$\mathrm{GL}(n)$ の局所ラングランズ対応

三枝 洋一（東京大学大学院数理科学研究科）

目 次

0　はじめに

F を p 進体とする．本稿のタイトルにある「$\mathrm{GL}(n)$ の局所ラングランズ対応」とは，$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現（あるいは同じことだが，既約許容表現）と F の n 次元 Galois 表現とを結び付ける理論である．この対応は，$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約表現（一般には無限次元）を Galois 群（より正確には，Weil 群）の有限次元表現という「分かりやすい」対象によってパラメータ付けていると見ることもできるし，F の Galois 表現という数論的に興味深い対象を，組織的に研究の進んでいる簡約群の表現論によって理解することができると見ることもできる．このように，どちらか一方の側が簡単だとも言い切れず，それぞれに調べやすいところと調べにくいところのある二つの世界が結び付いているのがラングランズ対応の大きな魅力だといえる．さらに，局所ラングランズ対応は代数体上の大域ラングランズ対応（これは保型表現と大域的 Galois 表現の間の対応であり，大域類体論の一般化とみなすことができる）の局所成分を記述するという，より数論的な役割も持っている．p 進簡約群の表現論は，まさに局所ラングランズ対応の存在によって，実簡約 Lie 群の表現論の変種という表現論的興味にとどまらない深い数論的意義を獲得しているといえよう．

局所ラングランズ対応は全く違った二つの数学的対象を結び付けているので，対応が存在するということだけからも多くの示唆が得られる．その代表的な例として，ラングランズ関手性が挙げられる．局所ラングランズ対応における Galois 表現の側は有限次元表現が対象となるので，表現の制限や誘導，直和やテンソル積などの通常の表現論的操作が可能である．したがって，p 進簡約群の表現論の側にも対応する操作があるはずだという予想を立てることができる．このような表現の対応をラングランズ関手性と呼ぶ．これは保型形式の底変換の理論（の局所版）や Weil 表現による $\mathrm{GL}_2(F)$ の超尖点表現の構成などの古典的理論を含んでいる．また，エンドスコピーリフトと呼ばれる特別な形の（しかし多くの古典的理論を含む）ラングランズ関手性については，Langlands によって提示された安定跡公式を用いる方針に沿う形で，現在に至るまでに膨大な結果が蓄積されている．本稿では，単に局所ラングランズ対応の主張を紹介するだけではなく，ラングランズ関手性についてもなるべく詳しい説明を与えるようにした．局所ラングランズ対応の例や証明を考える際には随所にラングランズ関手性が現れることからも，その重要性は理解していただけると思う．

一般の連結簡約代数群 G に対しても局所ラングランズ対応を定式化することが可能であり，G が Sp_{2n} や SO_{2n+1} の場合などには（跡公式の安定化に関するいくつかの残された技術的問題を除けば）証明されているが，そのなかでも $G=\mathrm{GL}_n$ の場合は特別な重要性を有している．$G\neq\mathrm{GL}_n$ の場合に現状で知られている局所ラングランズ対応の証明は，$G(F)$ の既約表現と $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約表現を表現論的手法によって関連付け，GL_n の局所ラングランズ対応に帰着させることによって行われるからである（言い換えると，G と GL_n の間のラングランズ関手性を証明す

るということになる）．一方，$G = \mathrm{GL}_n$ の場合には，志村多様体論を始めとする数論幾何的な道具立てを駆使することで，直接 $\mathrm{GL}_n(F)$ の表現と局所 Galois 表現の間の橋渡しをしなくてはならない．$G = \mathrm{U}(2), \mathrm{U}(3)$ の場合には池松氏による解説 [池松] があるので，本稿では $G = \mathrm{GL}_n$ の場合に絞って話を進めることにした．ただ，なるべく一般の G に対しても通用するような定式化を行うように努めたつもりである．

本稿の構成について述べる．まず第 1 節では，$\mathrm{GL}_n(F)$ の許容表現の理論を概観する．この部分は本報告集の他の解説との重複もあり，また文献も多いため，証明などはほとんど省略している．その一方で，本稿単独でも読みやすいように，記号の固定も兼ねて，重要な定義や定理は一通り紹介しておいた．既に述べたように，大域ラングランズ対応との関係（局所・大域整合性）は局所ラングランズ対応の無視できない重要な一面であり，局所ラングランズ対応自体の証明にも必要となる．大域ラングランズ対応を正確に述べるための準備として，第 1 節の後半では $\mathrm{GL}(n)$ の保型表現論について少し詳しく解説を行った．サマースクールにおいては残念ながらほとんど言及されなかったが，保型表現論との関係は p 進簡約群の表現論を考える主要な動機である．この部分の解説が補足として役立てば幸いである．第 2 節では，Galois 表現側の基本事項について簡単にまとめた．続く第 3 節は局所ラングランズ対応の解説に充てられている．まず局所ラングランズ対応の純表現論的な性質をまとめた後，大域ラングランズ対応との関係について述べる．その後，ラングランズ関手性の例である底変換と保型誘導を導入する．これらはいずれも局所ラングランズ対応の証明に登場するものである．最後に，超尖点表現に対する局所ラングランズ対応の最も簡単な例として，Deligne-Lusztig 表現から構成される深度 0 の超尖点表現がどのような Galois 表現に対応するかを見る（ここでも保型誘導の理論が用いられる）．局所ラングランズ対応がどのようなものかを知りたい読者は，この第 3 節まで読めば十分であろう．

残りの部分である第 4 節では，局所ラングランズ対応の証明について解説する．証明の方法はいくつかあるが，私の知っている中で最も見通しがよいものを選んだつもりである．ただ，文献のない証明であるため，ある程度詳しく書かざるを得ず，本節は想定よりも長くなってしまった．既に述べたように，$\mathrm{GL}(n)$ の局所ラングランズ対応の証明においては数論幾何的な技術が駆使されるが，読みやすさを重視して，なるべく数論幾何の部分を分離するように努めた．まず 4.1 節では，数論幾何を使う部分をブラックボックスとして定理の形で述べ，それからどのように表現論的な議論を行って主定理を導くかを説明した．この小節だけでも証明の雰囲気は伝わると思う．続く 4.2 節，4.3 節では，p 可除群やエタールコホモロジー，リジッド幾何などの知識を仮定して，ブラックボックスの中身についてのより詳しい解説を試みた．

局所ラングランズ対応はヒドラのような予想だ（[HT01, p. 1]，[伊藤]）とはよ

く言ったもので，一つの項目について解説を書くと二つ書きたいことが生まれるという状況で，いつのまにかこのように長大な解説記事となってしまった．筆者の力不足をお詫びしたい．また，原稿の執筆も締切よりかなり遅れてしまい，サマースクール世話人の皆様には多大なご迷惑をおかけした．この場を借りてお詫びするとともに，原稿の完成を辛抱強く待ってくださったことを感謝する．

記号・用語

本稿全体にわたり，特に断りのない限り以下の記号を用いる．p を素数とし，F を p 進体（$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大）とする．F の整数環を $\mathcal{O}_F$ とし，その素元 ϖ を一つ固定する．$\mathcal{O}_F$ の剰余体 $\mathcal{O}_F/\varpi\mathcal{O}_F$ を κ で表し，その位数を q とおく．$v_F\colon F^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$ を F の正規化された加法的付値とする．$F=\mathbb{Q}_p$ のときは $v_{\mathbb{Q}_p}$ のことを単に v_p と書く．$|{-}|\colon F \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を F の p 進絶対値とする．$a \in F^\times$ に対し $|a| = q^{-v_F(a)}$ である．

1 $\mathrm{GL}(n)$ の許容表現

1.1 基本事項の復習

まずはじめに，表現論に関する基本事項を簡単に思い出しておく．詳細については [BH06] の冒頭部などを参照されたい．

G を局所副有限群（コンパクト開部分群からなる単位元の基本近傍系を持つような位相群）とし，以下では G の $\mathbb{C}$ 上の表現を考える．(π, V) を G の表現とするとき，$v \in V$ が**スムーズ**であるとは，$\mathrm{Stab}_G(v) = \{g \in G \mid \pi(g)v = v\}$ が G の開部分群になることをいう．V のスムーズな元全体を V^{sm} と書き，V の**スムーズ部分**と呼ぶ．$V = V^{\mathrm{sm}}$ であるとき，すなわち任意の $v \in V$ に対し $\mathrm{Stab}_G(v)$ が G の開部分群になるとき，(π, V) は**スムーズ表現**であるという．G のコンパクト開部分群 K に対し，V の K 不変部分 $\{v \in V \mid \pi(k)v = v\ (k \in K)\}$ を V^K と書くことにする．このとき，G が局所副有限群であるという仮定から，$V^{\mathrm{sm}} = \bigcup_{K \subset G\colon \text{コンパクト開部分群}} V^K$ となる．G のスムーズ表現のなす圏 $\mathbf{Rep}(G)$（射は G 準同型，すなわち G の作用と可換な $\mathbb{C}$ 線型写像とする）はアーベル圏になる．これはほぼ明らかであろう．

G のスムーズ表現 (π, V) が**許容表現**であるとは，G の任意のコンパクト開部分群 K に対し，V^K が有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間となることをいう．有限次元スムーズ表現はもちろん許容表現であるが，実際は無限次元の許容表現がほとんどである．G の許容表現のなす圏は $\mathbf{Rep}(G)$ の部分アーベル圏となる．これは許容表現の商表現がまた許容表現になるという若干非自明な主張（系 1.7 i) において示す）の帰結である．

(π, V) を G のスムーズ表現とするとき，その代数的な双対表現 (π^*, V^*) ($V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$) は一般にはスムーズ表現ではない．$V^\vee = (V^*)^{\mathrm{sm}}$ とおき，π^* の $V^\vee$

への制限を $\pi^\vee$ と書くと，$(\pi^\vee, V^\vee)$ は G のスムーズ表現である．これを (π, V) の**反傾表現**と呼ぶ．後で示すように（系 1.7 ii) 参照)，$(V^\vee)^K = (V^K)^*$ が成立する．特に，$(-)^\vee$ は $\mathbf{Rep}(G)$ から $\mathbf{Rep}(G)$ への完全な反変関手を与える．また，自然な G 準同型 $\pi \longrightarrow \pi^{\vee\vee}$ があるが，これは一般には同型ではなく，これが同型になることと (π, V) が許容表現であることは同値である．

有限群の表現論のときと同様，スムーズ表現 (π, V) が既約表現であるとは，$V \neq 0$ かつ，$0 \subsetneq W \subsetneq V$ となる G 安定な部分空間 W が存在しないことと定義する．一般に，π が既約であっても $\pi^\vee$ が既約であるとは限らないが，π が既約許容表現ならば $\pi^\vee$ も既約許容表現となる．

$\mathrm{GL}(n)$ の局所ラングランズ対応においては，$G = \mathrm{GL}_n(F)$（F は p 進体）の場合の既約許容表現の分類がテーマとなる．次の定理により，$G = \mathrm{GL}_n(F)$ の場合には既約許容表現と既約スムーズ表現は同じものである：

定理 1.1

$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約なスムーズ表現は許容表現である．

どちらでも同じなので，本稿では基本的に「既約スムーズ表現」という言葉づかいをする．上の定理は F 上の簡約代数群 $\mathbf{G}$ に対する $\mathbf{G}(F)$ に対しても成立するが，一般の局所副有限群に対して成り立つわけではないことに注意せよ．例えば [BH06, 8.2, Remark] において反傾表現 $\pi^\vee$ が既約にならない既約スムーズ表現 π の例が与えられているが，上に述べたことからこの π は許容的でない．

$G = \mathrm{GL}_n(F)$ の場合などには，既約表現に対する Schur の補題が成立する：

補題 1.2

G のあるコンパクト開部分群 K に対し，G/K が可算集合になると仮定する．このとき，G の既約スムーズ表現 (π, V) に対し， $\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi) = \mathbb{C}$ が成立する．すなわち，π から π への G 準同型はスカラー倍しか存在しない．

証明は濃度の議論によって行われる．[BH06, §2] などを参照．なお，(π, V) が既約許容表現の場合には G に対する仮定なしに Schur の補題が成立する．

例 1.3

$G = \mathrm{GL}_n(F)$ の場合を考える．$K = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ とおくと，これは G のコンパクト開部分群である．G/K の元は F^n の $\mathcal{O}_F$ 格子と $\overline{g} \mapsto g\mathcal{O}_F^n$ によって一対一に対応する．後者は可算集合であることが容易に分かるので，G/K も可算集合であり，$G = \mathrm{GL}_n(F)$ は上の補題の条件を満たすことが分かる．

より一般に，$\mathbf{G}$ を F 上の線型代数群とし，$G = \mathbf{G}(F)$ とすると，G はある n に対する $\mathrm{GL}_n(F)$ の閉部分群であるから，$K = G \cap \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ とおくと G/K は可算

集合である．したがって $G = \mathbf{G}(F)$ は上の補題の条件を満たす．

G が補題 1.2 の仮定を満たすとし，G の中心を Z_G と書く．このとき，G の既約スムーズ表現 (π, V) に対し，$\pi(z)$ $(z \in Z_G)$ は V にスカラー倍で作用する．このスカラーを $\omega_\pi(z)$ と書くと，$\omega_\pi\colon Z_G \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ は Z_G のスムーズ指標である．これを (π, V) の**中心指標**と呼ぶ．

次に，許容表現を扱う際に重要な役割を果たす Hecke 代数について復習する．以下では，G の Haar 測度を一つ固定する．

定義 1.4

G 上の $\mathbb{C}$ 値局所定数関数でコンパクト台を持つもの全体を $\mathcal{H}(G)$ と書き，G の **Hecke 代数**と呼ぶ．$\mathcal{H}(G)$ は通常の加法および畳み込み積

$$(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(h) f_2(h^{-1}g) dh$$

によって $\mathbb{C}$ 代数となる．

G のコンパクト開部分群 K に対し，$\mathcal{H}(G)$ の元で両側 K 不変なもの全体を $\mathcal{H}(G, K)$ と書く．これは $\mathcal{H}(G)$ の部分 $\mathbb{C}$ 代数である．$\mathcal{H}(G) = \bigcup_{K \subset G} \mathcal{H}(G, K)$ が成り立つ．

次は容易である．

命題 1.5

G のコンパクト開部分群 K に対し，K の特性関数を $\mathbf{1}_K$ と書き，$e_K = \mathrm{vol}(K)^{-1}\mathbf{1}_K$ とおく．このとき，次が成り立つ：

$$e_K * e_K = e_K, \quad \mathcal{H}(G, K) = e_K * \mathcal{H}(G) * e_K.$$

特に $e_K \in \mathcal{H}(G, K)$ であり，$\mathcal{H}(G, K)$ は e_K を単位元に持つ．

これに対し，$\mathcal{H}(G)$ は一般に単位元を持たない．

(π, V) を G のスムーズ表現とするとき，$v \in V$ および $f \in \mathcal{H}(G)$ に対して

$$\pi(f)v = \int_G f(g)\pi(g)v \, dg$$

と定めると，V は $\mathcal{H}(G)$ 加群となり，$\mathcal{H}(G)V = V$ を満たす（$\mathcal{H}(G)$ は単位元を持つとは限らないので，これは非自明な等式である）．逆に，$\mathcal{H}(G)V = V$ を満たす

$\mathcal{H}(G)$ 加群は G のスムーズ表現から上のような手続きで作られる[注1]．これにより，$\mathbf{Rep}(G)$ は $\mathcal{H}(G)$ 加群 V で $\mathcal{H}(G)V=V$ を満たすもの（非退化加群と呼ばれる）の圏と圏同値になる．

Hecke 代数の作用を用いると，例えば次のようなことが証明できる．

命題 1.6

(π,V) を G のスムーズ表現とする．K を G のコンパクト開部分群とするとき，次が成り立つ：

i) $\pi(e_K)\colon V\longrightarrow V$ の像は V^K であり，核は $\{\pi(k)v-v\mid k\in K\}$ で $\mathbb{C}$ 上生成される．

ii) $V_K=V/\langle\pi(k)v-v\mid k\in K\rangle$ を V の K 余不変商 (coinvariant quotient) とすると，自然な写像 $V^K\longrightarrow V_K$ は同型である．

略証　$\pi(e_K)\colon V\longrightarrow V$ は線型写像 $V_K\longrightarrow V^K$ を誘導する．これは自然な写像 $V^K\longrightarrow V_K$ の逆写像となっているので，ii) が従う．i) は $\pi(e_K)\colon V_K\longrightarrow V^K$ が全単射であることの言い換えに他ならない．■

系 1.7

i) (π,V) を G の許容表現とし，(π',V') をその商表現とする．このとき，(π',V') も許容表現である．

ii) (π,V) を G のスムーズ表現とし，K を G のコンパクト開部分群とするとき，$(V^\vee)^K\cong(V^K)^*$ である．

証明　i) K を G のコンパクト開部分群とすると，$V_K\longrightarrow V'_K$ は明らかに全射である．命題 1.6 ii) より $V_K\cong V^K$, $V'_K\cong V'^K$ である．(π,V) の許容性より前者は有限次元なので後者も有限次元であり，(π',V') が許容表現であることが分かる．

ii) $V^\vee$ の定義より，$(V^\vee)^K=(V^*)^K$ である．命題 1.6 ii) より

$$(V^*)^K=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C})^K=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_K,\mathbb{C})\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^K,\mathbb{C})=(V^K)^*$$

となるのでよい．■

K を G のコンパクト開部分群とする．(π,V) を G のスムーズ表現とするとき，$V^K=\pi(e_K)V$ なので，V^K には $\mathcal{H}(G,K)=e_K*\mathcal{H}(G)*e_K$ が作用することに注意しよう．これによって，$V^K\neq 0$ となるような既約許容表現 (π,V) を単純 $\mathcal{H}(G,K)$ 加群として捉えることができる：

[注1] 具体的に $g\in G$ の作用を決めるには，以下のようにすればよい：$\mathcal{H}(G)V=V$ および $\mathcal{H}(G)=\bigcup_{K\subset G}\mathcal{H}(G,K)=\bigcup_{K\subset G}e_K*\mathcal{H}(G)*e_K$ より，$v\in V$ に対し，$v=\pi(e_K)v'$ となる $K\subset G$, $v'\in V$ が存在する．このとき，$\pi(g)v=\mathrm{vol}(K)^{-1}\pi(\mathbf{1}_{gK})v'$ と定める．

定理 1.8
$V \mapsto V^K$ は次の 2 つの集合の間の全単射を与える：
- G の既約許容表現 (π, V) で $V^K \neq 0$ を満たすものの同型類.
- 有限次元単純 $\mathcal{H}(G, K)$ 加群の同型類.

証明は [BH06, 4.3] 等を参照．この考え方は，後に $(G, K) = (\mathrm{GL}_n(F), \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F))$ に対して適用される（不分岐表現）．また，K が $\mathrm{GL}_n(F)$ の岩堀部分群（$\bmod \varpi$ して上三角行列になる $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ の元全体）の場合にも有効である [注 2]．この場合に対応する Hecke 代数をアフィン Hecke 代数と呼ぶ.

Hecke 代数は許容表現の指標を考える際にも不可欠である.

定義 1.9
(π, V) を G の許容表現とするとき, 各 $f \in \mathcal{H}(G)$ に対して $f \in \mathcal{H}(G, K)$ となるコンパクト開部分群 K をとると, $\mathrm{Im}\, \pi(f) \subset V^K$ であるから, $\mathrm{Tr}\, \pi(f) = \mathrm{Tr}(\pi(f); V^K)$ と定義する．これは K のとり方によらない.
線型写像 $\mathcal{H}(G) \longrightarrow \mathbb{C};\ f \mapsto \mathrm{Tr}\, \pi(f)$ を Tr_π と書き，π の**指標超関数**と呼ぶ.

(π, V) が既約（あるいは長さ有限）であり，G が F 上の連結簡約代数群 $\mathbf{G}$ を用いて $\mathbf{G}(F)$ と書けるときには，Tr_π は G 上の局所 L^1 関数によって与えられる.

