathrm{cl}([Y])\bigr) = \xi\cup\mathrm{cl}(f_*([Y])) \\ &= \deg f\cdot\bigl(\xi\cup\mathrm{cl}([X])\bigr) = \deg f\cdot\xi \end{aligned}$$

となるのでよい． ∎

以下簡単のため L を K の Galois 拡大であるとし，$\tau\in\mathrm{Gal}(L/K)$ に対し $\tau\colon O_L\longrightarrow O_L$ による $\mathfrak{Y}$ の底変換を $\mathfrak{Y}^\tau$ と書く．このとき，$\mathfrak{Y}\otimes_{O_K}\overline{K}=\mathfrak{Y}\otimes_{O_L}(O_L\otimes_{O_K}\overline{K})=\coprod_{\tau\in\mathrm{Gal}(L/K)}\mathfrak{Y}^\tau_{\overline{L}}$ であるから，$H^i(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell)$ は $\bigoplus_{\tau\in\mathrm{Gal}(L/K)}H^i(\mathfrak{Y}^\tau_{\overline{L}},\mathbb{Q}_\ell)$ の直和成分とみなせることが分かる（$(\deg f)^{-1}f^*f_*$ が射影子を与える）．このことと定理 3.49 から特に，G_L の $H^i(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell)$ への作用は冪単であることが分かり，$H^i(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell)$ に対する Grothendieck のモノドロミー定理（定理 3.6）の別証明が得られる（Grothendieck のモノドロミー定理とは異なり，この証明は一般の完備離散付値体に対して機能することにも注目していただきたい）．また，命題 3.53 i) より次が分かる：

系 3.63
$H^i(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell)$ は混な ℓ 進表現である．

さらに，$H^i(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell)$ への G_L の作用の跡は次のように調べられる：

系 3.64
$\tau\in\mathrm{Gal}(L/K)$ に対し，射 $\mathfrak{Y}^\tau_L\times_{X_L}\mathfrak{Y}^\tau_L\longrightarrow\mathfrak{Y}^\tau_L\times_L\mathfrak{Y}^\tau_L$ に伴う代数的対応を Γ_τ とおくと，任意の $\sigma\in G_L$ に対し次が成り立つ：

$$\mathrm{Tr}\bigl(\sigma;H^i(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell)\bigr)=(\deg f)^{-1}\sum_{\tau\in\mathrm{Gal}(L/K)}\mathrm{Tr}\bigl(\Gamma_\tau^*\circ\sigma;H^i(\mathfrak{Y}^\tau_{\overline{L}},\mathbb{Q}_\ell)\bigr).$$

証明 $\mathfrak{Y}^\tau_L\longrightarrow\mathfrak{Y}\otimes_{O_K}L\xrightarrow{f\otimes\mathrm{id}_L}X_L$ の合成を f_τ とおくと，同型 $H^i(\mathfrak{Y}\otimes_{O_K}\overline{K},\mathbb{Q}_\ell)\cong\bigoplus_{\tau\in\mathrm{Gal}(L/K)}H^i(\mathfrak{Y}^\tau_{\overline{L}},\mathbb{Q}_\ell)$ のもとで命題 3.62 の f^* は $\bigoplus_\tau f_\tau^*$ に，f_* は $\bigoplus_\tau f_{\tau*}$ に対応する．よって，

$$\mathrm{Tr}\bigl(\sigma;H^i(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell)\bigr)=\mathrm{Tr}\bigl((\deg f)^{-1}f^*f_*\circ\sigma;H^i(\mathfrak{Y}\otimes_{O_K}\overline{K},\mathbb{Q}_\ell)\bigr)$$

$$= (\deg f)^{-1} \sum_{\tau\in\mathrm{Gal}(L/K)} \mathrm{Tr}\bigl(f_\tau^* f_{\tau*}\circ\sigma; H^i(\mathfrak{Y}_L^\tau, \mathbb{Q}_\ell)\bigr)$$