定理 1.10
$\mathbf{G}$ を F 上の連結簡約代数群（例えば GL_n）とし，$G = \mathbf{G}(F)$ とする．G の正則半単純元（GL_n なら固有値が相異なる元）全体のなす開集合を G^{rs} と書く．G の既約スムーズ表現 (π, V) に対し，以下が成り立つ：

i) Tr_π の G^{rs} への制限は局所定数関数である．すなわち，G^{rs} 上の局所定数関数 θ_π が（一意的に）存在して，$f \in \mathcal{H}(G)$ が $\mathrm{supp}\, f \subset G^{\mathrm{rs}}$ を満たすならば
$$\mathrm{Tr}_\pi(f) = \int_{G^{\mathrm{rs}}} f(g)\theta_\pi(g)dg$$
が成り立つ.

ii) i) の θ_π は G 上の局所 L^1 関数であり，任意の $f \in \mathcal{H}(G)$ に対し
$$\mathrm{Tr}_\pi(f) = \int_{G^{\mathrm{rs}}} f(g)\theta_\pi(g)dg$$
が成り立つ（右辺の積分が収束することが「局所 L^1 関数」の意味である）.

[注 2] この場合は，より強く，V^K が V を生成するようなスムーズ表現 (π, V) の圏と $\mathcal{H}(G, K)$ 加群の圏に $V \mapsto V^K$ で与えられる圏同値が存在する.

i) の証明は比較的容易である（[HC80] 参照）．一方，ii) の証明はかなり難しい（[HC99, Theorem 16.3] 参照）．ここで導入した θ_π は，後に底変換や保型誘導，局所 Jacquet-Langlands 対応などを述べる際に用いられる．

最後に，小さい群の表現から大きい群の表現を構成する典型的な方法である誘導表現について思い出しておく．H を G の閉部分群とし，δ_G, δ_H を G, H のモジュラー指標 注 3 とする．

定義 1.11
(σ, W) を H のスムーズ表現とするとき，$\mathbb{C}$ ベクトル空間

$$\{f\colon G \longrightarrow W \mid f(hg) = \sigma(h)f(g)\ (g \in G, h \in H)\}$$

は右移動による作用によって G の表現となる．これのスムーズ部分として得られる G の表現を $(\mathrm{Ind}_H^G\,\sigma, \mathrm{Ind}_H^G\,W)$ と書き，H から G への**誘導表現**と呼ぶ．
$\mathrm{Ind}_H^G(\delta_G^{1/2}\delta_H^{-1/2} \otimes \sigma)$ を n-$\mathrm{Ind}_H^G\,\sigma$ と書き，**正規化誘導表現**と呼ぶ．

Ind_H^G は制限関手 Res_H^G の右随伴関手となっている（Frobenius 相互律）．n-Ind_H^G は，ユニタリ表現がユニタリ表現にうつり，反傾表現が反傾表現にうつるように誘導表現を正規化したものである．n-Ind の方を Ind と書く場合も多い．

$G = \mathrm{GL}_n(F)$ の場合には，H として放物型部分群を考えるのが有効である．B を上三角行列よりなる GL_n の Borel 部分群とするとき，B を含む GL_n の連結部分代数群を GL_n の**標準放物型部分群**と呼ぶのであった．GL_n の標準放物型部分群は n の分割 $n = n_1 + \cdots + n_k$ と一対一に対応する．一般の放物型部分群は，標準放物型部分群と共役な部分群のことを指す．

P を GL_n の放物型部分群とし，N_P をその冪単根基とする．Levi 商 $L_P = P/N_P$ は GL いくつかの直積と同型である（P が分割 $n = n_1 + \cdots + n_k$ と対応する標準放物型部分群なら，$L_P \cong \mathrm{GL}_{n_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_k}$）．$L_P(F)$ のスムーズ表現 σ に対し，それを全射 $P(F) \twoheadrightarrow L_P(F)$ によって $P(F)$ のスムーズ表現とみなし，誘導表現をとったものを $\mathrm{Ind}_{P(F)}^G\,\sigma$ と書く．正規化誘導の方は n-$\mathrm{Ind}_{P(F)}^G\,\sigma$ と書く．これらを**放物型誘導表現**と呼ぶ．放物型誘導は通常の誘導表現とは少し異なり，$L_P(F)$ の表現を $P(F)$ の表現にのばすというステップがあるため，その左随伴関手は制限関手ではなく，**Jacquet 関手**と呼ばれるものになる．Jacquet 関手は $\mathrm{GL}_n(F)$ の表現論において極めて重要ではあるが，以下で直接現れることがほとんどないため 注 4，解説は割愛する．

注 3 G の左 Haar 測度を dg としたとき，$d(gx) = \delta_G(x)dg\ (x \in G)$ で決まる指標のこと．$\delta_G^{-1}(g)dg$ は右 Haar 測度となる．G が F 上の簡約代数群の F 値点ならば δ_G は自明な指標である．
注 4 4.3 節でのみ登場する．

放物型誘導表現については以下が基本的である：

命題 1.12
$L_P(F)$ のスムーズ表現 σ に対し，以下が成り立つ：
i) σ が許容表現ならば，$\mathrm{Ind}_{P(F)}^G \sigma$, $\text{n-Ind}_{P(F)}^G \sigma$ は G の許容表現である．
ii) σ が既約ならば，$\mathrm{Ind}_{P(F)}^G \sigma$, $\text{n-Ind}_{P(F)}^G \sigma$ は G の表現として長さ有限である．

i) は $G/P(F)$ がコンパクトであること（$P(F)$ が比較的「大きい」部分群であること）の帰結であり，証明は易しい．ii) は幾何的補題を用いて示される．

この命題より，小さい GL の既約スムーズ表現の放物型誘導を既約分解することで，$\mathrm{GL}_n(F)$ の非自明な既約スムーズ表現が得られることが期待される．これについては次小節でもう少し説明する．

誘導表現の変種に，コンパクト誘導表現というものがある．コンパクト誘導表現は H が G の開部分群である場合によく用いられるため，以下ではそのように仮定する（下記の定義そのものは H が G の閉部分群であっても通用するが，その下の説明は通用しない）．

定義 1.13
(σ, W) を H のスムーズ表現とする．$f \in \mathrm{Ind}_H^G W$ のうち $\operatorname{supp} f$ が H を法としてコンパクトなもの全体は G 不変な部分空間である．こうして得られる G の表現を $(\text{c-Ind}_H^G \sigma, \text{c-Ind}_H^G W)$ と書き，H から G への**コンパクト誘導表現**と呼ぶ．

$\mathrm{Ind}_H^G W$ は

$$\{f\colon G \longrightarrow W \mid f(hg) = \sigma(h)f(g), \operatorname{supp} f \text{ は } H \text{ を法としてコンパクト}\}$$

と記述することもできる（この空間の元は自動的にスムーズになる）．H が G の開部分群ならば $\delta_G = \delta_H$ であるから，正規化の必要はない．c-Ind_H^G は Res_H^G の左随伴関手であり，$(\text{c-Ind}_H^G \sigma)^\vee = \mathrm{Ind}_H^G \sigma^\vee$ が成り立つ．

c-Ind_H^G は有限生成表現を有限生成表現にうつすが，一般に許容表現を許容表現にうつすとは限らない．

コンパクト誘導表現は，$\mathrm{GL}_n(F)$ の超尖点表現を構成する際などに用いられる (3.4 節参照)．

1.2　Zelevinsky 分類

$n \geq 1$ を整数とする．$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現は行列係数の漸近挙動によっていくつかのクラスに分けられる．まず，行列係数の定義を思い出しておく．

定義 1.14
(π, V) を $\mathrm{GL}_n(F)$ のスムーズ表現とするとき，$v \in V$, $v^\vee \in V^\vee$ に対し $\mathrm{GL}_n(F)$ 上の関数 $f_{v,v^\vee}$ を $f_{v,v^\vee}(g) = \langle \pi(g)v, v^\vee \rangle$ で定める．このようにして得られる関数を π の**行列係数**と呼ぶ．

定義 1.15
π を $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現とする．

i) π が**超尖点表現**であるとは，π の任意の行列係数の台が $\mathrm{GL}_n(F)$ の中心 $F^\times$ を法としてコンパクトであることをいう．

ii) π が**二乗可積分表現**であるとは，π の中心指標 ω_π がユニタリであり，かつ π の任意の行列係数 f が $\int_{\mathrm{GL}_n(F)/F^\times} |f(g)|^2 dg < \infty$ を満たすことをいう ($z \in F^\times$, $g \in \mathrm{GL}_n(F)$ に対し $f(zg) = \omega_\pi(z) f(g)$ であるから，$|f(g)|$ は $\mathrm{GL}_n(F)/F^\times$ 上の関数となることに注意)．

iii) π が**緩増加表現**であるとは，π の中心指標 ω_π がユニタリであり，かつ π の任意の行列係数 f および任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対し $\int_{\mathrm{GL}_n(F)/F^\times} |f(g)|^{2+\varepsilon} dg < \infty$ となることをいう．

iv) π が**本質的二乗可積分表現**あるいは**離散系列表現**であるとは，$\mathrm{GL}_n(F)$ の指標 χ をうまくとると $\pi \otimes \chi$ が二乗可積分表現となることをいう．π が**本質的緩増加表現**であることも同様に定義する．

注意 1.16

i) π の既約性より，条件中の「任意の行列係数」は「ある 0 でない行列係数」に置き換えても同じことである．

ii) 「離散系列表現」という用語は二乗可積分表現を指すことも多い．

iii) π が二乗可積分表現であることは，π がユニタリな離散系列表現であることと同値である．実際，(π, V) が二乗可積分表現ならば，$v_0^\vee \in V^\vee \setminus \{0\}$ を固定し，$v, v' \in V$ に対して

$$(v, v') = \int_{GL_n(F)/F^\times} \langle \pi(g)v, v_0^\vee \rangle \overline{\langle \pi(g)v', v_0^\vee \rangle} dg$$

($\langle -, - \rangle \colon V \times V^\vee \longrightarrow \mathbb{C}$ は自然なペアリング）とおくと $(-, -)$ は V 上の G 不変な内積を定める．逆に，π がユニタリな離散系列表現であるとする．明らかに ω_π はユニタリである．また $\pi \otimes \chi$ が二乗可積分表現となるような指標 χ もユニタリである．このことから，π の行列係数の絶対値は $\pi \otimes \chi$ の行列係数の絶対値と一致するので，π が二乗可積分表現であることが従う．

注意 1.17

行列係数の代わりに Jacquet 加群を用いて上記の表現のクラスを特徴付けることもできる（[森山] 参照）．実用的にはこちらが便利であることも多い．

次の定理が示すように，超尖点表現とは，より小さい群からの放物型誘導表現としては決して得られない表現のことである．

定理 1.18

$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現 π に対し，以下は同値である：

- π は超尖点表現である．
- 任意の放物型部分群 $P \subsetneq \mathrm{GL}_n$ および $L_P(F)$ の既約スムーズ表現 σ に対し，π は $\text{n-Ind}_{P(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)} \sigma$ の部分商に現れない．

本節の残りの部分では，超尖点表現を構成要素として，$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現をどのように表すことができるかについて概観する．次の定理はかなり粗い結果であるが，一般の連結簡約代数群に対しても通用するものである：

定理 1.19

(π, V) を $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現とするとき，GL_n の標準放物型部分群 P および $L_P(F)$ の既約超尖点表現 σ が存在して，$\text{n-Ind}_{P(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)} \sigma$ は π を部分商として含む．

P に対応する n の分割を $n = n_1 + \cdots + n_k$ とすると，$L_P(F) = \mathrm{GL}_{n_1}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_k}(F)$ である．したがって，$L_P(F)$ の既約超尖点表現 σ は，$\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ の既約超尖点表現 π_i $(1 \leq i \leq k)$ を用いて $\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_k$ と書くことができる．

定義 1.20

π を $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現とする．π が $\text{n-Ind}_{P(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_k)$ の部分商に現れるように P および $\pi_1, \ldots, \pi_k$ をとると，多重集合 $\{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$（元に重複があるかもしれない）は π に対して well-defined に決まる．この多重集合を π の**超尖点台**と呼び，$\mathrm{supp}(\pi)$ と書く．

超尖点台の well-definedness の証明については [BZ77, Theorem 2.9] を参照．

次に，より精密な結果として，

（超尖点表現）$\subset$（離散系列表現）$\subset$（本質的緩増加表現）$\subset$（既約スムーズ表現）

という包含において隣接する表現のクラスの相互関係を順に見ていくことにする．

まず，離散系列表現は超尖点表現を用いて以下のように分類される．

定義 1.21

m を n の約数とし，P_m を分割 $n = n/m + \cdots + n/m$ に対応する標準放物型部分群とする．$\mathrm{GL}_{n/m}(F)$ の既約超尖点表現 π に対し，

$$\text{n-Ind}_{P_m(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}\Big(\pi \otimes |\det|^{\frac{1-m}{2}} \boxtimes \cdots \boxtimes \pi \otimes |\det|^{\frac{m-1}{2}}\Big)$$

（$|\det|\colon \mathrm{GL}_{n/m}(F) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ は $\det$ と p 進絶対値 $|-|$ の合成）は唯一の既約商を持つ．これを $\mathrm{St}_m(\pi)$ と書き，**一般化 Steinberg 表現**と呼ぶ．

定理 1.22（Bernstein, [Zel80, Theorem 9.3]）

$\mathrm{St}_m(\pi)$ は既約離散系列表現である．逆に，$\mathrm{GL}_n(F)$ の任意の既約離散系列表現はこの形に一意的に書くことができる．

この定理は GL_n 特有のものである．F 上の一般の連結簡約代数群 $\mathbf{G}$ に対し，$\mathbf{G}(F)$ の既約離散系列表現を超尖点表現を用いて記述する統一的な方法は知られていないと思う．個別の群に対しては [MT02] や [Mœg07] などの結果がある．

例 1.23

$m = n$ かつ $\pi = \mathbf{1}$（自明表現）のとき，$\mathrm{St}_n(\mathbf{1})$ を単に St_n と書き，**Steinberg 表現**と呼ぶ．St_n は $\mathrm{Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}\mathbf{1}$ の唯一の既約商である．

次に，離散系列表現を用いて本質的緩増加表現がどのように表されるかを述べる．

定理 1.24

$n = n_1 + \cdots + n_k$ を n の分割とし，対応する標準放物型部分群を P とする．π_i を $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ の既約離散系列表現とする．π_i の中心指標の複素絶対値は実数 s_i を用いて $|-|^{s_i}$ という形に書けるが，それが $n_1^{-1}s_1 = \cdots = n_k^{-1}s_k$ を満たしていると仮定する．このとき，放物型誘導表現 $\text{n-Ind}_{P(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_k)$ は既約本質的緩増加表現となる．この放物型誘導表現は $\pi_1, \ldots, \pi_k$ の並べ換えによって不変である．逆に，$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約本質的緩増加表現は $\text{n-Ind}_{P(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_k)$ という形に $\pi_1, \ldots, \pi_k$ の並べ換えを除いて一意的に書くことができる．

この定理は, 連結簡約代数群に対する R 群の理論 ([成田] 参照) の特別な場合と考えることができる．GL_n の場合は R 群が自明になるので, 放物型誘導 $\text{n-Ind}_{P(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_k)$ が既約になるということである．

最後に，一般の既約スムーズ表現が本質的緩増加表現を用いてどのように記述されるかを紹介する．

定理 1.25（Langlands 分類）
$n = n_1 + \cdots + n_k$ を n の分割とし，対応する標準放物型部分群を P とする．π_i を $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ の既約本質的緩増加表現とする．π_i の中心指標の複素絶対値は実数 s_i を用いて $|-|^{s_i}$ という形に書けるが，それが $n_1^{-1}s_1 > \cdots > n_k^{-1}s_k$ を満たしていると仮定する．このとき，放物型誘導表現 $\text{n-Ind}_{P(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_k)$ は唯一の既約商を持つ．

逆に，$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現 π に対し，n の分割 $n = n_1 + \cdots + n_k$ および $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ の既約本質的緩増加表現 π_i で上記の仮定を満たすものが一意的に存在して，π は $\text{n-Ind}_{P(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_k)$ の既約商となる．

この定理は，一般の連結簡約代数群に対してもそのまま通用する．証明は [Ren10, VII.4.2] を参照．

定理 1.24 と定理 1.25 を組み合わせた記号を導入しよう．

定義 1.26
$n = n_1 + \cdots + n_k$ を n の分割とし，対応する標準放物型部分群を P とする．π_i を $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ の既約離散系列表現とする．π_i の中心指標の複素絶対値は実数 s_i を用いて $|-|^{s_i}$ という形に書ける．$\pi_1, \ldots, \pi_k$ を並べ換えて，$n_1^{-1}s_1 \geq \cdots \geq n_k^{-1}s_k$ となるようにしておく．このとき，放物型誘導表現 $\text{n-Ind}_{P(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_k)$ は唯一の既約商を持つ．この既約商を $\pi_1 \boxplus \cdots \boxplus \pi_k$ と書き，$\pi_1, \ldots, \pi_k$ の**ラングランズ和**と呼ぶ．$\pi_1 \boxplus \cdots \boxplus \pi_k$ は $\pi_1, \ldots, \pi_k$ の並べ換えによらない．

例 1.27
$n = 2$ の分割 $2 = 1{+}1$ を考える．$\mathrm{GL}_1(F)$ の指標として $\chi_1 = |-|^{-1/2}$, $\chi_2 = |-|^{1/2}$ をとる．$\text{n-Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)}(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ の既約商は St_2 であり，$\text{n-Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)}(\chi_2 \boxtimes \chi_1)$ の既約商は自明表現 $\mathbf{1}$ である．定義 1.26 の条件を満たすためには χ_2, χ_1 の順に並べなくてはならないので，$\chi_1 \boxplus \chi_2 = \mathbf{1}$ となる．

ラングランズ和を用いると，$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現は以下のように記述できることが分かる．

系 1.28（Zelevinsky 分類）
$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現 π に対し，
- n の分割 $n = n_1 + \cdots + n_k$
- n_i の約数 m_i
- $\mathrm{GL}_{n_i/m_i}(F)$ の既約超尖点表現 π_i

が存在し，$\pi \cong \mathrm{St}_{m_1}(\pi_1) \boxplus \cdots \boxplus \mathrm{St}_{m_k}(\pi_k)$ となる．

また，同様のデータ $n = n'_1 + \cdots + n'_{k'}$, $m'_i \mid n'_i$, π'_i に対し，

$$\mathrm{St}_{m_1}(\pi_1) \boxplus \cdots \boxplus \mathrm{St}_{m_k}(\pi_k) \cong \mathrm{St}_{m'_1}(\pi'_1) \boxplus \cdots \boxplus \mathrm{St}_{m'_{k'}}(\pi'_{k'})$$

となるためには，$k = k'$ かつ，$(n'_1, m'_1, \pi'_1), \ldots, (n'_k, m'_k, \pi'_k)$ の適切な並べ換えが $(n_1, m_1, \pi_1), \ldots, (n_k, m_k, \pi_k)$ に一致することが必要十分である．

注意 1.29

セグメントによる分類([近藤] 参照)との関係は以下の通りである．$n = n_1 + \cdots + n_k$ を n の分割, m_i を n_i の約数, π_i を GL_{n_i/m_i} の既約超尖点表現とする．また，セグメント Δ_i を $\Delta_i = [\pi_i(\frac{1-m_i}{2}), \ldots, \pi_i(\frac{m_i-1}{2})]$ で定める．このとき，$\mathrm{St}_{m_i}(\pi_i) = \langle \Delta_i \rangle^t$, $\mathrm{St}_{m_1}(\pi_1) \boxplus \cdots \boxplus \mathrm{St}_{m_k}(\pi_k) = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_k \rangle^t$ である．

注意 1.30

$n = n_1 + \cdots + n_k$ を n の分割とし，π_i を $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ の既約スムーズ表現とする．系 1.28 を用いることで，これらのラングランズ和 $\pi_1 \boxplus \cdots \boxplus \pi_k$ を定義することができる．実際，各 i に対して $\pi_i = \pi_{i1} \boxplus \cdots \boxplus \pi_{ik_i}$（$\pi_{ij}$ は既約離散系列表現）と表し，π_{ij} $(1 \le i \le k, 1 \le j \le k_i)$ 全てのラングランズ和をとればよい．

1.3　不分岐表現

$K_0 = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ とおく．これは $\mathrm{GL}_n(F)$ の超スペシャルコンパクト部分群である．

定義 1.31

$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現 π が**不分岐表現**であるとは，$\pi^{K_0} \neq 0$ を満たすことをいう．

定理 1.8 より，このような表現を分類するためには，Hecke 代数 $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F), K_0)$ 上の単純加群を分類すればよいのであった．$\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F), K_0)$ の構造は次の定理で与えられる：

定理 1.32（佐武同型）

$\mathbb{C}$ 代数の同型 $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F), K_0) \cong \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}$ がある．

略証　同型を誘導する写像 $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F), K_0) \longrightarrow \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ の構成のみ行う．対角行列からなる GL_n の部分群を T と書く．また，上三角行列からなる GL_n の Borel 部分群 B の冪単根基を N とする．K_0, $T(F)$, $N(F)$ の Haar 測度 dk, dt, dn を $\mathrm{vol}(K_0) = 1$, $\mathrm{vol}(T(\mathcal{O}_F)) = 1$, $\mathrm{vol}(N(\mathcal{O}_F)) = 1$ となるように正規化しておく．

このとき，$\mathrm{GL}_n(F)$ の Haar 測度 dg で次を満たすものが存在する：

$$\int_{\mathrm{GL}_n(F)} f(g)dg = \int_{T(F)}\int_{N(F)}\int_{K_0} f(tnk)dtdndk.$$

$\mathrm{diag}(t_1,\ldots,t_n)\mapsto(v_F(t_1),\ldots,v_F(t_n))$ により同型 $T(F)/T(\mathcal{O}_F)\xrightarrow{\cong}\mathbb{Z}^n$ が得られるから，$\mathcal{H}(T(F),T(\mathcal{O}_F))\cong\mathbb{C}[X_1^{\pm1},\ldots,X_n^{\pm1}]$ である（$\mathrm{diag}(\varpi^{m_1},\ldots,\varpi^{m_n})T(\mathcal{O}_F)$ の特性関数を $X_1^{m_1}\cdots X_n^{m_n}$ にうつせばよい）．

一方，$f\in\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F),K_0)$ に対し，$f^B\in\mathcal{H}(T(F),T(\mathcal{O}_F))$ が

$$f^B(t)=\delta_B^{-1/2}(t)\int_{N(F)} f(tn)dn$$

で定まる（$t=\mathrm{diag}(t_1,\ldots,t_n)$ に対し，$\delta_B(t)=|t_1|^{-n+1}|t_2|^{-n+3}\cdots|t_n|^{n-1}$ である）．$f\mapsto f^B$ は $\mathbb{C}$ 代数の準同型 $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F),K_0)\longrightarrow\mathcal{H}(T(F),T(\mathcal{O}_F))$ を与えることが確かめられる．これと $\mathcal{H}(T(F),T(\mathcal{O}_F))\cong\mathbb{C}[X_1^{\pm1},\ldots,X_n^{\pm1}]$ を合成したものが求める準同型である． ∎

この定理は F 上の連結簡約代数群に一般化することもできる．一般化した定理の証明は原論文 [Sat63] の他，例えば [Car79, §4.2] にある．$\mathrm{GL}_n(F)$ に限った証明は [Lau96, Chapter 4] に載っている．別の方法として，Bernstein 中心の理論から出すこともできる（[Roc09, Theorem 1.10.3.1] 参照）．

例 1.33

$n=2$ とし，$f_{(\varpi,1)}$ を $K_0\begin{pmatrix}\varpi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}K_0$ の特性関数とする．このとき，$t=\mathrm{diag}(t_1,t_2)$ に対して

$$f^B_{(\varpi,1)}(t)=|t_1|^{1/2}|t_2|^{-1/2}\int_F f_{(\varpi,1)}\left(\begin{pmatrix}t_1 & t_1x+t_2\\ 0 & t_2\end{pmatrix}\right)dx$$

である．単因子論より，$\begin{pmatrix}t_1 & t_1x+t_2\\ 0 & t_2\end{pmatrix}$ が $K_0\begin{pmatrix}\varpi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}K_0$ に属することは $v_F(t_1t_2)=1$ かつ F の分数イデアル (t_1,t_2,t_1x+t_2) が $\mathcal{O}_F$ に一致することと同値である．$v_F(t_1)=1$, $v_F(t_2)=0$ の場合と $v_F(t_1)=0$, $v_F(t_2)=1$ の場合に分けて計算を行うと，$f^B_{(\varpi,1)}=q^{1/2}\mathbf{1}_{\mathrm{diag}(\varpi,1)T(\mathcal{O}_F)}+q^{1/2}\mathbf{1}_{\mathrm{diag}(1,\varpi)T(\mathcal{O}_F)}$ となることが分かる．したがって，$f_{(\varpi,1)}$ の佐武同型による像は $q^{1/2}(X_1+X_2)$ である．

一方，$f_{(\varpi,\varpi)}$ を $K_0\begin{pmatrix}\varpi & 0\\ 0 & \varpi\end{pmatrix}K_0$ の特性関数とすると，同様の計算により，$f_{(\varpi,\varpi)}$ の佐武同型による像は X_1X_2 となることが分かる．$\mathbb{C}[X_1^{\pm1},X_2^{\pm1}]^{\mathfrak{S}_2}$ は $\mathbb{C}$ 代数として X_1+X_2 と $(X_1X_2)^{\pm1}$ で生成されるので，$\mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(F),K_0)$ は $\mathbb{C}$ 代数として $f_{(\varpi,1)}$, $f^{\pm1}_{(\varpi,\varpi)}$ で生成される．

系 1.34

π を $\mathrm{GL}_n(F)$ の不分岐表現とするとき，$\dim_{\mathbb{C}} \pi^{K_0} = 1$ が成り立つ．

証明　定理 1.8 より，π^{K_0} は単純 $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F), K_0)$ 加群である．定理 1.32 より Hecke 代数 $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F), K_0)$ は可換であるから，その上の単純加群は 1 次元である． ∎

定義 1.35

π を $\mathrm{GL}_n(F)$ の不分岐表現とする．$\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F), K_0)$ の π^{K_0} への作用から $\mathbb{C}$ 代数の準同型 $\phi\colon \mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F), K_0) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\pi^{K_0}) = \mathbb{C}$ が定まる（系 1.34 参照）．佐武同型 $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F), K_0) \cong \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}$ から，このような ϕ は順序を考慮しない n 個の 0 でない複素数の組 $(z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n/\mathfrak{S}_n$ と一対一に対応する．具体的には，$s_i \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ を i 次基本対称式とし，$z_1, \ldots, z_n$ を方程式 $T^n - \phi(s_1)T^{n-1} + \cdots + (-1)^n \phi(s_n) = 0$ の根として定める．

この $(z_1, \ldots, z_n)$ を不分岐表現 π の**佐武パラメータ**と呼ぶ．

$\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ 上の単純加群は 1 次元であることに注意すると，定理 1.8 より，$\mathrm{GL}_n(F)$ の不分岐表現の同型類は $(\mathbb{C}^\times)^n/\mathfrak{S}_n$ の元と一対一に対応することが分かる．与えられた佐武パラメータを持つ不分岐表現は，誘導表現を用いて構成することができる：

命題 1.36

$(z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n$ とし，不分岐指標 $\chi_i\colon F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\chi_i(a) = z_i^{v_F(a)}$ で定める．このとき，$\text{n-Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\chi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \chi_n)$ は不分岐な既約部分商 π をただ一つ持つ．π は佐武パラメータが $(z_1, \ldots, z_n)$ である不分岐表現である．

証明　定理 1.32 の略証と同じ記号を用いる．$T(F)$ の指標 χ を $\chi(\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)) = \chi_1(t_1) \cdots \chi_n(t_n)$ で定める．

まず，$(\text{n-Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)} \chi)^{K_0}$ が 1 次元であることを示す．岩澤分解 $\mathrm{GL}_n(F) = B(F)K_0$ と誘導表現の定義から，$f \in (\text{n-Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)} \chi)^{K_0}$ を決めるには $f(1)$ を決めればよい．よって $(\text{n-Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)} \chi)^{K_0}$ は 1 次元以下である．$g \in \mathrm{GL}_n(F)$ に対し $g = bk$ となる $b \in B(F), k \in K_0$ をとり，$\psi_0(g) = \delta_B^{-1/2}(b)\chi(b)$ と定める．$g = bk$ という書き方は一意的ではないが，$\delta_B^{-1/2}\chi$ が $B(F) \cap K_0$ 上で自明であることから，$\psi_0(g)$ は well-defined であることが分かる．$\psi_0 \in (\text{n-Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)} \chi)^{K_0}$ なので $(\text{n-Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)} \chi)^{K_0}$ は 1 次元であることが従う．

関手 $(-)^{K_0}$ の完全性と $\text{n-Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)} \chi$ が長さ有限であることから，$\text{n-Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)} \chi$ が不分岐な既約部分商 π を一つだけ持つことが直ちに分かる．π の佐武パラメータを計算するには，$(\text{n-Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)} \chi)^{K_0} = \mathbb{C}\psi_0$ への $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F), K_0)$ の作用を見れば

よい．$f \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F), K_0)$ が $\psi_0 \in \text{n-Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)} \chi$ に c 倍で作用するとし，佐武同型による f の像を $P_f(X_1, \ldots, X_n)$ と書くと，

$$\begin{aligned}
c &= \int_{\mathrm{GL}_n(F)} f(g)\psi_0(g)dg = \int_{T(F)} \int_{N(F)} \int_{K_0} f(tnk)\psi_0(tnk)dtdndk \\
&= \int_{T(F)} \int_{N(F)} f(tn)\delta_B^{-1/2}(t)\chi(t)dtdn = \int_{T(F)} f^B(t)\chi(t)dt \\
&= P_f\bigl(\chi_1(\varpi), \ldots, \chi_n(\varpi)\bigr) = P_f(z_1, \ldots, z_n)
\end{aligned}$$

である．これより π の佐武パラメータが $z_1, \ldots, z_n$ であることが従う． ■

注意 1.37

より強く，$\pi = \chi_1 \boxplus \cdots \boxplus \chi_n$ であることも証明できる．[Jac79, (3.6)] 等を参照．

1.4 保型形式・保型表現との関係

p 進簡約代数群の表現論の主要な目的は，保型表現の局所因子を記述するという点にある．また，局所ラングランズ対応の証明においても保型表現の理論は（少なくとも現時点では）避けて通ることはできない．そのため，ここでは GL_n の保型表現の理論を概観しておくことにする．また，古典的な保型形式の理論との関係についても説明を行う．

1.4.1 保型表現の定義

L を代数体とし，$\mathbb{A}_L$ を L のアデール環とする．$\mathbb{A}_L^\infty = \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} L$, $L_\infty = L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ とおくと $\mathbb{A}_L = \mathbb{A}_L^\infty \times L_\infty$ である．

まずはじめに, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ 上の保型形式を定義する．L の有限素点 v に対し, $K_{0,v} = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{L_v}) \subset \mathrm{GL}_n(L_v)$ とおく．また，L の無限素点 v に対して，$\mathrm{GL}_n(L_v)$ のコンパクト部分群 K_v を次のように定める：

$$K_v = \begin{cases} O(n) & (v \text{ が実素点のとき}), \\ U(n) & (v \text{ が複素素点のとき}). \end{cases}$$

$K_0^\infty = \prod_{v\nmid\infty} K_{0,v}$, $K_\infty = \prod_{v\mid\infty} K_v$, $K_0 = K_0^\infty \times K_\infty$ とおく．これらは順に $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L^\infty)$, $\mathrm{GL}_n(L_\infty)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ のコンパクト部分群である．

L の無限素点 v に対して，$\mathfrak{g}_v = \operatorname{Lie}\mathrm{GL}_n(L_v) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ とおく．v が実素点のときは $\mathfrak{g}_v = \mathfrak{gl}_n$ であり，v が複素素点のときは $\mathfrak{g}_v = \mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n$ である．$\mathfrak{g}_v$ の普遍包絡環を $U(\mathfrak{g}_v)$ と書き，その中心を $Z(\mathfrak{g}_v)$ と書く．$\mathfrak{g}_\infty = \bigoplus_{v\mid\infty} \mathfrak{g}_v$, $U(\mathfrak{g}_\infty) = \bigotimes_{v\mid\infty} U(\mathfrak{g}_v)$, $Z(\mathfrak{g}_\infty) = \bigotimes_{v\mid\infty} Z(\mathfrak{g}_v)$ と定める．

定義 1.38

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ 上の**保型形式**とは，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ 上の複素数値関数 φ であって以下の 5 条件を満たすものとする：

i) φ はスムーズである．すなわち，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L^\infty)\times\mathrm{GL}_n(L_\infty)$ 上の関数 $\varphi(g^\infty,g_\infty)$ は g^∞ に関し局所定数であり，g_∞ に関し C^∞ 級である．

ii) （**保型性**）$g\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$, $\gamma\in\mathrm{GL}_n(L)$ に対し $\varphi(\gamma g)=\varphi(g)$ となる．

上の 2 つの条件を満たす関数全体を $C^\infty(\mathrm{GL}_n(L)\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L))$ と書く．これには右移動で $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ が作用する．したがって，$\mathfrak{g}_\infty$ や $U(\mathfrak{g}_\infty)$ の作用も誘導される．

iii) （***K* 有限性**）$\{g\varphi\mid g\in K_0\}$ で張られる $C^\infty(\mathrm{GL}_n(L)\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L))$ の部分 $\mathbb{C}$ ベクトル空間は有限次元である．

iv) （***Z* 有限性**）$Z(\mathfrak{g}_\infty)$ のイデアル J で $Z(\mathfrak{g}_\infty)/J$ が $\mathbb{C}$ 上有限次元であるものが存在して，任意の $X\in J$ に対し $X\varphi=0$ が成り立つ．

v) （**緩増加性**）ある実数 $r>0, C>0$ が存在して，任意の $g\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ に対し $|\varphi(g)|\le C\|g\|^r$ が成り立つ．

ここで，$g\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ に対し $\|g\|=\prod_v\max_{i,j}\{|g_{ij}|_v,|(g^{-1})_{ij}|_v\}$ とおいた (g_{ij}, $(g^{-1})_{ij}$ はそれぞれ g, g^{-1} の (i,j) 成分)．

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ 上の保型形式全体を $\mathcal{A}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L))$ とおく．これには右移動で $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L^\infty)$, $\mathfrak{g}_\infty$, K_∞ が作用し，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L^\infty)\times(\mathfrak{g}_\infty,K_\infty)$ 加群になる．

Z を GL_n の中心とし，ω を $Z(\mathbb{A}_L)/Z(L)$ の指標とする．$\varphi\in\mathcal{A}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L))$ で任意の $g\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ および $z\in Z(\mathbb{A}_L)$ に対し $\varphi(gz)=\omega(z)\varphi(g)$ を満たすもの全体を $\mathcal{A}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L),\omega)$ と書く．また，J を $Z(\mathfrak{g}_\infty)$ のイデアルで $Z(\mathfrak{g}_\infty)/J$ が $\mathbb{C}$ 上有限次元であるものとするとき，$\varphi\in\mathcal{A}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L))$ で任意の $X\in J$ に対し $X\varphi=0$ を満たすもの全体を $\mathcal{A}_J(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L))$ と書く．

注意 1.39

K 有限性が $\mathrm{GL}_n(L_\infty)$ の作用で保たれないため，$\mathrm{GL}_n(L_\infty)$ は $\mathcal{A}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L))$ に作用しない．このため $\mathcal{A}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L))$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の表現にはならないが，以下では便宜上，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L^\infty)\times(\mathfrak{g}_\infty,K_\infty)$ 加群のことを $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の表現と呼ぶことがある．

定義 1.40

$\mathcal{A}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L))$ の既約な部分商として現れる $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L^\infty)\times(\mathfrak{g}_\infty,K_\infty)$ 加群を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の**保型表現**と呼ぶ．

以下の定理は，重さとレベルを固定した保型形式が有限次元であることの一般化である（1.4.3 節参照）：

定理 1.41（Harish-Chandra）

J を $Z(\mathfrak{g}_\infty)$ のイデアルで $Z(\mathfrak{g}_\infty)/J$ が有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間となるものとす

る．このとき，$\mathcal{A}_J(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L))$ は許容的な $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L^\infty) \times (\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$ 加群である．特に，任意の保型表現は許容的である．

このことから，任意の保型表現は局所成分の制限テンソル積に分解することが従う：

系 1.42

Π を保型表現とするとき，

- L の各有限素点 v に対し $\mathrm{GL}_n(L_v)$ の既約スムーズ表現 Π_v,
- L の各無限素点 v に対し既約許容 $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$ 加群 Π_v

が同型を除き一意的に存在して，ほとんど全ての有限素点 v に対し Π_v は不分岐であり，$\Pi \cong \bigotimes_v \Pi_v$ が成り立つ．

Π_v を Π の ***v* 成分**という．

制限テンソル積 $\bigotimes_v \Pi_v$（$\bigotimes'$ とも書く）について説明しておこう．S を L の素点からなる有限集合で，無限素点を全て含み，$v \notin S$ ならば Π_v は不分岐表現となるようなものとする．このとき，テンソル積 $(\bigotimes_{v\in S} \Pi_v) \otimes (\bigotimes_{v\notin S} \Pi_v^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{L_v})})$ が定義できる．これの S に関する順極限が $\bigotimes_v \Pi_v$ である．

次に尖点的な保型形式，保型表現の定義を行う．

定義 1.43

$\varphi \in \mathcal{A}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L))$ が**尖点形式**であるとは，任意の放物型部分群 $P \subsetneq \mathrm{GL}_n$ および $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ に対し，

$$\int_{N_P(L)\backslash N_P(\mathbb{A}_L)} \varphi(ng)dn = 0$$

が成り立つことをいう．尖点形式全体のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $\mathcal{A}^0(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L))$ と書く．これは $\mathcal{A}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L))$ の部分 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L^\infty)\times(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$ 加群である．$\mathcal{A}^0(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L))$ の部分商に現れる保型表現を**尖点的保型表現**と呼ぶ．

ω を $Z(\mathbb{A}_L)/Z(L)$ の指標とするとき，$\mathcal{A}^0(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)) \cap \mathcal{A}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L), \omega)$ のことを $\mathcal{A}^0(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L), \omega)$ と書く．

尖点表現については，次の結果が重要である．

定理 1.44（重複度 1 定理）

ω を $Z(\mathbb{A}_L)/Z(L)$ の指標とするとき，$\mathcal{A}^0(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L), \omega) = \bigoplus_\Pi \Pi$ と直和分解する．ここで Π は中心指標 ω を持つ尖点的保型表現を動く．

つまり，尖点的保型表現 Π は $\mathcal{A}^0(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L),\omega)$ の部分表現として実現でき，さらに Π の重複度は 1 であるということである．

尖点的保型表現は有限個を除いた局所成分から決まることが知られている（**強重複度 1 定理**）．より強い形で主張を述べたいため，等圧的な保型表現を定義する．

定義 1.45
Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の保型表現とする．このとき，n の分割 $n = n_1 + \cdots + n_k$ および $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{A}_L)$ の尖点的保型表現 Π_i が存在して，Π は $\text{n-Ind}_{P(\mathbb{A}_L)}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)} \Pi_i$ の部分商に現れることが知られている（P は分割 $n = n_1 + \cdots + n_k$ に対応する標準放物型部分群）．L の任意の素点 v に対し $\Pi_v = \Pi_{1,v} \boxplus \cdots \boxplus \Pi_{k,v}$ となるとき，Π は**等圧的** (isobaric) であるという．
n の分割 $n = n_1 + \cdots + n_k$ および $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{A}_L)$ の尖点的保型表現 Π_i が与えられたとき，$\text{n-Ind}_{P(\mathbb{A}_L)}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)} \Pi_i$ の部分商に現れる等圧的保型表現が一意的に存在する．これを $\Pi_1 \boxplus \cdots \boxplus \Pi_k$ と書き，$\Pi_1, \ldots, \Pi_k$ の**ラングランズ和**と呼ぶ．

等圧性についてのより詳しい説明は [Clo90, §1.1] を参照．

定理 1.46（Jacquet-Shalika [JS81a], [JS81b]）
Π, Π' を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の等圧的な保型表現とする．L の素点の有限集合 S に対し，$\Pi_v \cong \Pi'_v$ $(v \notin S)$ が成り立っているならば，$\Pi \cong \Pi'$ である．

1.4.2 無限小指標と保型表現の代数性

定義 1.38 における Z 有限性について，もう少し詳しく見ておくことにする．
v を L の無限素点とする．$Z(\mathfrak{g}_v)$ の構造は次の定理によって完全に記述できる：