を得る．一方，2 つの射 $\mathfrak{Y}_L^\tau \xrightarrow{\mathrm{id}\times f_\tau} \mathfrak{Y}_L^\tau \times_L X_L$，$\mathfrak{Y}_L^\tau \xrightarrow{f_\tau\times\mathrm{id}} X_L \times_L \mathfrak{Y}_L^\tau$ に伴う代数的対応の合成が Γ_τ であるから，$\Gamma_\tau^* = f_\tau^* f_{\tau*}$ が成り立つ．これよりよい． ∎

この命題により，G_L の $H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への作用の跡を調べるには，各 $\tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$ に対し，強半安定 O_L スキーム $\mathfrak{Y}^\tau$ の一般ファイバーのコホモロジー $H^i(\mathfrak{Y}_{\overline{L}}^\tau, \mathbb{Q}_\ell)$ への G_L および代数的対応の作用を調べればよいことが分かった．前小節で述べたように，これらは重さスペクトル系列を通して特殊ファイバーの幾何学的情報で記述することができる．

実は，G_L に含まれない G_K の元の作用も重さスペクトル系列を用いて調べることができる．簡単のため，$\mathfrak{Y}$ が予想 3.58 の条件件を満たすと仮定しよう．$\sigma \in W_K^+$ をとり，以前と同様 $\mathfrak{Y}$ の $\sigma\colon O_L \longrightarrow O_L$ での底変換を $\mathfrak{Y}^\sigma$ とおく．このとき，$\mathfrak{Y}_L^\sigma$ は自然に X_L と同型であるから，$\Delta_{X_L} \subset X_L \times_L X_L$ に対応する代数的対応 $\Gamma \subset \mathfrak{Y}_L^\sigma \times_L \mathfrak{Y}_L$ がある．これは閉包をとることで代数的対応 $\overline{\Gamma} \subset \mathfrak{Y}^\sigma \times_{O_L} \mathfrak{Y}$ に延長でき，X_L への Galois 作用 $\sigma^*\colon X_L \longrightarrow X_L$ は強半安定モデルの間の射 $\mathfrak{Y} \xrightarrow{\sigma^*} \mathfrak{Y}^\sigma$ と代数的対応 $\overline{\Gamma} \subset \mathfrak{Y}^\sigma \times_{O_L} \mathfrak{Y}$ の「合成」の一般ファイバーと見なすことができる．σ^* と $\overline{\Gamma}$ はともにスペクトル系列に作用する：

$$\begin{tikzcd}
E_1^{s,t} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "\overline{\sigma}"'] & H^{s+t}(\mathfrak{Y}_{\overline{L}}, \mathbb{Q}_\ell) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\sigma"] & H^{s+t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \arrow[d, "\sigma"] \\
E_1^{\sigma,s,t} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "\substack{\overline{\Gamma}\text{ から決まる}\\ \text{代数的対応}}"'] & H^{s+t}(\mathfrak{Y}_{\overline{L}}^\sigma, \mathbb{Q}_\ell) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\Gamma^*"] & H^{s+t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
E_1^{s,t} \arrow[r, Rightarrow] & H^{s+t}(\mathfrak{Y}_{\overline{L}}, \mathbb{Q}_\ell) \arrow[r, equal] & H^{s+t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell).
\end{tikzcd}$$

ここで，$E_1^{\sigma,s,t}$ は $\mathfrak{Y}^\sigma$ に伴う重さスペクトル系列の E_1 項である．E_1 項の $\overline{\sigma}$ は幾何学的な射から来る（$\overline{\kappa}$ 上の射の引き戻しとして得られる）わけではないが，次のように書き換えることができる：$\overline{\sigma}^*$ に絶対 Frobenius 射の $n(\sigma)[\kappa_L : \mathbb{F}_p]$ 乗（κ_L は L の剰余体）を合成して得られる $\overline{\kappa}$ 上の射を σ_{geom} とおくと，$\overline{\sigma} = \sigma_{\mathrm{geom}}^*$ である．以上の議論から，$H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への σ の作用は，重さスペクトル系列を通して，E_1 項への（かなり複雑な）代数的対応の作用として捉えられることが分かった．