定理 1.47（Harish-Chandra 同型）
$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ および対角行列からなる $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{t}$ に対し，自然な同型

$$\gamma_{\mathrm{HC}} \colon Z\big(\mathfrak{g}\big) \xrightarrow{\cong} Z\big(\mathfrak{t}\big)^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

が存在する．

注意 1.48
佐武同型のとき（命題 1.36 の証明参照）と同様，Harish-Chandra 同型は極大トーラスからの正規化放物型誘導と両立する．すなわち，対角行列全体からなる部分群 $T(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 上のスムーズ指標を χ とすると，$\text{n-Ind}_{B(\mathbb{R})}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \chi$ への $Z(\mathfrak{g})$ の作用は χ への $Z(\mathfrak{t})$ の作用を γ_{HC} で引き戻したものと一致する．γ_{HC} はこの条件で特徴付けられる．

もう少し具体的に書くと次のようになる．$\chi = \chi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \chi_n$（$\chi_i$ は $\mathbb{R}^\times$ のスムーズ指標）と書き，s_i を $\chi_i(t) = t^{s_i}$ $(t \in \mathbb{R}_{>0})$ となる複素数とすると，$\text{n-Ind}_{B(\mathbb{R})}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \chi$ への $X \in Z(\mathfrak{g})$ の作用は $\gamma_{\mathrm{HC}}(X)(s_1, \ldots, s_n)$ 倍である．

例 1.49

ξ を最高ウェイトが $\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) \mapsto a_1 t_1 + \cdots + a_n t_n$ $(a_1, \ldots, a_n$ は $a_1 \geq \cdots \geq a_n$ となる整数）であるような $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現とする．T の指標 $\chi_{a_1,\ldots,a_n}$ を $\chi(t_1, \ldots, t_n) = t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}$ で定めると，$\xi|_{B(\mathbb{R})}$ は $B(\mathbb{R})$ の表現 χ を部分表現として含むから，単射 $\xi^\vee \hookrightarrow \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{R})}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \chi^\vee = \text{n-Ind}_{B(\mathbb{R})}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}(\delta_B^{1/2}\chi^\vee)$ が存在する．よって ξ は $\text{n-Ind}_{B(\mathbb{R})}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}(\delta_B^{-1/2}\chi)$ の商である．これと注意 1.48 から，$X \in Z(\mathfrak{g})$ に対し

$$\xi(X) = \gamma_{\mathrm{HC}}(X)\Big(a_1 + \frac{n-1}{2}, a_2 + \frac{n-3}{2}, \ldots, a_n + \frac{1-n}{2}\Big)$$

となることが分かる．これで γ_{HC} を特徴付けることもできる．

例 1.50

$n = 2$ のとき，$\gamma_{\mathrm{HC}} \colon Z(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}[X_1, X_2]^{\mathfrak{S}_2}$ を記述してみる．まず，$\mathfrak{g}$ は $\mathbb{C}$ ベクトル空間として以下の元を基底に持つ：

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A は $\mathfrak{g}$ の中心の元であるから，$A \in Z(\mathfrak{g})$ である．一方，Casimir 元 $\Omega = \frac{1}{2}H^2 + EF + FE \in U(\mathfrak{g})$ も $Z(\mathfrak{g})$ に属することが知られている．

$s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ とし，$\mathbb{R}^\times$ の指標 χ_1, χ_2 を $\chi_i(t) = t^{s_i}$ で定める．$\text{n-Ind}_{B(\mathbb{R})}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ への A, Ω の作用を計算しよう．$\phi \in \text{n-Ind}_{B(\mathbb{R})}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ に対し，$(A\phi)(1) = (s_1 + s_2)\phi(1)$, $(H\phi)(1) = (s_1 - s_2 + 1)\phi(1)$, $(E\phi)(1) = 0$ であることが簡単に分かる．$H\phi, F\phi \in \text{n-Ind}_{B(\mathbb{R})}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ より，$(H^2\phi)(1) = (s_1 - s_2 + 1)^2\phi(1)$, $(EF\phi)(1) = 0$ もいえる．$EF - FE = H$ より $\Omega = \frac{1}{2}H^2 - H + 2EF$ であるから，$(\Omega\phi)(1) = \frac{1}{2}(s_1 - s_2 + 1)^2\phi(1) - (s_1 - s_2 + 1)\phi(1) = \frac{1}{2}(s_1^2 - 2s_1s_2 + s_2^2 - 1)\phi(1)$ である．$Z(\mathfrak{g})$ の元は $\text{n-Ind}_{B(\mathbb{R})}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$ にスカラー倍で作用するので，$A\phi = (s_1 + s_2)\phi$, $\Omega\phi = \frac{1}{2}(s_1^2 - 2s_1s_2 + s_2^2 - 1)\phi$ が分かる．したがって，$\gamma_{\mathrm{HC}}(A) = X_1 + X_2$, $\gamma_{\mathrm{HC}}(\Omega) = \frac{1}{2}(X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2 - 1)$ である．特に，A, Ω は $\mathbb{C}$ 代数として $Z(\mathfrak{g})$ を生成する．

定理 1.47 より，v が実素点ならば $Z(\mathfrak{g}_v) \cong \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ であり，v が複素素点ならば $Z(\mathfrak{g}_v) \cong \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]^{\mathfrak{S}_n} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_n]^{\mathfrak{S}_n}$ である．$Z(\mathfrak{g}_v)$ の極大イデアルは

- v が実素点のとき，$\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$ の元と一対一に対応し，
- v が複素素点のとき，$\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n \times \mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$ の元と一対一に対応する．

また，$Z(\mathfrak{g}_v)$ のイデアル J で $Z(\mathfrak{g}_v)/J$ が $\mathbb{C}$ 上有限次元であるものは有限個の極大イデアルの積である．

定義 1.51

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の保型表現 Π および無限素点 v に対し，Π_v への $Z(\mathfrak{g}_v)$ の作用は全射準同型 $Z(\mathfrak{g}_v) \longrightarrow \mathbb{C}$ を定め（Schur の補題），したがって $Z(\mathfrak{g}_v)$ の極大イデアルを定める．これに対応する $\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$ ないし $\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n \times \mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$ の元を Π_v の**無限小指標**と呼ぶ．

無限小指標を使って保型表現の正則性と代数性を定義する．

定義 1.52

Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の保型表現とする．

i) Π が L の無限素点 v において**正則**であるとは，次を満たすこととする：
  - v が実素点のとき，Π_v の無限小指標を $(a_{v,1},\ldots,a_{v,n})$ とすると，$a_{v,1},\ldots,a_{v,n}$ は相異なる．
  - v が複素素点のとき，Π_v の無限小指標を $(a_{v,1},\ldots,a_{v,n},b_{v,1},\ldots,b_{v,n})$ とすると，$a_{v,1},\ldots,a_{v,n}$ および $b_{v,1},\ldots,b_{v,n}$ はそれぞれ相異なる．

  Π が任意の無限素点 v において正則であるとき，単に正則であるという．

ii) Π が L の無限素点 v において ***L* 代数的**であるとは，Π_v の無限小指標が $\mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}_n$ ないし $\mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}_n$ に属することとする．Π が任意の無限素点 v において L 代数的であるとき，単に L 代数的であるという．

iii) Π が L の無限素点 v において ***C* 代数的**であるとは，Π_v の無限小指標が $(\mathbb{Z}^n+\rho)/\mathfrak{S}_n$ ないし $(\mathbb{Z}^n+\rho)/\mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}^n+\rho)/\mathfrak{S}_n$ に属することとする．ただし，$\rho = (\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \ldots, \frac{1-n}{2})$ である．
  Π が任意の無限素点 v において C 代数的であるとき，単に C 代数的であるという．これは $\Pi \otimes |\det|^{\frac{1-n}{2}}$ が L 代数的であることと同値である．

iv) Π が**代数的保型表現**であるとは，等圧的かつ L 代数的であることとする．

注意 1.53

i) ここでの代数性の用語は [BG14] によるものである．この論文では，一般の簡約代数群の保型表現に対し L 代数的，C 代数的を定義しているが，一般にはこれらは指標の捻りでうつりあうわけではない．[Clo90, §1.2.3] で定義されている代数性は，（その名の通り）「C 代数的」の方に一致する[注 5]．

ii) Π が正則 C 代数的であることは次と同値である：$\mathbb{Q}$ 上の代数群 $\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_{n,L}$ の既約代数的表現 ξ が存在して，L の任意の無限素点において Π と ξ の無限小指標が一致する．[HT01] などでは後者の条件で書いている．

[注 5]「C」は “cohomological” からとっているとのことだが……

例 1.54
$\Pi = \mathbf{1}$（自明表現）の場合を考える．自明表現の最高ウェイトは $(0, \ldots, 0)$ であるから，例 1.49 より，L の無限素点 v における Π_v の無限小指標は v が実素点ならば ρ であり，複素素点ならば (ρ, ρ) である．よって，Π は正則 C 代数的であり，L 代数的ではない．

1.4.3　古典理論との関係

ここでは $n = 2$, $L = \mathbb{Q}$ として，正則保型形式と保型表現の関係について解説する．整数 $N \geq 1$ に対し，

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0, d \equiv 1 \bmod N \right\}$$

とおく．$w \geq 1$ を整数とする．複素上半平面 $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ 上の正則関数 f が重さ w，レベル $\Gamma_1(N)$ の保型形式であるとは，次の 2 つの条件を満たすことをいうのであった：

- $z \in \mathfrak{H}$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(N)$ に対し，

$$f(\gamma z) = f\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big) = (cz+d)^w f(z).$$

- $\Gamma_1(N)$ の任意のカスプにおいて f は正則．

f を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 上の保型形式に持ち上げたい．まず，いくつか記号を用意する．$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$ とおく．$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ は $\mathfrak{H}$ に一次分数変換で推移的に作用する．$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ および $z \in \mathfrak{H}$ に対し，$\mu(g, z) = cz + d$ とおく．これはコサイクル条件 $\mu(gg', z) = \mu(g, g'z)\mu(g', z)$ $(g, g' \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}), z \in \mathfrak{H})$ を満たす．

$$K_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \;\middle|\; c \equiv 0, d \equiv 1 \bmod N \right\}$$

とおく．これは $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\infty)$ のコンパクト開部分群であり，局所成分の積に分解する：$K_1(N) = \prod_p K_{1,p}(p^{v_p(N)})$．ここで，$m \geq 0$ および素数 p に対し，$K_{1,p}(p^m)$ は

$$K_{1,p}(p^m) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \;\middle|\; c \equiv 0, d \equiv 1 \bmod p^m \right\}$$

で定まる $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ のコンパクト開部分群である．

補題 1.55

次が成り立つ：

i) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})K_1(N)\,\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$.

ii) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \cap K_1(N)\,\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) = \Gamma_1(N)$.

証明　強近似定理より $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})K_1(N)\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ である．よって，任意の $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ は $g = \gamma k h$ $(\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}), k \in K_1(N), h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ と分解する．$\det h > 0$ ととれることを示したい．$\tau = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ とおき，これを $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ の元と見たものを $\tau_\mathbb{Q}$，$K_1(N)$ の元と見たものを τ^∞，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の元と見たものを τ_∞ と書く．もし $\det h < 0$ なら，$\gamma' = \gamma\tau_\mathbb{Q}^{-1}$, $k' = \tau^\infty k$, $h' = \tau_\infty h$ とおくと $\gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, $k' \in K_1(N)$, $h' \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ で $g = \gamma' k' h'$ を満たす．よって $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})K_1(N)\,\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ が示された．

ii) は容易なので省略する． ∎

この補題を用いて，$\mathfrak{H}$ 上の正則保型形式 f を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ に持ち上げる．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 上の関数 ϕ_f を次のように定める：補題 1.55 i) を用いて $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ を $g = \gamma k h$ $(\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}), k \in K_1(N), h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}))$ と分解したとき，

$$\phi_f(g) = \mu(h, i)^{-w} f(hi) = (ci + d)^{-w} f\Big(\frac{ai + b}{ci + d}\Big).$$

g の分解に依存しないことは，補題 1.55 ii) と f の保型性から従う．

命題 1.56

$\phi_f \in \mathcal{A}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$ である．ϕ_f が尖点形式であることと f が尖点形式であることは同値である．

略証　定義より ϕ_f がスムーズであること, 保型性 $\phi_f(\gamma g) = \phi_f(g)$ $(\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}), g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$ を満たすことは直ちに分かる．ϕ_f は $K_1(N)$ の作用で固定されるので，K 有限性を示すには $SO(2)$ 有限性を示せばよい．$k_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2)$ の ϕ_f への作用を考える．定義の通りに計算すると，

$$(k_\theta \phi_f)(g) = \phi_f(g k_\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-w} \phi_f(g)$$

となる（$k_\theta i = i$ に注意）．よって $SO(2)$ は $\mathbb{C}\phi_f$ を保つので，ϕ_f が $SO(2)$ 有限であることが分かった．

次に Z 有限性を示す．例 1.50 で定めた $A, \Omega \in Z(\mathfrak{g}_\infty)$ が ϕ_f にスカラー倍で作用することを示せば十分である．定義に従って計算すると，

$$A\phi_f = -w\phi_f, \quad \Omega\phi_f = \Bigl(\frac{w^2}{2} - w\Bigr)\phi_f$$

となるのでよい（Ω の作用の計算はそれほど簡単ではない．[Bor97, Lemma 5.15] 等を参照）．

ϕ_f が緩増加であることは f のカスプでの正則性より従うが，ここでは省略する．尖点性が対応することの証明も省略する． ■

以下では $w \geq 2$ とし，f を正規化された Hecke 固有新形式とする．このとき，f は Nebentypus $\varepsilon\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を持つ．

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \bmod N \right\}$$

とおき，$\gamma \in \Gamma_0(N)$ に対してその $(2,2)$ 成分を d_γ と書くと，ε は

$$f(\gamma z) = \varepsilon(d_\gamma)\mu(\gamma, z)^w f(z) \quad \bigl(z \in \mathfrak{H}, \gamma \in \Gamma_0(N)\bigr)$$

を満たす指標であった．ε を用いて ϕ_f への $Z(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/Z(\mathbb{Q})$ の作用を記述することができる：

命題 1.57

$Z(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/Z(\mathbb{Q}) = \mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^\times$ は ϕ_f に指標 $\omega_f = \varepsilon^{-1}|{-}|^{-w}$ によって作用する ($\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^\times = \widehat{\mathbb{Z}}^\times\mathbb{R}_{>0} \twoheadrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}^\times \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ を合成することで，ε を $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^\times$ の指標とみなしている)．

これを証明するために，後でも用いる次の補題を準備する．

補題 1.58

f を重さ $w \geq 2$，レベル $\Gamma_1(N)$ の正規化された Hecke 固有新形式とし，ε をその Nebentypus とする．

$$K_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \;\middle|\; c \equiv 0 \bmod N \right\}$$

とおき, $k \in K_0(N)$ に対し k の $(2,2)$ 成分の $\mathrm{mod}\, N$ を $\overline{d}_k$ とおく．これは $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ の元であり，$k \mapsto \overline{d}_k$ は群準同型である．

i) $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, $k \in K_0(N)$, $h \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ に対し，次が成り立つ：

$$\phi_f(\gamma k h) = \varepsilon(\overline{d}_k)^{-1}\mu(h,i)^{-w}f(hi).$$

ii) $k \in K_0(N)$ に対し $k\phi_f = \varepsilon(\overline{d}_k)^{-1}\phi_f$ が成り立つ．

証明　まずi) を示す．$m \in \mathbb{Z}$ を $m \bmod N = \overline{d}_k^{-1}$ となるようにとる．$\overline{d}_k \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ より m と N は互いに素なので，$rm - sN = 1$ となる整数 r, s が存在する．$\xi = \begin{pmatrix} r & s \\ N & m \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ とおき，ξ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\infty)$, $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ における像をそれぞれ $\xi_\mathbb{Q}$, ξ^∞, ξ_∞ と書く．このとき $\gamma k h = (\gamma\xi_\mathbb{Q}^{-1})(\xi^\infty k)(\xi_\infty h)$ である．$\xi^\infty k \in K_1(N)$ であるから，右辺は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})K_1(N)\,\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ に対応する分解を与える．よって $\phi_f(\gamma k h) = \mu(\xi_\infty h, i)^{-w}f(\xi_\infty hi)$ である．$\xi_\infty \in \Gamma_0(N)$ と Nebentypus の定義から，

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \mu(\xi_\infty h, i)^{-w}\varepsilon(d_{\xi_\infty})\mu(\xi_\infty, hi)^w f(hi) = \varepsilon(d_{\xi_\infty})\mu(h,i)^{-w}f(hi) \\ &= \varepsilon(m)\mu(h,i)^{-w}f(hi) = \varepsilon(\overline{d}_k)^{-1}\mu(h,i)^{-w}f(hi)\end{aligned}$$

を得る．

ii) は i) より直ちに従う．■

命題 1.57 の証明　$\lambda = ab$ ($a \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times, b \in \mathbb{R}_{>0}$) に対し，$z_\lambda = \mathrm{diag}(\lambda,\lambda)$ の作用を考える．$g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ に対し，補題 1.58 ii) から

$$\begin{aligned}\phi_f(gz_\lambda) &= \phi_f(gz_az_b) = b^{-w}\phi_f(gz_a) = b^{-w}\varepsilon(a \bmod N)^{-1}\phi_f(g) \\ &= \varepsilon(\lambda)^{-1}|\lambda|^{-w}\phi_f(g) = \omega_f(\lambda)\phi_f(g)\end{aligned}$$

となるのでよい．■

ϕ_f で生成される $\mathcal{A}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}), \omega_f)$ の部分表現は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の尖点的保型表現である．これを Π_f と書き，f に伴う保型表現と呼ぶ．Π_f の無限小指標，中心指標，佐武パラメータは以下の通りとなる．

命題 1.59

f を重さ $w \geq 2$，レベル $\Gamma_1(N)$ の正規化された Hecke 固有新形式とし，その q 展開を $f(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n q^n$ ($q = e^{2\pi i z}$) とする．また，ε を f の Nebentypus とする．

i) $(\Pi_f)_\infty$ の無限小指標は $(-1/2, -w+1/2)$ である．特に，Π_f は正則 C 代数的である．

ii) Π_f の中心指標は $\omega_f = \varepsilon^{-1}|{-}|^{-w}$ である．

iii) p を素数とする．$p \nmid N$ ならば $(\Pi_f)_p$ は不分岐であり，その佐武パラメータを (α_p, β_p) とすると $\alpha_p + \beta_p = p^{1/2}a_p$, $\alpha_p\beta_p = \varepsilon(p)p^w$ である．

証明　無限小指標を (a,b) $(a \geq b)$ とすると，例 1.50 と命題 1.56 の略証より，

$$a+b=-w, \quad \frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2-1)=\frac{1}{2}w^2-w$$

である．第 2 式より $a-b=w-1$ であるから $(a,b)=(-1/2,-w+1/2)$ を得る．

ii) は命題 1.57 より明らかである．

iii) を示す．ϕ_f は $K_1(N)$ の作用で固定されるので，$K_{1,p}(p^{v_p(N)})$ の作用でも固定される．$p \nmid N$ ならばこの群は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ に一致するので，$(\Pi_f)^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)} \neq 0$ である．特に $(\Pi_f)_p^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)} \neq 0$ となるので $(\Pi_f)_p$ は不分岐表現である．$(\Pi_f)_p$ の佐武パラメータを計算するためには，例 1.33 における $f_{(p,1)}, f_{(p,p)} \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p))$ の ϕ_f への作用を見ればよい．まず前者を計算しよう．

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) = \coprod_{\substack{a,d>0, ad=p, \\ 0 \leq b < d}} \begin{pmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$$

である．$\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a,d>0, ad=p, 0 \leq b < d \right\}$ とおき，$\delta \in \Delta$ に対し，それを $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty})$, $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ の元と見たものをそれぞれ $\delta_{\mathbb{Q}}$, δ_p, δ^{∞}, δ_{∞} と書く．定義より $(f_{(p,1)}\phi_f)(g)=\sum_{\delta\in\Delta}\phi_f(g\delta_p)$ である．$g=\gamma kh$ を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})K_1(N)\,\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ に対応する分解とする．$\delta \in \Delta$ に対し，$k_p\delta_p \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ であるから，$\delta' \in \Delta$ で $k_p\delta_p \in \delta'_p\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ となるものが一意的に存在する．このとき $g\delta_p = (\gamma\delta'_{\mathbb{Q}})((\delta'^{\infty})^{-1}k\delta_p)(\delta'^{-1}_{\infty}h)$ であり，$(\delta'^{\infty})^{-1}k\delta_p \in K_0(N)$ であるから，補題 1.58 i) より

$$\phi_f(g\delta_p)=\varepsilon(d_{\delta'})\mu(\delta'^{-1}_{\infty}h,i)^{-w}f(\delta'^{-1}_{\infty}hi)=\varepsilon(d_{\delta'})\mu(\delta'^{-1}_{\infty},hi)^{-w}\mu(h,i)^{-w}f(\delta'^{-1}_{\infty}hi)$$

となる．$\delta \mapsto \delta'$ が Δ から Δ への全単射であることに注意すると，$\delta' = \begin{pmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ のとき $\delta'^{-1}_{\infty} = p^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ であるから，

$$\sum_{\delta\in\Delta}\phi_f(g\delta_p) = \sum_{\substack{a,d>0, ad=p, \\ 0 \leq b < d}} \varepsilon(a)p^w d^{-w}\mu(h,i)^{-w} f\Big(\frac{a(hi)+b}{d}\Big)$$

となる．これは古典理論における Hecke 作用素 T_p を f に作用させて得られる正則保型形式

$$(T_pf)(z) = p^{w-1}\sum_{\substack{a,d>0, ad=p, \\ 0 \leq b < d}} \varepsilon(a)d^{-w}f\Big(\frac{az+b}{d}\Big)$$

([Miy89, (4.5.26)] 等を参照）を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ に持ち上げたもの ϕ_{T_pf} の p 倍である．よく知られているように $T_pf=a_pf$ であるから，例 1.33 より $p^{1/2}(\alpha_p+\beta_p)=pa_p$ すなわち $\alpha_p+\beta_p=p^{1/2}a_p$ となる．

一方，ii) より $f_{(p,p)}$ の ϕ_f への作用は $\varepsilon_p(p)^{-1}|p|_p^{-w}=\varepsilon(p)p^w$ である（ε_p は ε の p 成分）．よって例 1.33 より $\alpha_p\beta_p=\varepsilon(p)p^w$ が得られる． ∎

注意 1.60

$f_{(p,p)}$ の ϕ_f への作用と T_p の f への作用が対応するように，保型形式 f に対して保型表現 $\Pi_f\otimes|\det|$ を考えることも多い．モジュラー曲線の 1 次エタールコホモロジーに現れるのはこのタイプの保型表現である（4.3 節参照）．

次の定理を用いると，保型表現 Π_f から ϕ_f および f を復元することができる．

定理 1.61（[Cas73], [JPSS81]）

Π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の尖点的保型表現とする．

i) 各素数 p に対し，整数 $c_p\geq 0$ で $\dim_{\mathbb{C}}\Pi_p^{K_{1,p}(p^{c_p})}=1$ を満たすものが一意的に存在する．

Π_p が不分岐なら $c_p=0$ であるから，c_p は有限個を除いて 0 である．$N=\prod_p p^{c_p}$ とおく（Π の**導手**と呼ぶ）．

ii) Π_∞ の無限小指標が $(-1/2,-w+1/2)$（$w\geq 2$ は整数）という形であるとする．$SO(2)$ の指標 χ_w を $k_\theta\mapsto(\cos\theta+i\sin\theta)^{-w}$ で定める（k_θ は命題 1.56 の略証において定めた記号）．このとき，$\{\phi\in\Pi^{K_1(N)}\mid\phi(gk_\theta)=\chi_w(k_\theta)\phi(g)\}$ は 1 次元ベクトル空間である．さらに，重さ w，レベル $\Gamma_1(N)$ の正規化された Hecke 固有新形式 f が一意的に存在して，ϕ_f は上のベクトル空間の元を与える．特に $\Pi=\Pi_f$ である．

この定理より，正規化された Hecke 固有新形式の理論は保型表現論の一部とみなせることが分かる．

2 L パラメータと Weil-Deligne 表現

ここでは，$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現をパラメータ付けることになる L パラメータを導入する．まず，p 進体 F の Weil 群について簡単に思い出しておく．

F の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ を Γ_F と書く．同様に Γ_κ も定める．κ の自己同型 $a\mapsto a^q$ の逆写像を Frob_q と書き，**幾何学的 Frobenius 元**と呼ぶ．Γ_κ は Frob_q によって位相的に生成され，$\mathbb{Z}$ の副有限完備化 $\widehat{\mathbb{Z}}=\varprojlim_m\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ と同型である．

定義 2.1
自然な全射 $\Gamma_F \longrightarrow \Gamma_\kappa$ の核を I_F と書き，F の**惰性群**と呼ぶ．I_F は Γ_F からの誘導位相によってコンパクト群となる．

$\sigma \in \Gamma_F$ に対し，その全射 $\Gamma_F \longrightarrow \Gamma_\kappa$ による像を $\overline{\sigma}$ と書く．$\overline{\sigma} \in \mathrm{Frob}_q^{\mathbb{Z}}$ となるような $\sigma \in \Gamma_F$ 全体を W_F と書き，F の **Weil 群**と呼ぶ．$\sigma \in W_F$ に対し，$\overline{\sigma} = \mathrm{Frob}_q^{d(\sigma)}$ によって $d(\sigma) \in \mathbb{Z}$ を定める．

$d(\varphi) = 1$ となるような $\varphi \in W_F$（**Frobenius 持ち上げ**）を一つとる．このとき，$W_F = \coprod_{m\in\mathbb{Z}} \varphi^m I_F$ であるから，右辺を可算個の I_F の直和とみなして位相を入れることで，W_F は I_F を開部分群とする局所コンパクト群になる（この位相は Γ_F からの誘導位相とは異なることに注意）．

Weil 群のアーベル化は局所類体論で記述されるのであった．

定理 2.2（局所類体論）
位相群の自然な同型 $\mathrm{Art}_F\colon F^\times \xrightarrow{\cong} W_F^{\mathrm{ab}}$ が存在する．

注意 2.3
ここでは，局所類体論の同型の正規化として，素元が幾何学的 Frobenius 元の持ち上げにうつるものを採用する．このとき，任意の $a \in F^\times$ に対して $d(\mathrm{Art}_F(a)) = v_F(a)$ が成立する．

$F^\times = \mathrm{GL}_1(F)$ であるから，局所類体論の同型を用いると，$\mathrm{GL}_1(F)$ の既約スムーズ表現（すなわち，スムーズ指標）は以下のように分類できる．これが局所ラングランズ対応の出発点である．

定理 2.4（$\mathrm{GL}_1(F)$ の局所ラングランズ対応）
$\mathrm{GL}_1(F)$ の既約スムーズ表現の同型類と W_F の 1 次元スムーズ表現の同型類は一対一に対応する．

証明　χ を $\mathrm{GL}_1(F)$ の既約スムーズ表現，すなわちスムーズ指標 $F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ とすると，$W_F \longrightarrow W_F^{\mathrm{ab}} \xrightarrow[\cong]{\mathrm{Art}_F^{-1}} F^\times \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^\times$ は W_F の 1 次元スムーズ表現である．逆に，W_F の 1 次元スムーズ表現は W_F^{ab} を経由するので，Art_F によって $\mathrm{GL}_1(F)$ のスムーズ指標とみなすことができる． ∎

例 2.5
$|{-}|\colon \mathrm{GL}_1(F) \longrightarrow \mathbb{C}^\times;\ a \mapsto |a| = q^{-v_F(a)}$ は $\mathrm{GL}_1(F)$ のスムーズ指標である．これに対応する W_F の指標は，$W_F \longrightarrow \mathbb{C}^\times;\ \sigma \mapsto q^{-d(\sigma)}$ である．この指標が定める W_F の 1 次元表現を $\mathbb{C}(1)$ と書く．より一般に，$m \in \mathbb{R}$ に対し，指標 $W_F \longrightarrow \mathbb{C}^\times;$

$\sigma \mapsto q^{-m \cdot d(\sigma)}$ の定める W_F の 1 次元表現を $\mathbb{C}(m)$ と書く．さらに，W_F の表現 (r, V) に対し，$\mathbb{C}(m)$ とのテンソル積を $(r(m), V(m))$ と書く（ベクトル空間としては $V = V(m)$ である）．

2.1 L パラメータ

L パラメータは以下の Weil-Deligne 群を用いて定義される．

定義 2.6
$W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ を F の **Weil-Deligne 群**という．

定義 2.7
$\mathrm{GL}_n(F)$ の ***L* パラメータ**とは，準同型 $\phi\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ で次の条件を満たすもののことである．

- $\phi|_{W_F}\colon W_F \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は W_F のスムーズ表現．
- $\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の代数的表現（つまり，ϕ は代数群の準同型 $\mathrm{SL}_2 \longrightarrow \mathrm{GL}_n$ から来る）．
- 任意の $\sigma \in W_F$ に対し，$\phi(\sigma, 1)$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の半単純元．

2 つの L パラメータ ϕ, ϕ' が同値であるとは，それらが $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 共役であること，すなわち $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が存在して $\phi' = \mathrm{Int}(g) \circ \phi$ となることとする．これは，ϕ と ϕ' が $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の表現として同型であることと同値である．
$\mathrm{GL}_n(F)$ の L パラメータの同値類全体を $\Phi(\mathrm{GL}_n(F))$ と書く．

注意 2.8
より一般に，F 上の連結簡約代数群 $\mathbf{G}$ に対しても $G = \mathbf{G}(F)$ の L パラメータを定義することができる．この場合には，G の L 群 ${}^L G = \widehat{\mathbf{G}}(\mathbb{C}) \rtimes W_F$ に値を持つ準同型 $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L G$ のうちいくつかの条件を満たすものを L パラメータと呼ぶ．$G = \mathrm{GL}_n(F)$ のときには ${}^L G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times W_F$ なので上の定義と若干違うようにも見えるが，両者は第一射影 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times W_F \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の合成によって一対一に対応するので，ここではより簡便な上記の定義を採用している．

L パラメータの条件の 3 つ目（$\phi(\sigma, 1)$ の半単純性）は，$\phi|_{W_F}$ が W_F の半単純表現（既約表現の直和）であることと同値である（例えば [BH06, 28.7] 参照）．$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の代数的表現が半単純であることと合わせると，これは ϕ が $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の表現として半単純であるということとも同値である．この条件より，L パラメータ ϕ は $\bigoplus_{i=1}^{k} \phi_i \boxtimes \rho_i$（$\phi_i$ は W_F の既約スムーズ表現，ρ_i は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の既約代数的表現）と直和分解できることが分かる．
一方，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の既約代数的表現の分類は古典的によく知られている．**Std** を

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ のスタンダード表現とすると，$m \geq 1$ に対し $\mathrm{Sym}^{m-1}\,\mathbf{Std}$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の唯一の既約 m 次元代数的表現であり，既約な代数的表現はこれで尽くされる．このことを用いると，$\mathrm{GL}_n(F)$ の L パラメータは以下のように分類できる：

命題 2.9

$\phi \in \Phi(\mathrm{GL}_n(F))$ は $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の表現として以下のように直和分解する：

$$\phi = \bigoplus_{i=1}^{k} \phi_i \boxtimes \mathrm{Sym}^{m_i-1}\,\mathbf{Std}.$$

ここで $\phi_1, \ldots, \phi_k$ は W_F の既約スムーズ表現であり，$m_1, \ldots, m_k$ は $n = \sum_{i=1}^{k} m_i \dim_{\mathbb{C}} \phi_i$ を満たす正整数である．

定義 2.10

$\phi \in \Phi(\mathrm{GL}_n(F))$ が $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の表現として既約であるとき，ϕ は**離散的**な L パラメータであるという．これは，ϕ の像の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の中での中心化群 $Z_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}(\phi)$ が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の中心 $\mathbb{C}^\times$ と一致すると言っても同じことである．

命題 2.9 は，$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現の分類（系 1.28）と以下の点において類似していることに注目していただきたい．

- 一般の L パラメータは，離散的な L パラメータの直和である．「直和」を「ラングランズ和」に読み換えると，ちょうど $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現の既約離散系列表現を用いた分類になる．
- 離散的な L パラメータは，n の約数 m と，既約スムーズ表現 $\phi' \colon W_F \longrightarrow \mathrm{GL}_{n/m}(\mathbb{C})$ を決めると決まる．「既約スムーズ表現」を「$\mathrm{GL}_{n/m}(F)$ の既約超尖点表現」に読み換えると，ちょうど既約離散系列表現の分類になる．

2.2　Weil-Deligne 表現と ℓ 進表現

L パラメータの言い換えとして，次で定義する Weil-Deligne 表現というものがある．

定義 2.11

W_F の n 次元 **Weil-Deligne 表現**とは，次のような組 (r, V, N) のことである：

- (r, V) は W_F の n 次元スムーズ表現．
- $N \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ は $Nr(\sigma) = q^{d(\sigma)} r(\sigma) N$ $(\sigma \in W_F)$ を満たす自己準同型（**モノドロミー作用素**）．例 2.5 の記号を用いると，これは $N \colon V \longrightarrow V(-1)$ が W_F 準同型になるという条件と同値である．

Weil-Deligne 表現の同型，部分表現，既約性なども自然に定義できる．

注意 2.12

(r, V, N) を n 次元 Weil-Deligne 表現とするとき，N は冪零である．実際，Frobenius 持ち上げ $\varphi \in W_F$ に対し $r(\varphi)^{-1}Nr(\varphi) = qN$ であるから，N の固有値の集合は q 倍で保たれる．よって N の固有値は 0 のみである．

定義 2.13

W_F の n 次元 Weil-Deligne 表現 (r, V, N) に対し，次は同値である：

- r は半単純表現である．
- ある Frobenius 持ち上げ φ に対し，$r(\varphi)$ は半単純（対角化可能）な線型写像である．
- 全ての Frobenius 持ち上げ φ に対し，$r(\varphi)$ は半単純な線型写像である．

(r, V, N) がこの同値な 3 条件を満たすとき，**Frobenius 半単純**な Weil-Deligne 表現であるという．

一般の Weil-Deligne 表現 (r, V, N) が与えられたとき，それから Frobenius 半単純な Weil-Deligne 表現を次のようにして得ることができる：Frobenius 持ち上げ $\varphi \in W_F$ を固定し，$r(\varphi)$ の Jordan 分解 $r(\varphi) = su = us$ をとる（s は半単純，u は冪単）．これを用いて $r^{\mathrm{ss}}(\varphi^n\sigma) = s^n r(\sigma)$ $(\sigma \in I_K)$ と定める．(r^{ss}, V, N) は Frobenius 半単純な Weil-Deligne 表現であり，その同型類は φ のとり方によらない．これを (r, V, N) の **Frobenius 半単純化**といい，$(r, V, N)^{\text{Frob-ss}}$ と書く．

また，Weil-Deligne 表現 $(r^{\mathrm{ss}}, V, 0)$ を $(r, V, N)^{\mathrm{ss}}$ で表し，(r, V, N) の**半単純化**という．これは通常の半単純化，すなわち既約部分商を直和したものと一致する．

例 2.14

雰囲気をつかむために，2 次元の Frobenius 半単純な Weil-Deligne 表現を分類してみよう．まず，$N = 0$ となるような Frobenius 半単純 Weil-Deligne 表現を考える．これは W_F の半単純スムーズ表現に他ならないから，2 次元のものは以下の 2 種類に分けられる：

- $(r, V, 0)$：(r, V) は W_F の 2 次元既約スムーズ表現．
- $(\chi_1 \oplus \chi_2, \mathbb{C}^2, 0)$：$\chi_1$, χ_2 は W_F のスムーズ指標．

次に $N \neq 0$ となるような (r, V, N) を考える．$\operatorname{Ker} N \subset V$ は W_F の作用で安定な部分空間である．N は冪零なので，$\operatorname{Ker} N = \operatorname{Im} N$ は V の 1 次元部分空間であり，N は W_F 同型 $V/\operatorname{Ker} N \xrightarrow{\cong} (\operatorname{Im} N)(-1) = (\operatorname{Ker} N)(-1)$ を誘導する．V は W_F 表現として半単純であったから，W_F 安定な V の 1 次元部分空間 V' で $V = \operatorname{Ker} N \oplus V'$ となるものが存在する．上記の同型から，W_F の表現として $V' = (\operatorname{Ker} N)(-1)$ であることが分かる．V' の基底 e_2 を一つとると，$e_1 = Ne_2$ は $\operatorname{Ker} N$ の基底であり，V の基底 e_1, e_2 のもとでの N の行列表示は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる．以上より，$\operatorname{Ker} N$ へ

の W_F の作用が定める指標を χ と書くと，

$$(r, V, N) \cong \left(\chi \oplus \chi(-1), \mathbb{C}^2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

である．これは異なる χ に対しては同型でない Weil-Deligne 表現を与えるので，$N \neq 0$ の場合の分類が得られた．

命題 2.15
$\mathrm{GL}_n(F)$ の L パラメータの同値類は W_F の Frobenius 半単純な n 次元 Weil-Deligne 表現の同型類と一対一に対応する．

証明　L パラメータ ϕ に対し，

$$r(\sigma) = \phi\left(\sigma, \begin{pmatrix} q^{-d(\sigma)/2} & 0 \\ 0 & q^{d(\sigma)/2} \end{pmatrix}\right), \qquad N = \log \phi\left(1, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

と定めると，$(r, \mathbb{C}^n, N)$ は Frobenius 半単純な n 次元 Weil-Deligne 表現となる．

上の構成で，離散的な L パラメータ $\phi \boxtimes \mathrm{Sym}^{m-1} \mathbf{Std}$（$\phi$ は W_F の既約スムーズ表現）に対応する Weil-Deligne 表現が直既約になること，および異なる組 (ϕ, m) に対応する Weil-Deligne 表現が同型でないことは容易に分かる．したがって，次の 2 つを示せばよい：

(a) 直既約な Frobenius 半単純 Weil-Deligne 表現は離散的な L パラメータより得られる．

(b) Frobenius 半単純な Weil-Deligne 表現は一意的に直既約分解される．

(a) を示す．(r, V, N) を直既約な Frobenius 半単純 Weil-Deligne 表現とする．r は $\bigoplus_{i=0}^m \rho(-i) \otimes_{\mathbb{C}} W_i$（$\rho$ は W_F の既約スムーズ表現，$m \geq 0$, W_i は 0 でない有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間）という形に書けることが容易に分かる．N を与えることは各 $0 \leq i \leq m-1$ に対して W_F 準同型 $\rho \otimes_{\mathbb{C}} W_{i+1} \longrightarrow \rho \otimes_{\mathbb{C}} W_i$ を与えることと同じであり，さらに Schur の補題より，これは $\mathbb{C}$ 線型写像 $N'_i \colon W_{i+1} \longrightarrow W_i$ を与えることと同じである．$W = \bigoplus_{i=0}^m W_i$ とおくと，N'_i は W 上の冪零自己線型写像 N' を定める．Jordan 標準形の理論により，$x_1, \ldots, x_k \in W$ が存在して，$\{N'^l x_j \mid 1 \leq j \leq k, l \geq 0\} \setminus \{0\}$ が W の基底となる．x_j の W_i 成分が 0 でないような最大の i を i_j とおき，それより小さい i に対する W_i 成分を全て 0 に置き換えて得られる元を y_j とすると，$y_1, \ldots, y_k$ も $x_1, \ldots, x_k$ と同じ条件を満たす．各 j に対し $\{N'^l y_j \mid l \geq 0\}$ で張られる W の部分空間を $W^{(j)}$ とおく．$N'^l y_j$ は直和分解 $W = \bigoplus_{i=0}^m W_i$ に関して斉次であるから，W_i の（0 次元または 1 次元の）部分空間 $W_i^{(j)}$ が存在して $W^{(j)} = \bigoplus_{i=0}^m W_i^{(j)}$ となる．このとき $\bigoplus_{i=0}^m \rho(-i) \otimes_{\mathbb{C}} W_i^{(j)}$ は Weil-Deligne 表現になり，これらの $1 \leq j \leq k$ にわたる直和が (r, V, N) であ