さらに X に代数的対応 γ が付いている場合でも，全く同様の手法が機能する．以上の議論をまとめると，次が得られる：

定理 3.65（[SaT2]）
γ を X 上の代数的対応とするとき，任意の $\sigma \in W_K^+$ に対し，跡の交代和

$\sum_{i=0}^{2d}(-1)^i \operatorname{Tr}(\gamma^*\circ\sigma; H^i(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell))$ は ℓ に依存しない整数である．特に γ が冪等であるとすると，$\sum_{i=0}^{2d}(-1)^i \operatorname{Tr}(\sigma; H^i(X_{\overline{K}},\gamma,\mathbb{Q}_\ell))$ は ℓ に依存しない整数である．

系 3.66

Γ を S 上の冪等な代数的対応とする．S が i 次の Künneth 射影子を持つならば，$\{H^i(S_{\overline{F}},\Gamma,\mathbb{Q}_\ell)\}_\ell$ は半単純化を除いて p の外で強整合系である．すなわち，F の任意の有限素点 v に対し，$\mathrm{WD}(H^i(S_{\overline{F}},\Gamma,\mathbb{Q}_\ell)|_{W_K})^{\mathrm{ss}}$ は（$\ell\neq p$ である限り）ℓ に依存しない．

例 3.67

E を Weierstrass 方程式 $y^2=x^3+x^2+5$ で与えられる $\mathbb{Q}_5$ 上の楕円曲線とする．1 次コホモロジー $H^1(E_{\overline{\mathbb{Q}}_5},\mathbb{Q}_\ell)$ への $W_{\mathbb{Q}_5}$ の作用を考えよう．$\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}_5}$ の 3 次曲線 $\mathcal{E}\colon Y^2Z=X^3+X^2Z+5Z^3$ は E の整モデルを与えるが，それは強半安定スキームではない（半安定スキームではある）．$K=\mathbb{Q}_5(\sqrt{5})$ とおき，$\mathcal{E}_{O_K}$ をイデアル $(x,y,\sqrt{5})$ で定まる閉部分スキームに沿ってブローアップして得られる O_K スキームを $\mathfrak{Y}$ とおく．例 3.55 と同様に，$\mathfrak{Y}$ は E_K の強半安定モデルを与えることが分かる．$\mathfrak{Y}$ の特殊ファイバー $\mathfrak{Y}_{\mathbb{F}_5}$ は 2 つの既約成分 D_1, D_2 を持ち，それらはともに $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_5}$ と同型である．$D_1\cap D_2$ は 2 つの $\mathbb{F}_5$ 有理点からなる．

$\sigma\in W_{\mathbb{Q}_5}$ の作用がどのようになるかを調べるために，$\mathfrak{Y}$ の定義式を計算しよう．ここでは，$\mathbb{Z}_5$ 上のアフィン曲線 $\mathcal{E}^\circ\colon y^2=x^3+x^2+5$（これは $\mathcal{E}$ の開集合である）の O_K への底変換 $\mathcal{E}^\circ_{O_K}$ の $(x,y,\sqrt{5})$ によるブローアップを考え，その中で x が可逆になるような開部分スキーム $\mathfrak{U}\subset\mathfrak{Y}$ を考える．$y=wx$, $\sqrt{5}=tx$ とおいて $y^2=x^3+x^2+5$ に代入し両辺を x^2 で割ると $w^2=x+1+t^2$ が得られるから，

$$\mathfrak{U}=\operatorname{Spec}O_K[x,w,t]/(tx-\sqrt{5},x+1+t^2-w^2)=\operatorname{Spec}O_K[w,t]/\bigl(t(w^2-t^2-1)-\sqrt{5}\bigr)$$

である．また，$\mathfrak{U}\longrightarrow\mathcal{E}^\circ_{O_K}$ は $(x,y)\longmapsto(w^2-t^2-1,w(w^2-t^2-1))$ で与えられる．