る．(r,V,N) は直既約と仮定していたので $k = 1$ となる．さらにこのことから，$\dim W_i = \dim W_i^{(1)} = 1$ および $N_i'\colon W_{i+1} \longrightarrow W_i$ が同型であることも従う．よって (r,V,N) は離散的な L パラメータ $\rho(-\frac{m}{2}) \boxtimes \mathrm{Sym}^m \mathbf{Std}$ に対応する Weil-Deligne 表現と同型になることが分かり，(a) が示された．

(b) を示す．Frobenius 半単純な Weil-Deligne 表現のなす圏が Krull-Schmidt 圏であること，すなわち，任意の直既約な対象の自己準同型環が局所環であることを示せばよい．離散的な L パラメータ $\phi \boxtimes \mathrm{Sym}^{m-1} \mathbf{Std}$ に対応する Weil-Deligne 表現の自己準同型環は $\mathbb{C}$ なので，主張が従う[注6]． ∎

例 2.16

i) L パラメータ $\phi \in \Phi(\mathrm{GL}_n(F))$ が $\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$ を満たすとき，ϕ は W_F の n 次元スムーズ表現とみなすことができる．このとき，ϕ に対応する Weil-Deligne 表現は $(\phi, \mathbb{C}^n, 0)$ である．
ii) L パラメータ $\mathbf{1} \boxtimes \mathrm{Sym}^{n-1} \mathbf{Std} \in \Phi(\mathrm{GL}_n(F))$ に対応する Weil-Deligne 表現 (r,V,N) は以下のように記述される：$V = \mathbb{C}^n$ であり，その標準基底を $e_1, \ldots, e_n$ とすると，

$$r(\sigma)e_i = q^{d(\sigma)(2i-n-1)/2} e_i \ (\sigma \in W_F), \quad Ne_i = \begin{cases} e_{i-1} & (2 \le i \le n), \\ 0 & (i = 1). \end{cases}$$

この Weil-Deligne 表現を $\mathbf{Sp}_n$ と書く．

一方，W_F に対しては ℓ 進表現を考えることもできる．

定義 2.17

ℓ を素数とする．W_F の n 次元 ℓ 進表現とは，n 次元 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ベクトル空間 V と連続準同型 $\rho\colon W_F \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$（$\mathrm{GL}(V)$ には ℓ 進位相を入れる）の組 (ρ, V) のことである．

ℓ 進表現と Weil-Deligne 表現の関係について考えよう．$\mathbb{C}$ と $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ は同型な体であるから，その同型 $\iota\colon \overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$ を一つ固定しておく．(r,V) を W_F の（$\mathbb{C}$ 上の）n 次元スムーズ表現とするとき，ι によって (r,V) を $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の n 次元スムーズ表現とみなすことができる．これは特に W_F の n 次元 ℓ 進表現である．

一般の ℓ 進表現はスムーズであるとは限らないので，全ての ℓ 進表現がこのようにして得られるわけではない．以下では，$\ell \neq p$ と仮定して，Weil-Deligne 表現を用いてスムーズでない ℓ 進表現をつくる方法を説明する．$\mathbb{Z}_\ell(1) = \varprojlim_m \mu_{\ell^m}(\overline{F})$ と

[注6] 一般に，全ての対象が長さ有限であるようなアーベル圏は Krull-Schmidt 圏になることが知られているので，それを用いてもよい．

おく．F の素元 ϖ の ℓ^m 乗根の系 $(\varpi^{1/\ell^m})_m$ を一つとると，$\sigma \in I_F$ に対し $t_\ell(\sigma) = (\sigma(\varpi^{1/\ell^m})/\varpi^{1/\ell^m})_m$ は $\mathbb{Z}_\ell(1)$ の元を与える．I_F が $\mathbb{Z}_\ell(1)$ に自明に作用することに注意すると，$t_\ell(\sigma)$ は $(\varpi^{1/\ell^m})_m$ のとり方によらないことが分かる．$t_\ell\colon I_F \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$ を ℓ 進馴指標と呼ぶ．これは連続な全射であり，この写像によって I_F の最大副 ℓ 商は $\mathbb{Z}_\ell(1)$ と同一視できる．同型 $\mathbb{Z}_\ell(1) \cong \mathbb{Z}_\ell$ および Frobenius 持ち上げ $\varphi \in W_F$ を固定する．このとき，n 次元 Weil-Deligne 表現 (r, V, N)（$\mathbb{C}$ 上の表現だが，固定した同型 ι によって $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の表現とみなす）に対し，

$$\rho(\sigma) = r(\sigma)\exp\bigl(t_\ell(\varphi^{-d(\sigma)}\sigma)N\bigr) \in \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(V) \quad (\sigma \in W_F)$$

で定めると，(ρ, V) は W_F 上の n 次元 ℓ 進表現になる．ただし，$t_\ell(\varphi^{-d(\sigma)}\sigma)N$ は固定した同型 $\mathbb{Z}_\ell(1) \cong \mathbb{Z}_\ell$ を用いて $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(V)$ の冪零元とみなしている．(ρ, V) は同型 $\mathbb{Z}_\ell(1) \cong \mathbb{Z}_\ell$ および Frobenius 持ち上げ φ に依存するが，(ρ, V) の同型類は依存しない．

実は，全ての n 次元 ℓ 進表現はこの方法によって構成されることが分かる：

定理 2.18（Grothendieck のモノドロミー定理）
$\ell \neq p$ のとき，有限次元 Weil-Deligne 表現の圏と有限次元 ℓ 進表現の圏は前述の構成によって圏同値になる．特に，n 次元 Weil-Deligne 表現の同型類と n 次元 ℓ 進表現の同型類は一対一に対応する．

証明は [ST68, Appendix] あるいは [BH06, 32.5, Theorem] を参照．

注意 2.19
定理 2.18 より特に，既約な有限次元 ℓ 進表現はスムーズであることが分かる．

注意 2.20
具体的な ℓ 進表現 (ρ, V) に対して，N は以下の式で計算できる：

$$N = \lim_{\substack{\sigma \in I_F, t_\ell(\sigma) \neq 0 \\ \sigma \to 1}} t_\ell(\sigma)^{-1} \log \rho(\sigma).$$

なお，$t_\ell(\sigma) \neq 0$ となる $\sigma \in I_F$ が 1 に十分近いとき，
- $\rho(\sigma)$ は冪単（すなわち $\rho(\sigma) - 1$ が冪零）であり，したがって $\log \rho(\sigma)$ をとることができる
- $t_\ell(\sigma)^{-1} \log \rho(\sigma)$ は σ によらず一定である

ということが定理 2.18 より保証されるので，右辺の極限は well-defined である．

定理 2.18 によって Frobenius 半単純な Weil-Deligne 表現に対応する ℓ 進表現を Frobenius 半単純な ℓ 進表現という．有限次元 ℓ 進表現 (ρ, V) が Frobenius 半単純であることは，ある Frobenius 持ち上げ $\varphi \in W_F$ に対して $\rho(\varphi)$ が半単純であるこ

とと同値である．有限次元 ℓ 進表現の Frobenius 半単純化，半単純化も定義することができる．

以上の議論から，$\ell \neq p$ のとき，

- $\mathrm{GL}_n(F)$ の L パラメータの同値類
- W_F の Frobenius 半単純な n 次元 ℓ 進表現の同型類

は（同型 $\mathbb{C} \cong \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を固定するごとに）一対一に対応することが分かった．$\phi \in \Phi(\mathrm{GL}_n(F))$ に対応する ℓ 進表現を r_ϕ と書くことにする．

L パラメータは一般の連結簡約代数群に対して定義できるという長所がある一方，ℓ 進表現はエタールコホモロジーによって幾何学的な対象から構成できるという長所がある（以下の例を参照）．実際に $\mathrm{GL}_n(F)$ の局所ラングランズ対応を証明する際にも，ℓ 進表現の側に移って議論を進めることになる．

例 2.21

E を F 上の楕円曲線とする．このとき，E の ℓ 進 Tate 加群 $T_\ell E = \varprojlim_m E[\ell^m](\overline{F})$ は Γ_F が連続に作用する階数 2 の自由 $\mathbb{Z}_\ell$ 加群であるから，$V = T_\ell E \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ は W_F の 2 次元 ℓ 進表現となる（これの双対が 1 次エタールコホモロジー $H^1(E \otimes_F \overline{F}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ である）．

特に，E が Tate 曲線，すなわち F 上分裂乗法的還元を持つと仮定する．このとき，p 進一意化の理論により，$v_F(q_E) > 0$ となる $q_E \in F^\times$ および F 上のリジッド空間の同型 $E \cong \mathbb{G}_m/q_E^{\mathbb{Z}}$ が存在する．特に，F の代数閉包（したがって $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包）の完備化を $\mathbb{C}_p$ と書くと，Γ_F の作用と両立する同型 $E(\mathbb{C}_p) \cong \mathbb{C}_p^\times/q_E^{\mathbb{Z}}$ がある．よって $E[\ell^m](\overline{F}) = E[\ell^m](\mathbb{C}_p) \cong (\mathbb{C}_p^\times/q_E^{\mathbb{Z}})[\ell^m]$ である．図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mu_{\ell^{m+1}}(\mathbb{C}_p) \arrow[r] \arrow[d, "\ell \text{ 乗}"] & (\mathbb{C}_p^\times/q_E^{\mathbb{Z}})[\ell^{m+1}] \arrow[r, "\ell^{m+1} \text{ 乗}"] \arrow[d, "\ell \text{ 乗}"] & q_E^{\mathbb{Z}}/q_E^{\ell^{m+1}\mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mu_{\ell^m}(\mathbb{C}_p) \arrow[r] & (\mathbb{C}_p^\times/q_E^{\mathbb{Z}})[\ell^m] \arrow[r, "\ell^m \text{ 乗}"] & q_E^{\mathbb{Z}}/q_E^{\ell^m\mathbb{Z}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

は可換であり，横列は完全系列なので，m についての逆極限をとることで完全系列 $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1) \longrightarrow T_\ell E \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow 0$ が得られる．$\mathbb{Z}_\ell$ への Γ_F の作用を自明な作用として定めると，この完全系列は Γ_F の作用と両立する．特に，W_F の ℓ 進表現 $V = T_\ell E \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ は自明表現 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ の $\overline{\mathbb{Q}}_\ell(1) = \mathbb{Z}_\ell(1) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ による拡大となっている．

この表現 V のモノドロミー作用素を計算してみよう．1 の ℓ^m 乗根の系 $\zeta = (\zeta_{\ell^m})_m$ $(\zeta_\ell \neq 1)$ および q_E の ℓ^m 乗根の系 $\xi = (q_E^{1/\ell^m})_m$ をそれぞれ一つとると，$\zeta, \xi \in T_\ell E$ は V の基底となる．これらの元への $\sigma \in I_F$ の作用は $\sigma(\zeta) = \zeta$, $\sigma(\xi) = t_\ell(\sigma)^{v_F(q_E)}\xi$ で与えられる．1 を ζ にうつす同型 $\mathbb{Z}_\ell \cong \mathbb{Z}_\ell(1)$ によって $t_\ell(\sigma)$ を $\mathbb{Z}_\ell$ の元とみなし，結果を加法的に書き直すと，$\sigma(\zeta) = \zeta$, $\sigma(\xi) = v_F(q_E)t_\ell(\sigma)\zeta + \xi$ となる．よって，

基底ζ,ξのもとで，モノドロミー作用素Nは行列$\begin{pmatrix}0 & v_F(q_E)\\ 0 & 0\end{pmatrix}$で与えられる（注意2.20の方法を用いた）．特に，Vはスムーズでないℓ進表現である．

Frobenius持ち上げ$\varphi\in W_F$を一つとる．このとき，$\varphi(\zeta)=\zeta^{q^{-1}}$である．一方，$\varphi(\xi)=\zeta^a\xi$となる$a\in\mathbb{Z}_p$が存在するので，$\xi$を$\zeta^{aq(q-1)^{-1}}\xi$で置き換えることで，$\varphi(\xi)=\xi$となるようにできる．このようにとった$\zeta,\xi$に対し，$e_1=\zeta$, $e_2=v_F(q_E)^{-1}\xi$とおくと，$e_1,e_2\in T_\ell E\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell$は$V$の基底であり，

$$\varphi(e_1)=q^{-1}e_1,\ \varphi(e_2)=e_2,\quad \sigma(e_1)=e_1,\ \sigma(e_2)=t_\ell(\sigma)e_1+e_2\quad(\sigma\in I_F)$$

が成り立つ．この表示から，W_Fのℓ進表現Vに対応するWeil-Deligne表現は$\left(\mathbb{C}(1)\oplus\mathbb{C},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\mathbf{Sp}_2\otimes\mathbb{C}(1/2)$であることが分かる．

3 局所ラングランズ対応

3.1 局所ラングランズ対応の主張

前節に引き続き，体同型$\iota\colon\overline{\mathbb{Q}}_\ell\xrightarrow{\cong}\mathbb{C}$を固定し，$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$と$\mathbb{C}$を同一視する．

ここでは，局所ラングランズ対応の主張を紹介する．まず，大雑把な主張は次の通りである．

定理 3.1（$\mathrm{GL}_n(F)$ の局所ラングランズ対応）
$\mathrm{GL}_n(F)$の既約スムーズ表現の同型類のなす集合$\mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$と$\mathrm{GL}_n(F)$の$L$パラメータの同値類のなす集合$\Phi(\mathrm{GL}_n(F))$の間に全単射が存在し，様々な性質を満たす．

$\pi\in\mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$に対応する$L$パラメータを$\phi_\pi$と書く．$p$と異なる素数$\ell$を固定し，$W_F$のFrobenius半単純な$n$次元$\ell$進表現の同型類の集合を$\mathcal{G}_{n,\ell}(F)$で表す．同型$\iota\colon\overline{\mathbb{Q}}_\ell\xrightarrow{\cong}\mathbb{C}$を固定すると，全単射$\Phi(\mathrm{GL}_n(F))\xrightarrow{\cong}\mathcal{G}_{n,\ell}(F)$が得られるが，これと$\mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))\longrightarrow\Phi(\mathrm{GL}_n(F));\,\pi\mapsto\phi_\pi$の合成を$\mathrm{rec}_F$とおく．

以下では，$\pi\mapsto\phi_\pi$およびrec_Fが満たす「様々な性質」を説明していく．まず，$n=1$のときは定理2.4と一致することを要請する：

性質 3.2（局所類体論との関係）
$n=1$のとき，$\chi\in\mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_1(F))$に対し次が成り立つ：

$$\phi_\chi=(\chi\circ\mathrm{Art}_F^{-1})\boxtimes\mathbf{1},\quad \mathrm{rec}_F(\chi)=\chi\circ\mathrm{Art}_F^{-1}.$$

以後，$\mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_1(F))$, $\Phi(\mathrm{GL}_1(F))$, $\mathcal{G}_{1,\ell}(F)$ を同一視し，これらの元を同じ記号で書く．

性質 3.3（表現論的な操作との関係）
$\pi \in \mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$ について次が成り立つ：
（指標による捻り） $F^\times$ のスムーズ指標 χ に対し，

$$\phi_{\pi\otimes(\chi\circ\det)} = \phi_\pi \otimes \chi, \quad \mathrm{rec}_F\bigl(\pi \otimes (\chi \circ \det)\bigr) = \mathrm{rec}_F(\pi) \otimes \chi.$$

（中心指標） π の中心指標を ω_π と書くと，

$$\omega_\pi = \det \circ \phi_\pi = \det\bigl(\mathrm{rec}_F(\pi)\bigr).$$

（双対） $\phi_{\pi^\vee} = \phi_\pi^\vee$, $\mathrm{rec}_F(\pi^\vee) = \mathrm{rec}_F(\pi)^\vee$.
また，F' を別の p 進体とし，$\mathbb{Q}_p$ 上の体同型 $F \xrightarrow{\cong} F'$ が与えられたとすると，次が成り立つ：
（関手性） 以下の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Irr}\bigl(\mathrm{GL}_n(F)\bigr) \arrow[r, "\pi\mapsto\phi_\pi"] \arrow[d, "\cong"] & \Phi\bigl(\mathrm{GL}_n(F)\bigr) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\cong"] & \mathcal{G}_{n,\ell}(F) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathbf{Irr}\bigl(\mathrm{GL}_n(F')\bigr) \arrow[r, "\pi'\mapsto\phi_{\pi'}"] & \Phi\bigl(\mathrm{GL}_n(F')\bigr) \arrow[r, equal] & \mathcal{G}_{n,\ell}(F').
\end{tikzcd}$$

性質 3.4（Zelevinsky 分類との関係）

i) $\pi \in \mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し，以下は同値である：
- π は超尖点表現である．
- ϕ_π は離散的（定義 2.10 参照）かつ $\phi_\pi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$ である．
- $\mathrm{rec}_F(\pi)$ は既約である．

ii) $\pi \in \mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し，以下は同値である：
- π は離散系列表現である．
- ϕ_π は離散的である．
- $\mathrm{rec}_F(\pi)$ は直既約である．

iii) $\pi \in \mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$ を既約離散系列表現とし，$\pi = \mathrm{St}_m(\pi')$（$\pi'$ は $\mathrm{GL}_{n/m}(F)$ の既約超尖点表現）と書いておく（定理 1.22 参照）．このとき次が成り立つ：

$$\phi_\pi = \phi_{\pi'} \boxtimes \mathrm{Sym}^{m-1}\mathbf{Std}, \quad \mathrm{rec}_F(\pi) = \mathrm{rec}_F(\pi') \otimes \mathbf{Sp}_m.$$

ここで，Weil-Deligne 表現 $\mathbf{Sp}_m$（例 2.16 ii) 参照）に対応する ℓ 進表現を同

じ記号 $\mathbf{Sp}_m$ で表した．

iv) $n = n_1 + \cdots + n_k$ を n の分割とし，$\pi_i \in \mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_{n_i}(F))$ を既約離散系列表現とする．このとき，$\pi = \pi_1 \boxplus \cdots \boxplus \pi_k$ に対し次が成り立つ：

$$\phi_\pi = \phi_{\pi_1} \oplus \cdots \oplus \phi_{\pi_k}, \quad \mathrm{rec}_F(\pi) = \mathrm{rec}_F(\pi_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{rec}_F(\pi_k).$$

性質 3.5（不分岐表現との関係）

$\pi \in \mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し，以下は同値である：

- π は不分岐表現である．
- ϕ_π は自然な全射 $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow W_F/I_F$ を経由する．
- $\mathrm{rec}_F(\pi)$ は不分岐である．すなわち，I_F は $\mathrm{rec}_F(\pi)$ に自明に作用する．

π の佐武パラメータを $(z_1, \ldots, z_n)$ とすると，$\mathrm{Frob}_q \in W_F/I_F$ の ϕ_π（あるいは $\mathrm{rec}_F(\pi)$）への作用の固有値は $z_1, \ldots, z_n$ で与えられ，これによって W_F/I_F の半単純表現 ϕ_π（あるいは $\mathrm{rec}_F(\pi)$）は特徴付けられる．

注意 3.6

注意 1.37 を用いると，性質 3.5 は性質 3.4 から導くことができる．その一方で，$\mathrm{GL}_n(F)$ の不分岐表現と W_F の不分岐表現の間に一対一対応があること（**不分岐局所ラングランズ対応**）は佐武同型の帰結であり，局所ラングランズ対応が証明されるよりもはるかに前から知られていた．一般の連結簡約代数群に対しても佐武同型は証明されているので不分岐局所ラングランズ対応も得られており，その形から，局所ラングランズ対応に L 群が現れる理由の一端を見てとることができる．

次に，局所ラングランズ対応と大域ラングランズ対応との関係について述べる．そのためにまず，大域ラングランズ対応について簡単に説明を行う．詳しい説明は例えば [Tay04] を参照していただきたい．

定義 3.7

L を代数体とし，Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の等圧的保型表現とする．ℓ を素数とする．

$\Gamma_L = \mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ の n 次元半単純 ℓ 進表現 R が Π に対応するとは，L の有限素点全体の集合から有限個の元を除いた集合 S が存在して次を満たすことをいう：

$v \in S$ ならば Π_v は不分岐表現であり，$R_v^{\text{Frob-ss}} = \mathrm{rec}_{L_v}(\Pi_v)$ となる．

注意 3.8

i) Chebotarev 密度定理より，Π に対応する R は存在すれば一意的である．また，定理 1.46 より，Π と Π' が同じ R に対応するならば $\Pi = \Pi'$ である．

ii) 上の定義には不分岐ラングランズ対応しか使っていないので，Π と R が対応

するという定義をするためには局所ラングランズ対応を証明する必要はない（注意 3.6 参照）．

以下に述べる予想が，GL_n の大域ラングランズ対応の一つの定式化である．

予想 3.9（GL_n の大域ラングランズ対応）
定義 3.7 に述べた対応によって，以下の 2 つは一対一に対応する．
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の代数的保型表現．
- Γ_L の n 次元半単純代数的 ℓ 進表現．

さらに，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の代数的保型表現で尖点的なものは Γ_L の n 次元既約代数的 ℓ 進表現に対応する．

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の保型表現が代数的であることは定義 1.52 iv) を参照．一方，Γ_L の n 次元 ℓ 進表現が代数的であるとは，ほとんど全ての有限素点で不分岐であり，かつ ℓ の上にある L の素点において de Rham であることをいう [注 7]．

予想 3.9 において，特に保型表現 Π に対してそれに対応する ℓ 進表現 R を構成する問題を **Galois 表現の構成問題**と呼ぶ．この問題が解かれているときに，それが局所ラングランズ対応と整合的であるかを問うことができる：

予想 3.10（局所・大域整合性）
L を代数体とし，Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の代数的保型表現とする．R が Π に対応する n 次元 ℓ 進表現であるとき，L の任意の有限素点 $v \nmid \ell$ に対して次が成り立つ：

$$R_v^{\text{Frob-ss}} = \mathrm{rec}_{L_v}(\Pi_v).$$

注意 3.11
上の予想は，$v \mid \ell$ の場合にも Fontaine によって定義された関手 D_{pst} を用いることで定式化することができる．

局所・大域整合性は局所ラングランズ対応と整数論の関わりを明確にする，非常に重要な予想である．後に紹介する局所ラングランズ対応の証明も，Galois 表現の構成問題および局所・大域整合性の部分的解決を経由することによって行われる．

Galois 表現の構成問題および局所・大域整合性については近年大きく研究が進展した．局所・大域整合性まで分かっているケースとしては，次の定理が挙げられる．

定理 3.12
L を総実体または CM 体とする．Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の正則代数的な尖点的保型表

[注 7] 以前は「幾何学的」と呼ばれていたこともあったが，本当に幾何から来るものと紛らわしいので，最近は保型表現側の用語と合わせて「代数的」と呼ばれている．

現で $\Pi^\vee \cong \Pi^c$ を満たすものとする（c は L の複素共役を表す）．このとき，Π に対応する n 次元半単純代数的 ℓ 進表現 R_Π が存在して，局所・大域整合性

$$(R_\Pi)_v^{\text{Frob-ss}} = \text{rec}_{L_v}(\Pi_v)$$

を満たす．

注意 3.13

i) L についている CM 体という条件，および $\Pi^\vee \cong \Pi^c$ という条件は，$n \geq 3$ のとき GL_n に志村多様体がないため，まず保型表現の理論を用いて $L^+ = L^{c=1}$ 上のユニタリ群に移り，ユニタリ志村多様体の ℓ 進エタールコホモロジーを用いて Galois 表現を構成するという事情によるものである（総実体の場合は CM 体のときに帰着させる）．CM 体，総実体以外の代数体上での Galois 表現の構成についてはほとんど何も分かっていない．

ii) 予想 3.9 にあるように，R_Π は既約であることが期待されているが，一般には証明されていない．Π がある有限素点 v において離散系列表現となるときは，v における局所・大域整合性を用いると R_Π が既約であることが分かる．また，$n = 2$ の場合には，L 関数を用いる議論によって既約性が分かっており（Ribet による．[Tay95, Proposition 3.1] 参照），その手法を発展させることで，一般の n についても，Π が無限素点において強い正則性 (“extremely regular”) を有するときには Dirichlet 密度 1 の素数 ℓ に対して R_Π が既約になることが証明されている ([BLGGT14b, Theorem D])．

定理 3.12 を証明するには膨大なステップが必要であり，多くの研究者が関わっている．それぞれの段階が非自明であるため，詳しく説明したいところではあるが，本題と若干離れるため割愛し，論文 [HT01], [TY07], [Shi11], [CH13], [Car12], [BLGGT12], [BLGGT14a] を挙げるだけに留めておく．

局所・大域整合性はまだ証明されていないが Galois 表現の構成ができている場合としては，次の定理がある．

定理 3.14（Harris-Lan-Taylor-Thorne [HLTT13], Scholze [Sch13c]）
L を総実体あるいは CM 体とし，Π を $\text{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の正則代数的な尖点的保型表現とする．このとき，Π に対応する Γ_L の n 次元半単純 ℓ 進表現 R_Π が存在する．

この R_Π はほとんど全ての有限素点において不分岐であるが，ℓ の上にある L の素点において de Rham であることはまだ分かっていない．また，局所・大域整合性も未解決である．$v \neq \ell$ の場合に $(R_\Pi)_v^{\text{ss}}$ と $\text{rec}_{L_v}(\Pi_v)^{\text{ss}}$ が一致すること（モノドロミー作用素以外の整合性）については，最近 Ila Varma によるアナウンスがあっ

たようである[注8].

最後に，局所ラングランズ対応と L 因子，ε 因子との関係を書いておく．$\psi\colon F \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を非自明な加法的指標とする．$\pi \in \mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し，その不変量 $L(s,\pi)$, $\varepsilon(s,\pi,\psi)$ が定まるのであった（[GJ72], [石井] 参照）．$L(s,\pi)$ は保型表現の L 関数の局所成分となっている．すなわち，L を代数体とし，Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の保型表現とするとき，$L(s,\Pi) = \prod_v L(s,\Pi_v)$, $\varepsilon(s,\Pi) = \prod_v \varepsilon(s,\Pi_v,\Psi_v)$（$\Psi$ は $\mathbb{A}_L/L$ の非自明指標）とおくと，$L(s,\Pi)$ は $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ で絶対収束し，全平面に有理型に解析接続される．さらに，関数等式 $L(s,\Pi) = \varepsilon(s,\Pi)L(1-s,\Pi^\vee)$ を満たす．$n=2$, $L=\mathbb{Q}$ であり，Π が正則保型形式に伴うときには，$L(s,\Pi)$ は Dirichlet 級数を用いて定義される L 関数と（無限成分等を調整すれば）一致する．

一方，W_F の n 次元 ℓ 進表現 ρ に対しても同様の不変量 $L(s,\rho)$, $\varepsilon(s,\rho,\psi)$ を定めることができる．L 因子の定義は

$$L(s,\rho) = \det(1 - \mathrm{Frob}_q \cdot q^{-s}; \rho^{I_F})^{-1}$$

である．ε 因子の定義はずっと複雑なので省略する．[Del76], [BH06, §30] を参照.

性質 3.15（L 因子・ε 因子との関係）

$\pi \in \mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し，以下が成り立つ：

$$L(s,\pi) = L\bigl(s, \mathrm{rec}_F(\pi)\bigr), \quad \varepsilon(s,\pi,\psi) = \varepsilon\bigl(s, \mathrm{rec}_F(\pi), \psi\bigr).$$

注意 3.16

整数 $n, m \geq 1$ および $\pi_1 \in \mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$, $\pi_2 \in \mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_m(F))$ に対し，対の L 因子 $L(s,\pi_1\times\pi_2)$ および対の ε 因子 $\varepsilon(s,\pi_1\times\pi_2,\psi)$ というものが定義できる（[JPSS83] 参照）．rec_F はこれらの局所因子も保つ：

$$L(s,\pi_1\times\pi_2) = L\bigl(s, \mathrm{rec}_F(\pi_1)\otimes\mathrm{rec}_F(\pi_2)\bigr),$$
$$\varepsilon(s,\pi_1\times\pi_2,\psi) = \varepsilon\bigl(s, \mathrm{rec}_F(\pi_1)\otimes\mathrm{rec}_F(\pi_2), \psi\bigr).$$

さらに，この性質によって局所ラングランズ対応を特徴付けることもできる．[Hen93], [Hen02] 参照.

3.2　補足：$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の局所ラングランズ対応

前小節では p 進体 F に対する $\mathrm{GL}_n(F)$ の局所ラングランズ対応を述べたが，F がアルキメデス局所体（$\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$）のときにも類似した理論が存在する．本題とは外れるが，重要な内容であり，また後の説明においても便利であるため，簡単に紹介しておきたい．より詳しい解説は [Kna94] などを参照.

[注8] 2014 年 6 月時点.

■ $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の局所ラングランズ対応

既約 $(\mathfrak{gl}_n, O(n))$ 加群 V が許容的であるとは，$O(n)$ の任意の既約連続表現 ρ が V に重複度有限で現れることをいうのであった．今後は既約許容 $(\mathfrak{gl}_n, O(n))$ 加群のことを $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の既約許容表現と呼ぶことにする．これを以下で定義する $\mathbb{R}$ の Weil 群で分類するのが $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の局所ラングランズ対応である：

定義 3.17

$\mathbb{R}$ の **Weil 群** $W_{\mathbb{R}}$ を以下で定める：集合としては $W_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^\times \amalg j\mathbb{C}^\times$，演算は $j^2 = -1$, $jzj^{-1} = \overline{z}$ $(z \in \mathbb{C}^\times)$ となるようにする．$W_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ の $\mathbb{C}^\times$ による非分裂な拡大である．

$W_{\mathbb{R}}$ には自然に位相が入り，局所コンパクト群となる．

まず $W_{\mathbb{R}}$ の既約連続表現を分類しよう．

命題 3.18

$W_{\mathbb{R}}$ の $\mathbb{C}$ 上の既約連続表現は以下の 3 種類である：

- 1 次元表現 $\theta_s^+ \colon W_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$; $z \mapsto |z|^s$, $j \mapsto 1$ $(s \in \mathbb{C})$.
- 1 次元表現 $\theta_s^- \colon W_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$; $z \mapsto |z|^s$, $j \mapsto -1$ $(s \in \mathbb{C})$.
- 2 次元表現 $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^\times}^{W_{\mathbb{R}}} \theta_{k,s}$ $(k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $s \in \mathbb{C}$, $\theta_{k,s}$ は $\mathbb{C}^\times$ の指標 $z \mapsto (z/|z|)^k |z|^s)$.

証明　まず $\mathbb{C}^\times \cong U(1) \times \mathbb{R}_{>0}$ の既約連続表現は $\theta_{k,s}$ $(k \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{C})$ という形であることがすぐに分かる．$W_{\mathbb{R}}$ の既約表現は $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^\times}^{W_{\mathbb{R}}} \theta_{k,s}$ の既約成分として得られる．$\theta_{k,s}$ へ $j \in W_{\mathbb{R}}$ を作用させると $\theta_{-k,s}$ となるので，$k \neq 0$ のとき $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^\times}^{W_{\mathbb{R}}} \theta_{k,s}$ は既約であり，$\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^\times}^{W_{\mathbb{R}}} \theta_{k,s} \cong \mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^\times}^{W_{\mathbb{R}}} \theta_{-k,s}$ である．また，$k = 0$ のときは $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^\times}^{W_{\mathbb{R}}} \theta_{0,s} = \theta_s^+ \oplus \theta_s^-$ となる．以上より主張が従う．■

θ_s^+, θ_s^-, $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}^\times}^{W_{\mathbb{R}}} \theta_{k,s}$ に対応する表現は以下のように構成される：

定義 3.19

i) $s \in \mathbb{C}$ とする．$\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ の指標 χ_s^+, χ_s^- を $\chi_s^+(a) = |a|^s$, $\chi_s^-(a) = \mathrm{sgn}(a)|a|^s$ $(a \in \mathbb{R}^\times)$ で定める．$\mathrm{rec}_{\mathbb{R}}(\theta_s^+) = \chi_s^+$, $\mathrm{rec}_{\mathbb{R}}(\theta_s^-) = \chi_s^-$ とおく．

ii) $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $s \in \mathbb{C}$ とする．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の既約表現 $D_{k,s}$ を以下のように定める．まず，$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ の表現 D_k^+ を

$$\left\{ f \colon \mathfrak{H} \longrightarrow \mathbb{C} \text{：正則} \;\middle|\; \int_{\mathfrak{H}} |f(x+yi)|^2 y^{k-1} dxdy < \infty \right\}$$

に $g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ を

$$(gf)(z)=(\det g)^{\frac{k+1}{2}}(bz+d)^{-(k+1)}f\Big(\frac{az+c}{bz+d}\Big)$$

と作用させることによって定義する（正確にはこれに伴う $(\mathfrak{gl}_2, O(2))$ 加群を考える）．これを用いて $D_{k,s}=\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})} D_k^+ \otimes |\det|^s$ と定める．

注意 3.20

i) $D_{k,s}$ の中心指標は $a \mapsto \mathrm{sgn}(a)^{k+1}|a|^{2s}$ であり，無限小指標は $(k/2+s, -k/2+s)$ である．

ii) f を重さ $w \geq 2$ の正規化された Hecke 固有新形式とし，f に伴う $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現（1.4.3 節参照）を Π_f と書くと，$(\Pi_f)_\infty \cong D_{w-1,-w/2}$ である．

iii) $D_{1,0}$ は Steinberg 表現の類似であり，構成も同様にすることができる．すなわち，$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ 上の $O(2)$ 有限な関数全体の空間を定数関数全体の空間で割ったものに $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ を作用させて得られる $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の表現は $D_{1,0}$ と同型である．

実は，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 1)$ の既約離散系列表現は上で定義した χ_s^+, χ_s^-, $D_{k,s}$ のみであることが知られている．これらに対して，定義 1.26 と同様にラングランズ和を定義することができる：

定義 3.21

$n=n_1+\cdots+n_k$ を n の分割とし，$1 \leq n_i \leq 2$ と仮定する．π_i を $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{R})$ の既約離散系列表現とする（すなわち，$n_i=1$ なら $\pi_i \in \{\chi_s^+, \chi_s^- \mid s \in \mathbb{C}\}$ であり，$n_i=2$ なら $\pi_i \in \{D_{m,s} \mid m \in \mathbb{Z}_{>0}, s \in \mathbb{C}\}$ である）．$\pi_1, \ldots, \pi_k$ に対応する s をそれぞれ $s_1, \ldots, s_k$ と書き，必要なら並べ換えを行うことによって $\mathrm{Re}\, s_1 \geq \cdots \geq \mathrm{Re}\, s_k$ となるようにしておく．このとき，$\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{R})}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_k)$ は唯一の既約商を持つ（P は分割 $n=n_1+\cdots+n_k$ に対応する標準放物型部分群）．この既約商を $\pi_1 \boxplus \cdots \boxplus \pi_k$ とおく．

このラングランズ和を用いると，$W_\mathbb{R}$ の一般の半単純連続表現に対して $\mathrm{rec}_\mathbb{R}$ が定義できる：

定義 3.22

$\phi=\phi_1 \oplus \cdots \oplus \phi_k$ を $W_\mathbb{R}$ の n 次元半単純連続表現（$= L$ パラメータ）とする（ϕ_i は $W_\mathbb{R}$ の既約表現）．このとき，$\mathrm{rec}_\mathbb{R}(\phi)=\mathrm{rec}_\mathbb{R}(\phi_1) \boxplus \cdots \boxplus \mathrm{rec}_\mathbb{R}(\phi_k)$ と定める．

定理 3.23（$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ **のラングランズ対応**）
$W_{\mathbb{R}}$ の n 次元半単純連続表現の同型類（$=L$ パラメータの $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 共役類）と $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の既約許容表現の同型類は $\mathrm{rec}_{\mathbb{R}}$ によって一対一に対応する．

この定理は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に対する Langlands 分類に他ならない．

■ $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の局所ラングランズ対応

ここでは，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約許容表現，すなわち既約許容 $(\mathfrak{gl}_n, U(n))$ 加群の分類を考える．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ のときとほとんど同じなので，ごく簡単に述べる．

定義 3.24
$W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$ を $\mathbb{C}$ の **Weil 群**と呼ぶ．これは局所コンパクト群である．

定義 3.25
$W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$ の指標 ϕ を $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ の指標とみなしたものを $\mathrm{rec}_{\mathbb{C}}(\phi)$ と書く．$\phi = \phi_1 \oplus \cdots \oplus \phi_n$ を $W_{\mathbb{C}}$ の n 次元半単純連続表現とするとき（ϕ_i は $W_{\mathbb{C}}$ の既約表現，すなわち指標），$\mathrm{rec}_{\mathbb{C}}(\phi) = \mathrm{rec}_{\mathbb{C}}(\phi_1) \boxplus \cdots \boxplus \mathrm{rec}_{\mathbb{C}}(\phi_n)$ と定める．

定理 3.26（$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ **のラングランズ対応**）
$W_{\mathbb{C}}$ の n 次元半単純連続表現の同型類と $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約許容表現の同型類は $\mathrm{rec}_{\mathbb{C}}$ によって一対一に対応する．

3.3 ラングランズ関手性

p 進体の場合に話を戻そう．局所ラングランズ対応により $\mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$ と対応する $\mathcal{G}_{n,\ell}(F)$ は群 W_F の（既約とは限らない）有限次元表現からなっているので，制限，誘導，直和，テンソル積などといった通常の表現論的操作をすることができる．したがって $\mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$ の方でも対応する操作が存在することになるが，こちらは一般にかなり非自明な操作となる（例えば直和に対応する操作はラングランズ和であった）．このような，Galois 側の観察から存在が期待される操作を総称して**ラングランズ関手性**と呼ぶ．ラングランズ関手性については，局所ラングランズ対応がまだ予想であった頃（一般の p 進簡約群に対しては今もそうである）から研究が行われており，いくつかの場合は局所ラングランズ対応とは独立に表現論的操作が構成されていた．興味深いことに，GL_n の局所ラングランズ対応の証明にはこうした部分的なラングランズ関手性が使われるのである．

ここでは，ラングランズ関手性の代表例として，表現の制限に対応する**底変換**，誘導表現に対応する**保型誘導**を紹介する．

3.3.1 底変換

E を F の有限次拡大とする．$W_E \subset W_F$ より，制限写像 $\mathrm{Res}^{W_F}_{W_E}\colon \mathcal{G}_{n,\ell}(F) \longrightarrow \mathcal{G}_{n,\ell}(E)$ が存在する．したがって，局所ラングランズ対応によれば，自然な写像

$$\mathbf{Irr}\bigl(\mathrm{GL}_n(F)\bigr) \longrightarrow \mathbf{Irr}\bigl(\mathrm{GL}_n(E)\bigr)$$

が存在することになる．これを**底変換**と呼び，$\mathrm{BC}_{E/F}$ と書く．

E が F の巡回拡大であるときには，局所ラングランズ対応を使わずに純表現論的な手法で底変換 $\mathrm{BC}_{E/F}$ を定式化し，構成することができる（Arthur-Clozel [AC89] による）．以下ではそれを説明しよう．E を F の巡回拡大とし，その拡大次数を d とする．ここでは簡単のため，d は素数であるとする [注 9]．

生成元 $\tau \in \mathrm{Gal}(E/F)$ を固定する．π を $\mathrm{GL}_n(E)$ のスムーズ表現とするとき，$\mathrm{GL}_n(E)$ の表現 π^τ を $\pi^\tau(g) = \pi(\tau(g))$ $(g \in \mathrm{GL}_n(E))$ で定める．$\pi \cong \pi^\tau$ であるとき，π は $\boldsymbol{\tau}$ **安定**であるという．

(π, V) を $\mathrm{GL}_n(E)$ の τ 安定な既約スムーズ表現とする．このとき，$\mathbb{C}$ 同型写像 $I_\tau\colon V \xrightarrow{\cong} V$ で $I_\tau \circ \pi(g) = \pi(\tau(g)) \circ I_\tau$ $(g \in \mathrm{GL}_n(E))$ を満たすものが定数倍を除いて唯一存在する．この I_τ を以下のように正規化する：

- π が本質的緩増加である場合．F の非自明指標 ψ を固定する．Borel 部分群 $B \subset \mathrm{GL}_n$ の冪単根基を N と書く．指標 $\eta\colon N(E) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を

$$x = (x_{ij}) \mapsto \psi\bigl(\mathrm{Tr}_{E/F}(x_{1,2} + x_{2,3} + \cdots + x_{n-1,n})\bigr)$$

  で定める．このとき，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(E)}(\pi, \mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_n(E)}_{N(E)}\eta) = \mathrm{Hom}_{N(E)}(\pi|_{N(E)}, \eta)$ は 1 次元ベクトル空間になることが知られている [注 10]．$\eta^\tau = \eta$ に注意すると，I_τ は