$\sigma\in W^+_{\mathbb{Q}_5}\setminus W^+_K$ としよう．このとき $\mathfrak{U}^\sigma=\operatorname{Spec}O_K[w,t]/(t(w^2-t^2-1)+\sqrt{5})$ である．さらに，O_K スキームの射 $f\colon\mathfrak{U}\longrightarrow\mathfrak{U}^\sigma$ を $(w,t)\longmapsto(w,-t)$ で定める．このとき左下の可換図式が得られ，それは右の可換図式へと延長される：

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{U} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathcal{E}^\circ_{O_K} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathfrak{U}^\sigma \arrow[r] \arrow[d, "\sigma^*"] & \mathcal{E}^\circ_{O_K} \arrow[d, "\sigma^*"] \\
\mathfrak{U} \arrow[r] & \mathcal{E}^\circ_{O_K},
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{Y} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathcal{E}_{O_K} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathfrak{Y}^\sigma \arrow[r] \arrow[d, "\sigma^*"] & \mathcal{E}_{O_K} \arrow[d, "\sigma^*"] \\
\mathfrak{Y} \arrow[r] & \mathcal{E}_{O_K}.
\end{tikzcd}$$

この図式より 61 ページで紹介したような重さスペクトル系列間の射が誘導される（この場合は f が同型なので，E_1 項に誘導される射は単に $\overline{f} = f \bmod \sqrt{5}$ による引き戻しになる[注 21]）．それを計算するために，上の図式を $\bmod \sqrt{5}$ しよう．このとき $\mathfrak{U}_{\overline{\mathbb{F}}_5} = \operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}}_5[w,t]/(t(w^2-t^2-1))$ であり，その $\overline{\mathbb{F}}_5$ 上の自己射 $\mathrm{absFrob}^{n(\sigma)} \circ \overline{\sigma}^* \circ \overline{f}$ は $(w,t) \longmapsto (w^{5^{n(\sigma)}}, -t^{5^{n(\sigma)}})$ で与えられる[注 22]（absFrob は $\mathfrak{U}_{\overline{\mathbb{F}}_5}$ 上の絶対 Frobenius 射，すなわち座標環上の 5 乗写像が誘導する射である）．したがって，σ が重さスペクトル系列の E_1 項に誘導する射は $\overline{f}^* \circ (\phi_5^*)^{n(\sigma)}$ である．ところで，$\overline{f}^*$ は E_1 項に恒等写像を誘導するので，結局重さスペクトル系列の E_1 項には $(\phi_5^*)^{n(\sigma)} = \mathrm{Frob}_5^{n(\sigma)}$ が誘導される．

$\sigma \in W_K^+$ でも結果は同じである．したがって E_1 項への $W_{\mathbb{Q}_5}$ の作用は例 3.55 と全く同様である．モノドロミー作用素の計算も完全に同じなので，$W_{\mathbb{Q}_5}$ の ℓ 進表現 $H^1(E_{\overline{\mathbb{Q}}_5}, \mathbb{Q}_\ell)$ の記述も例 3.55 と変わらない．

練習 3.68

$\mathbb{Q}_5$ 上の楕円曲線 $E\colon y^2 = x^3 + 2x^2 + 25$ に対して $H^1(E_{\overline{\mathbb{Q}}_5}, \mathbb{Q}_\ell)$ への $W_{\mathbb{Q}_5}$ の作用を記述せよ．（例 3.55 と同じように整モデル $\mathcal{E}$ のブローアップ $\widetilde{\mathcal{E}}$ をとると，これは強半安定ではないが，$\mathbb{Q}_{25}$（$\mathbb{Q}_5$ の不分岐 2 次拡大）の整数環 $\mathbb{Z}_{25}$ に底変換すると強半安定になる．そのため，重さスペクトル系列の E_1 項の形は例 3.55 と全く同様であるが，Frob_5 の E_1 項への作用が変わってくる．）

注意 3.69

近年の Gabber の研究により，定理 3.60 は次のように強められた：p と互いに素な素数 ℓ を固定すると，定理 3.60 のような L, $\mathfrak{Y}$, f で $\deg f$ が ℓ と互いに素になるようなものが存在する．これによって $\mathbb{Z}_\ell$ 係数や $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ 係数のエタールコホモロジーの研究にも定理 3.60 を利用することが可能になったことは注目に値する．

3.6 ウェイト・モノドロミー予想

前小節まででは $H^i(X_{\overline{K}}, \gamma, \mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{ss}}$ を $\mathfrak{X}_\kappa$ の幾何を用いて記述する方法について主に述べてきたが，$H^i(X_{\overline{K}}, \gamma, \mathbb{Q}_\ell)$ のモノドロミー作用素については次の予想がある：

予想 3.70

$H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は純な ℓ 進表現であり，その重さは i となる．すなわち，$H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の重さフィルトレーション $\mathrm{Fil}_\bullet^W$（系 3.63 より存在が保証される）および任意の整数 $j \geq 1$ に対し $N^j\colon \mathrm{gr}_{i+j}^W H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathrm{gr}_{i-j}^W H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は同型である．

[注 21] この場合 $\mathfrak{Y} \cong \mathfrak{Y}^\sigma$ となるのは，$\mathfrak{Y}$ が σ で保たれるイデアル $(x, y, \sqrt{5})$ でのブローアップによって得られているという特殊事情のためであるが，一般には $\mathfrak{Y} \cong \mathfrak{Y}^\sigma$ とは限らない（種数が 2 以上の代数曲線の場合には，安定モデルの一意性より，$\mathfrak{Y} \cong \mathfrak{Y}^\sigma$ となるように $\mathfrak{Y}$ をとることができる）．

[注 22] この場合はたまたま $\mathfrak{Y}_{\mathbb{F}_5} = \mathfrak{Y}_{\mathbb{F}_5}^\sigma$, $\overline{\sigma} = \mathrm{Frob}_5^{n(\sigma)}$ となっているので，この変形にはあまりありがたみがない．なお，この場合 $\sigma_{\mathrm{geom}} = \phi_5^{n(\sigma)}$ となっている．

$H^i(X_{\overline{K}},\gamma,\mathbb{Q}_\ell)$ は $H^i(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_\ell)$ の直和因子であるから，後者が純ならば前者も純であることに注意せよ．予想 3.70 が正しければ，命題 3.20 より，$H^i(X_{\overline{K}},\gamma,\mathbb{Q}_\ell)^{\mathrm{ss}}$ の情報から $H^i(X_{\overline{K}},\gamma,\mathbb{Q}_\ell)^{F\text{-ss}}$ が完全に決定されることになる．よって，定理 3.65 から次が得られる：

命題 3.71

Γ を S 上の冪等な代数的対応とする．S が i 次の Künneth 射影子を持ち，かつ予想 3.70 が成り立つならば，$\{H^i(S_{\overline{F}},\Gamma,\mathbb{Q}_\ell)\}_\ell$ は p の外で強整合系である．すなわち，F の任意の有限素点 v に対し，$\mathrm{WD}(H^i(S_{\overline{F}},\Gamma,\mathbb{Q}_\ell)|_{W_K})^{F\text{-ss}}$ は（$\ell\neq p$ である限り）ℓ に依存しない．

この命題や予想 3.70 自身は，局所・大域 Langlands 対応の整合性を証明する際に重要な役割を果たす．[Car] や [SaT3]，[TY] などを参照されたい．[Car] および [SaT3] については以前 [Mie] に解説を書いたので，そちらも参考にしていただければ幸いである．

予想 3.70 について知られていることを述べる．

- オルタレーションと練習 3.19 ii) より，$\mathfrak{X}$ が強半安定かつ O_K 上射影的である場合に示せば十分である．
- $i\leq 2$ の場合には予想 3.70 は成り立つ．$i=0$ の場合は自明であり，$i=1$ の場合は [SGA7, Exposé I] に証明がある．$i=2$ の場合，X が 2 次元のときは [RZ] にて示されている．X が 3 次元以上のときには，射影的な場合に帰着した後に超平面による切断を繰り返すことで 2 次元の場合に帰着できる（強 Lefschetz 定理 ([Del3, Théorème 4.1.1]) を用いる）．
- K が p 進体ではなく，等標数完備離散付値体の場合には予想 3.70 は成り立つ．等標数 0 の場合は [Ste]，[SaM1] を参照．等標数 $p>0$ の場合，X が有限体上の代数曲線上の族から来る場合には Deligne によって証明された．一般の場合は Néron 解消を用いて Deligne の結果に帰着できる ([Ito1])．
- 標準予想が正しければ予想 3.70 も正しい．これは斎藤盛彦氏による ([SaM1], [SaM2])．

$\mathfrak{X}$ が強半安定である場合には，重さスペクトル系列を用いて予想 3.70 を $\mathfrak{X}_\kappa$ の幾何に関する主張に言い換えることができる．例えば，$\dim X=2, i=2$ の場合を考えてみよう．このとき，54 ページの重さスペクトル系列の形，および重さスペクトル系列が E_2 退化することから，(a) $N\colon \mathrm{gr}_3^W\longrightarrow \mathrm{gr}_1^W$, (b) $N^2\colon \mathrm{gr}_4^W\longrightarrow \mathrm{gr}_0^W$ はそれぞれ次のようにして与えられる（係数，Tate 捻りは省略した）：

$$\text{(a)}：\mathrm{Ker}\bigl(H^1(D_{\overline{\kappa}}^{(1)})\xrightarrow{\mathrm{Gys}}H^3(D_{\overline{\kappa}}^{(0)})\bigr)\longrightarrow \mathrm{Coker}\bigl(H^1(D_{\overline{\kappa}}^{(0)})\xrightarrow{\mathrm{Res}}H^1(D_{\overline{\kappa}}^{(1)})\bigr),$$

$$\text{(b)}：\mathrm{Ker}\bigl(H^0(D_{\overline{\kappa}}^{(2)})\xrightarrow{\mathrm{Gys}}H^2(D_{\overline{\kappa}}^{(1)})\bigr)\longrightarrow \mathrm{Coker}\bigl(H^0(D_{\overline{\kappa}}^{(1)})\xrightarrow{\mathrm{Res}}H^0(D_{\overline{\kappa}}^{(2)})\bigr).$$

ウェイト・モノドロミー予想を証明するためには，これらが同型であることを証明すればよい．$H^1(D_\kappa^{(1)}) \xrightarrow{\mathrm{Gys}} H^3(D_\kappa^{(0)})$ と $H^1(D_\kappa^{(0)}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(D_\kappa^{(1)})$ は互いに双対であることから，(a) の準同型が同型であることを証明するには単射であることを示せばよく，それはカップ積から得られる非退化双線型形式 $H^1(D_\kappa^{(1)}) \times H^1(D_\kappa^{(1)}) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell$ を $H^1(D_\kappa^{(0)}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^1(D_\kappa^{(1)})$ の像 $\operatorname{Im}\mathrm{Res}$ に制限しても非退化であることと同値である．さらに $\mathfrak{X}$ が O_K 上射影的であることを仮定すると，Res はアーベル多様体間の射 $\prod_i \mathrm{Pic}^0(D_i) \longrightarrow \prod_{i<j} \mathrm{Pic}^0(D_i \cap D_j)$ の Tate 加群をとることによって誘導されるので，この射の像であるアーベル多様体を A とおくと $\operatorname{Im}\mathrm{Res} \cong V_\ell A$ となる．$H^1(D_\kappa^{(1)}) \cong V_\ell(\prod_{i<j} \mathrm{Pic}^0(D_i \cap D_j))$ 上のカップ積は $\prod_{i<j} \mathrm{Pic}^0(D_i \cap D_j)$ 上の豊富直線束 L に伴う Weil ペアリングとして得られ，それを $V_\ell A$ に制限すると $L|_A$ に伴う Weil ペアリングとなる．$L|_A$ は豊富直線束であるからこのペアリングは非退化であることが分かり，カップ積の $\operatorname{Im}\mathrm{Res}$ への制限の非退化性が証明された．

(b) についても同様に，カップ積のペアリング $H^0(D_\kappa^{(2)}) \times H^0(D_\kappa^{(2)}) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell$ を $H^0(D_\kappa^{(0)}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^0(D_\kappa^{(2)})$ の像 $\operatorname{Im}\mathrm{Res}$ に制限しても非退化であることを示せばよい．これを示すには，現れる $\mathbb{Q}_\ell$ ベクトル空間，準同型，双線型写像が全て $\mathbb{Q}$ 構造を持つことに注意する．具体的には，V, W をそれぞれ $D^{(2)}$, $D^{(0)}$ 上の $\mathbb{Q}$ 値局所定数関数全体とし，$r\colon W \longrightarrow V$ を自然な射（に適切な符号を付けたもの），$\Phi\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{Q}$ を標準内積とすると，V, W, r, Φ はそれぞれ $H^0(D_\kappa^{(2)})$, $H^0(D_\kappa^{(0)})$, Res, カップ積のペアリングの $\mathbb{Q}$ 構造を与える．Φ は内積なので，Φ を r の像に制限しても非退化であるから，カップ積を $\operatorname{Im}\mathrm{Res}$ に制限しても非退化であることが分かる．

練習 3.72

上の証明を参考にして，$\dim X = 1$ の場合にウェイト・モノドロミー予想が成り立つことを確認せよ．

上で紹介した，一般的な強半安定スキームに対して機能する方針以外にも，志村多様体などの特別な場合に，表現論と組み合わせることで応用上十分な形のウェイト・モノドロミー予想を得る方法もある．そのような研究については，[TY], [Boy], [Dat] などを参照していただきたい．特に [Dat] においては，最終的にはレベル付きの Drinfeld 上半空間（Drinfeld 上半空間上の普遍形式加群の等分点として得られるエタール被覆）によって一意化される全てのスキームに対してウェイト・モノドロミー予想が証明されている．

参考文献

[BBD] A. A. Beĭlinson, J. Bernstein, and P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982, pp. 5–171.

[BH] C. J. Bushnell and G. Henniart, *The local Langlands conjecture for* GL(2), Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 335, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Boy] P. Boyer, *Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples*, Invent. Math. **177** (2009), no. 2, 239–280.

[Car] H. Carayol, *Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), no. 3, 409–468.

[Con] B. Conrad, *Deligne's notes on Nagata compactifications*, J. Ramanujan Math. Soc. **22** (2007), no. 3, 205–257.

[CS] G. Cornell and J. H. Silverman (eds.), *Arithmetic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1986, Papers from the conference held at the University of Connecticut, Storrs, Connecticut, July 30–August 10, 1984.

[Dat] J.-F. Dat, *Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques*, Invent. Math. **169** (2007), no. 1, 75–152.

[Del1] P. Deligne, *Formes modulaires et representations ℓ-adiques*, Séminaire Bourbaki, 21ème année (1968/69), Exp. No. 355, 1969.

[Del2] ———, *La conjecture de Weil. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1974), no. 43, 273–307.

[Del3] ———, *La conjecture de Weil. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1980), no. 52, 137–252.

[dJ] A. J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1996), no. 83, 51–93.

[DM] P. Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1969), no. 36, 75–109.

[DS] P. Deligne and J.-P. Serre, *Formes modulaires de poids* 1, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 507–530 (1975).

[Eke] T. Ekedahl, *On the adic formalism*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 197–218.

[Fuj] K. Fujiwara, *Rigid geometry, Lefschetz-Verdier trace formula and Deligne's conjecture*, Invent. Math. **127** (1997), no. 3, 489–533.

[Ful] W. Fulton, *Intersection theory*, second ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Hen] G. Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* $\mathrm{GL}(n)$ *sur un corps p-adique*, Invent. Math. **139** (2000), no. 2, 439–455.

[HT] M. Harris and R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, With an appendix by Vladimir G. Berkovich.

[Ito1] T. Ito, *Weight-monodromy conjecture over equal characteristic local fields*, Amer. J. Math. **127** (2005), no. 3, 647–658.

[Ito2] ———，コホモロジー論とモチーフ，整数論札幌夏の学校 (2006) の講義録，2008.

[Ive] B. Iversen, *Cohomology of sheaves*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[Jan] U. Jannsen, *Continuous étale cohomology*, Math. Ann. **280** (1988), no. 2, 207–245.

[KKMSD] G. Kempf, F. F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings. I*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 339, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[Kle] S. L. Kleiman, *Algebraic cycles and the Weil conjectures*, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 359–386.

[KS] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 292, Springer-Verlag, Berlin, 1994, With a chapter in French by Christian Houzel.

[KW] R. Kiehl and R. Weissauer, *Weil conjectures, perverse sheaves and l'adic Fourier transform*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 42, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[Laf] L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Invent. Math. **147** (2002), no. 1, 1–241.

[Lüt] W. Lütkebohmert, *On compactification of schemes*, Manuscripta Math. **80** (1993), no. 1, 95–111.

[Mie] 三枝 洋一，局所・大域整合性，$R = T$ の最近の発展—佐藤・Tate 予想と Serre 予想—，2009.

[Mum] D. Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970.

[Nag1] M. Nagata, *Imbedding of an abstract variety in a complete variety*, J. Math. Kyoto Univ. **2** (1962), 1–10.

[Nag2] ———, *A generalization of the imbedding problem of an abstract variety in a complete variety*, J. Math. Kyoto Univ. **3** (1963), 89–102.

[RZ] M. Rapoport and Th. Zink, *Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik*, Invent. Math. **68** (1982), no. 1, 21–101.

[SaM1] M. Saito, *Modules de Hodge polarisables*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **24** (1988), no. 6, 849–995 (1989).

[SaM2] M. Saito, *Monodromy filtration and positivity*, preprint, 2000.

[SaT1] T. Saito, *Modular forms and p-adic Hodge theory*, Invent. Math. **129** (1997), no. 3, 607–620.

[SaT2] T. Saito, *Weight spectral sequences and independence of l*, J. Inst. Math. Jussieu **2** (2003), no. 4, 583–634.

[SaT3] ———, *Hilbert modular forms and p-adic Hodge theory*, to appear in Compositio Mathematica.

[Sch1] A. J. Scholl, *Motives for modular forms*, Invent. Math. **100** (1990), no. 2, 419–430.

[Sch2] ———, *Classical motives*, Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 163–187.

[Ser1] J.-P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. Math. **15** (1972), no. 4, 259–331.

[Ser2] ———, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Sil] J. H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 106, Springer-Verlag, New York, 1986.

[ST] J.-P. Serre and J. Tate, *Good reduction of abelian varieties*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 492–517.

[Ste] J. Steenbrink, *Limits of Hodge structures*, Invent. Math. **31** (1975/76), no. 3, 229–257.

[Tay] R. Taylor, *Galois representations*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)

13 (2004), no. 1, 73–119.

[TY] R. Taylor and T. Yoshida, *Compatibility of local and global Langlands correspondences*, J. Amer. Math. Soc. **20** (2007), no. 2, 467–493.

[Var] Y. Varshavsky, *Lefschetz-Verdier trace formula and a generalization of a theorem of Fujiwara*, Geom. Funct. Anal. **17** (2007), no. 1, 271–319.

[Yos] T. Yoshida, *Weight spectral sequence and Hecke correspondence on Shimura varieties*, Ph.D. thesis, Harvard University, 2006.

[EGA4] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas.*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. no. 20, 24, 28, 32.

[SGA4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, 270, 305.

[SGA4$\frac{1}{2}$] P. Deligne, *Cohomologie étale*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569, Springer-Verlag, Berlin.

[SGA5] *Cohomologie l-adique et fonctions L*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 589, Springer-Verlag, Berlin.

[SGA7] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 288, 340, Springer-Verlag, Berlin.