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{N(E)}(\pi|_{N(E)}, \eta) &= \mathrm{Hom}_{N(E)}(\pi^\tau|_{N(E)}, \eta^\tau)\\ &= \mathrm{Hom}_{N(E)}(\pi^\tau|_{N(E)}, \eta) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{N(E)}(\pi|_{N(E)}, \eta)\end{aligned}$$

  を誘導するので，これが恒等写像となるように I_τ を定数倍して正規化する．
- π が一般の場合，定理 1.25 より，n の分割 $n = n_1 + \cdots + n_k$ および $\mathrm{GL}_{n_i}(E)$ の既約本質的緩増加表現 π_i が存在して，π は $\text{n-Ind}^{\mathrm{GL}_n(E)}_{P(E)}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_k)$ の唯一の既約商となる（P は分割 $n = n_1 + \cdots + n_k$ に対応する標準放物型

注 9 [AC89] においては素数次でない巡回拡大に対して様々な主張が証明されているが，[Art05, p. 191] にあるように，この証明にはギャップがある．底変換の存在のように，素数次の場合の結果を繰り返し使うことで一般の巡回拡大に対して証明できる主張もあるが，全てがそうではない．

注 10 一般に，このような条件を満たす既約スムーズ表現 π を**生成的**であるという．本質的緩増加表現が生成的になるのは GL_n の特殊事情であり，一般の p 進簡約群の場合には生成的でない超尖点表現も存在する．

部分群)．Langlands 分類の一意性より π_i は τ 安定となるから，これに上の議論を適用することで $I_\tau\colon \pi_i \xrightarrow{\cong} \pi_i^\tau$ を定めることができる．これから $I_\tau\colon \text{n-Ind}_{P(E)}^{\mathrm{GL}_n(E)}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_k) \xrightarrow{\cong} \text{n-Ind}_{P(E)}^{\mathrm{GL}_n(E)}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_k)^\tau$ が誘導され，唯一の既約商に移ることで $\pi \xrightarrow{\cong} \pi^\tau$ が得られる．

この I_τ を用いて，π の「捻られた指標」を定義する．

定義 3.27

(π, V) を $\mathrm{GL}_n(E)$ の τ 安定な既約スムーズ表現とする．$f \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(E))$ に対し，$f \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(E), K)$ を満たす $\mathrm{GL}_n(E)$ の τ 安定なコンパクト開部分群 K をとると，$\pi(f) \circ I_\tau$ は V^K を V^K にうつす．$\mathrm{Tr}_{\pi,\tau}(f) = \mathrm{Tr}(\pi(f) \circ I_\tau; V^K)$ とおく．これは K のとり方によらない．

$\mathrm{Tr}_{\pi,\tau}\colon f \mapsto \mathrm{Tr}_{\pi,\tau}(f)$ を**捻られた指標超関数**と呼ぶ．

定理 1.10 と同様，捻られた指標超関数は $\mathrm{GL}_n(E)$ 上の局所 L^1 関数となる．より正確に定理を述べるため，一つ定義をしておく．

定義 3.28

$g \in \mathrm{GL}_n(E)$ に対し，$g\tau(g) \cdots \tau^{d-1}(g) \in \mathrm{GL}_n(E)$ と $\mathrm{GL}_n(E)$ 共役な $\mathrm{GL}_n(F)$ の元が $\mathrm{GL}_n(F)$ 共役を除いて一意的に存在する．この元を g の**ノルム**と呼び，$\mathcal{N}g$ で表す．

$g, g' \in \mathrm{GL}_n(E)$ が **τ 共役**であるとは，$g' = h^{-1}g\tau(h)$ となる $h \in \mathrm{GL}_n(E)$ が存在することをいう．g, g' が τ 共役ならば $\mathcal{N}g$ と $\mathcal{N}g'$ は $\mathrm{GL}_n(F)$ 共役である．

$\mathcal{N}g$ が $\mathrm{GL}_n(F)$ の正則半単純元であるとき，$g \in \mathrm{GL}_n(E)$ は **τ 正則**であるという．τ 正則な $\mathrm{GL}_n(E)$ の元全体を $\mathrm{GL}_n(E)^{\tau\text{-reg}}$ で表す．

定理 3.29

$\mathrm{GL}_n(E)^{\tau\text{-reg}}$ 上の局所定数関数 $\theta_{\pi,\tau}$ で $\mathrm{GL}_n(E)$ 上局所 L^1 であるものが存在し，任意の $f \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(E))$ に対し

$$\mathrm{Tr}_{\pi,\tau}(f) = \int_{\mathrm{GL}_n(E)^{\tau\text{-reg}}} f(g)\theta_{\pi,\tau}(g)dg$$

が成り立つ．$\theta_{\pi,\tau}$ は τ 共役で不変な関数である．

捻られた指標 $\theta_{\pi,\tau}$ を用いて本質的緩増加表現の底変換を定義しよう．

定義 3.30

π を $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約本質的緩増加表現とし，Π を $\mathrm{GL}_n(E)$ の τ 安定な既約スムー

ズ表現とする．Π が π の**底変換**であるとは，任意の $g \in \mathrm{GL}_n(E)^{\tau\text{-reg}}$ に対し次の指標関係式（**新谷関係式**）が成り立つことをいう：

$$\theta_{\Pi,\tau}(g) = \theta_\pi(\mathcal{N}g).$$

底変換が存在すれば同型を除いて一意であることは次の補題よりすぐに分かる：

補題 3.31

π, π' を $\mathrm{GL}_n(E)$ の τ 安定な既約スムーズ表現とする．$\pi \not\cong \pi'$ ならば，捻られた指標超関数 $\mathrm{Tr}_{\pi,\tau}$, $\mathrm{Tr}_{\pi',\tau}$ は線型独立である．

証明 τ 安定なコンパクト開部分群 $K \subset \mathrm{GL}_n(E)$ で $\pi^K, \pi'^K \neq 0$ となるものをとる．定理 1.8 より，$\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(E), K)$ 加群として $\pi^K \not\cong \pi'^K$ である．π の表現空間を V とし，V^K の基底 $e_1, \ldots, e_m$ をとると，$f \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(E), K)$ に対し

$$\mathrm{Tr}_{\pi,\tau}(f) = \sum_{i=1}^{m} \bigl\langle \pi(f) I_\tau(e_i), e_i^\vee \bigr\rangle$$

である（$e_1^\vee, \ldots, e_m^\vee \in (V^K)^*$ は $e_1, \ldots, e_m$ の双対基底）．$I_\tau(e_i)$ は $e_1, \ldots, e_m$ の線型結合であるから，$\mathrm{Tr}_{\pi,\tau}$ は $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(E), K)$ 加群 π^K の行列係数の線型結合である．$\mathrm{Tr}_{\pi',\tau}$ についても同様であるから，π^K と π'^K の行列係数が線型独立であることに帰着できる．これは一般の有限次元 $\mathbb{C}$ 代数の有限次元表現に対してよく知られた事実である． ∎

例 3.32

$n = 1$ のとき，$\mathrm{GL}_1(F) = F^\times$ のスムーズ指標 χ の底変換は $\chi \circ N_{E/F}$ である．

定理 3.33（Arthur-Clozel）

i) π を $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約本質的緩増加表現とするとき，その底変換 $\mathrm{BC}_{E/F}(\pi)$ が存在し，本質的緩増加となる．$\mathrm{BC}_{E/F}(\pi)$ は生成元 τ のとり方に依存しない．
ii) $\mathrm{GL}_n(E)$ の τ 安定な既約本質的緩増加表現 Π に対し，$\Pi = \mathrm{BC}_{E/F}(\pi)$ となる $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約本質的緩増加表現が少なくとも一つ存在する．

この定理 ([AC89, Chapter 1, Theorem 6.2]) の証明は [AC89, Chapter 1, §6] において扱われている．i) について簡単な方針を述べよう．まず，π が二乗可積分表現である場合に簡単に帰着できる．この場合の証明は以下のような大域的な方法を用いる．代数体の d 次巡回拡大 L'/L および L の有限素点 v で，拡大 $(L' \otimes_L L_v)/L_v$ が E/F と同型になるようなものをとる．このとき，$\mathrm{GL}_n(F) \cong \mathrm{GL}_n(L_v)$ の表現 π

は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の尖点的保型表現へとのばすことができる．したがって，指標超関数 $\mathrm{Tr}_\pi(-)$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ に対する（Arthur-Selberg 型）跡公式のスペクトル側に現れる．尖点的保型表現へののばし方に局所条件をつける [注 11] ことにより，この場合は**単純跡公式** (simple trace formula) という，極めて簡単な形の跡公式を考えれば十分である．一方，捻られた指標超関数は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{L'})$ の**捻られた跡公式** (twisted trace formula) のスペクトル側に寄与するから，底変換の存在を示すには，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の単純跡公式と $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{L'})$ の捻られた単純跡公式双方の幾何側，すなわち軌道積分を比較し，それからスペクトル側の関係式を導けばよい．軌道積分の比較はおおむね基本補題と呼ばれる問題にあたるが，この場合には直接計算によって示される．[AC89, Chapter 1, §4] 参照．なお，ii) も同様に，大域化して単純跡公式を用いることで証明される．

以下で紹介する底変換の性質は，いずれも表現論的な手法によって証明されるが，局所ラングランズ対応で Galois 側に移って考えると理解しやすい．また，これらの多くは局所ラングランズ対応の証明にも用いられる．

命題 3.34
π を $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約本質的緩増加表現とするとき，次が成り立つ：
i) $F^\times$ のスムーズ指標 χ に対し，$\mathrm{BC}_{E/F}(\pi\otimes\chi)=\mathrm{BC}_{E/F}(\pi)\otimes(\chi\circ N_{E/F})$.
ii) π の中心指標を ω_π と書くと，$\omega_{\mathrm{BC}_{E/F}(\pi)}=\omega_\pi\circ N_{E/F}$.
iii) $\mathrm{BC}_{E/F}(\pi)^\vee=\mathrm{BC}_{E/F}(\pi^\vee)$.

証明　いずれも指標関係式より容易に従う． ∎

命題 3.35
π を $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約離散系列表現とする．$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約本質的緩増加表現 π' が $\mathrm{BC}_{E/F}(\pi)=\mathrm{BC}_{E/F}(\pi')$ を満たすならば，$F^\times/N_{E/F}(E^\times)$ の指標 χ が存在して $\pi\otimes(\chi\circ\det)\cong\pi'$ となる．

証明　指標の直交関係を用いる．[AC89, Chapter 1, Proposition 6.7] 参照． ∎

命題 3.36
$n=n_1+\cdots+n_k$ を n の分割とし，π_i を $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ の既約緩増加表現とする．このとき，$\mathrm{BC}_{E/F}(\pi_1\boxplus\cdots\boxplus\pi_k)=\mathrm{BC}_{E/F}(\pi_1)\boxplus\cdots\boxplus\mathrm{BC}_{E/F}(\pi_k)$ が成り立つ．

[注 11] 具体的には，ある有限素点で超尖点表現，別の有限素点で Steinberg 表現となるようにのばす．[AC89, Chapter 1, Lemma 6.5] 参照．

略証　分割 $n = n_1 + \cdots + n_k$ に対応する標準放物型部分群を P と書く．$\pi_1, \ldots, \pi_k$ が既約緩増加表現であることから，$\text{n-Ind}_{P(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_k)$ は既約表現となる．したがって $\pi_1 \boxplus \cdots \boxplus \pi_k = \text{n-Ind}_{P(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_k)$ である．同様に，$\mathrm{BC}_{E/F}(\pi_1) \boxplus \cdots \boxplus \mathrm{BC}_{E/F}(\pi_k) = \text{n-Ind}_{P(E)}^{\mathrm{GL}_n(E)}(\mathrm{BC}_{E/F}(\pi_1) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathrm{BC}_{E/F}(\pi_k))$ である．誘導表現の指標を与える公式 ([vD72], [Clo84]) から，$\text{n-Ind}_{P(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_k)$ と $\text{n-Ind}_{P(E)}^{\mathrm{GL}_n(E)}(\mathrm{BC}_{E/F}(\pi_1) \boxtimes \cdots \boxtimes \mathrm{BC}_{E/F}(\pi_k))$ が定義 3.30 の指標関係式を満たすことが容易に確認できる． ∎

命題 3.36 を用いると，本質的緩増加とは限らない既約スムーズ表現に対してもその底変換を定義することができる．π を $\mathrm{GL}_n(F)$ の（本質的緩増加とは限らない）既約スムーズ表現とするとき，系 1.28 より $\pi = \pi_1 \boxplus \cdots \boxplus \pi_k$（$\pi_i$ は既約離散系列表現）と書けるので，$\mathrm{BC}_{E/F}(\pi) = \mathrm{BC}_{E/F}(\pi_1) \boxplus \cdots \boxplus \mathrm{BC}_{E/F}(\pi_k)$ と定めればよい．命題 3.36 より，π が本質的緩増加である場合は以前の定義と一致することが従う．なお，π が本質的緩増加でない場合には，$\mathrm{BC}_{E/F}(\pi)$ は定義 3.30 のような指標関係式を満たすとは限らない．

例 3.37

π を $\mathrm{GL}_n(F)$ の不分岐表現とし，その佐武パラメータを $(z_1, \ldots, z_n)$ とする．不分岐指標 $\chi_i \colon F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を命題 1.36 の通りに定めると，$\pi = \chi_1 \boxplus \cdots \boxplus \chi_n$ である（注意 1.37）．したがって，例 3.32 より，$\mathrm{BC}_{E/F}(\pi) = (\chi_1 \circ N_{E/F}) \boxplus \cdots \boxplus (\chi_n \circ N_{E/F})$ となる．特に，E/F が不分岐拡大である場合には，$\mathrm{BC}_{E/F}(\pi)$ は $\mathrm{GL}_n(E)$ の不分岐表現となり，その佐武パラメータは $(z_1^d, \ldots, z_n^d)$ で与えられる．

命題 3.38

i) $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約超尖点表現 π に対し，$\pi \cong \pi \otimes (\chi \circ \det)$ となる $F^\times / N_{E/F}(E^\times)$ の非自明指標 χ が存在するならば，$d \mid n$ であり，次が成り立つ：
   (a) $\mathrm{GL}_{n/d}(E)$ の τ 安定でない既約超尖点表現 Π が存在して，$\mathrm{BC}_{E/F}(\pi) = \Pi \boxplus \Pi^\tau \boxplus \cdots \boxplus \Pi^{\tau^{d-1}}$ となる．
   (b) 整数 $m \geq 1$ に対し，$\mathrm{BC}_{E/F}(\mathrm{St}_m(\pi)) = \mathrm{St}_m(\Pi) \boxplus \mathrm{St}_m(\Pi)^\tau \boxplus \cdots \boxplus \mathrm{St}_m(\Pi)^{\tau^{d-1}}$ が成り立つ．

ii) $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約超尖点表現 π に対し，$\pi \cong \pi \otimes (\chi \circ \det)$ となる $F^\times / N_{E/F}(E^\times)$ の非自明指標 χ が存在しないならば，次が成り立つ：
   (a) $\mathrm{BC}_{E/F}(\pi)$ は $\mathrm{GL}_n(E)$ の既約超尖点表現である．
   (b) 整数 $m \geq 1$ に対し，$\mathrm{BC}_{E/F}(\mathrm{St}_m(\pi)) = \mathrm{St}_m(\mathrm{BC}_{E/F}(\pi))$ が成り立つ．

iii) $d \mid n$ であるとき，$\mathrm{GL}_{n/d}(E)$ の τ 安定でない既約超尖点表現 Π に対し，$\mathrm{BC}_{E/F}(\pi) = \Pi \boxplus \Pi^\tau \boxplus \cdots \boxplus \Pi^{\tau^{d-1}}$ となる $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約超尖点表現 π が一意的に存在する．さらに，$\mathrm{BC}_{E/F}$ による $\Pi \boxplus \Pi^\tau \boxplus \cdots \boxplus \Pi^{\tau^{d-1}}$ の逆像は

$\{\pi\}$ となる．

iv) $\mathrm{GL}_n(E)$ の τ 安定な既約超尖点表現 Π に対し，$\mathrm{BC}_{E/F}(\pi) = \Pi$ を満たす $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約超尖点表現 π が存在する．このような π を一つ固定すると，$\mathrm{BC}_{E/F}$ による Π の逆像は $\{\pi \otimes (\chi \circ \det) \mid \chi$ は $F^\times/N_{E/F}(E^\times)$ の指標 $\}$ となる．

証明 i), ii) いずれも (a) は [AC89, Chapter 1, Proposition 6.6 (i), Lemma 6.10] より，(b) は [AC89, Chapter 1, Lemma 6.12] より従う．

iii) を示す．定理 3.33 ii) より $\mathrm{BC}_{E/F}(\pi) = \Pi \boxplus \Pi^\tau \boxplus \cdots \boxplus \Pi^{\tau^{d-1}}$ となる $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約本質的緩増加表現 π が存在する．系 1.28 を用いて $\pi = \mathrm{St}_{m_1}(\pi_1) \boxplus \cdots \boxplus \mathrm{St}_{m_k}(\pi_k)$ と書いておく（π_i は $\mathrm{GL}_{n_i/m_i}(F)$ の既約超尖点表現，$n = n_1 + \cdots + n_k$）．命題 3.36 および i), ii) より，$\mathrm{BC}_{E/F}(\pi)$ が $\Pi \boxplus \Pi^\tau \boxplus \cdots \boxplus \Pi^{\tau^{d-1}}$ という形になるためには，まず $m_1 = \cdots = m_k = 1$ となることが必要である．また，$\mathrm{BC}_{E/F}(\pi_1)$ をラングランズ和で書いたときに出てくる成分全体は $\{\Pi, \Pi^\tau, \ldots, \Pi^{\tau^{d-1}}\}$ の τ 安定な部分集合であり，Π が τ 安定でないことからこれは全体に一致しなければならない．このことから $k = 1$ となり，$\pi = \pi_1$ は超尖点表現であることが分かる．またこのとき π は i) のタイプであるから，命題 3.35 より $\mathrm{BC}_{E/F}^{-1}(\Pi \boxplus \Pi^\tau \boxplus \cdots \boxplus \Pi^{\tau^{d-1}}) = \{\pi\}$ となることが分かる．

iv) を示す．定理 3.33 ii) より $\mathrm{BC}_{E/F}(\pi) = \Pi$ となる $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約本質的緩増加表現 π が存在する．上と同様に $\pi = \mathrm{St}_{m_1}(\pi_1) \boxplus \cdots \boxplus \mathrm{St}_{m_k}(\pi_k)$ と書くと，命題 3.36 および i), ii) から $m_1 = \cdots = m_k = 1$ および $k = 1$ が結論され，π が超尖点表現であることが分かる．$\mathrm{BC}_{E/F}^{-1}(\Pi)$ についての主張は命題 3.35 より直ちに従う．■

次の定理が示す通り，局所的な底変換は大域的な理論と整合的になる．

定理 3.39（Arthur-Clozel）

L を代数体とし，L' を L の d 次巡回拡大とする．

Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の等圧的保型表現とする．L' の素点 w に対し，$\mathrm{GL}_n(L'_w)$ の既約スムーズ表現 Π'_w を以下のように定める：w の下にある L の素点を v とするとき，

- $L'_w = L_v$ ならば $\Pi'_w = \Pi_v$ とする．
- $L'_w \neq L_v$ ならば L'_w は L_v の d 次巡回拡大であるから，$\Pi'_w = \mathrm{BC}_{L'_w/L_v}(\Pi_v)$ とおく（v, w が無限素点である場合の底変換については説明していないが，局所ラングランズ対応（定理 3.23，定理 3.26）を用いて構成することができる．[AC89, Chapter 1, §7] 参照）．

このとき，$\Pi' = \bigotimes_w \Pi'_w$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{L'})$ の等圧的保型表現となる．これを $\mathrm{BC}_{L'/L}(\Pi)$ と書き，Π の底変換と呼ぶ．

この定理については [AC89, Chapter 3, Theorem 4.2, Theorem 5.1] を参照．証

明の方針は，定理 3.33 と同様，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ に対する跡公式と $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{L'})$ に対する捻られた跡公式を比較するというものであるが，考える保型表現の局所成分に条件を付けることができないため，単純跡公式を用いることができない．その代わりに，Arthur によって構成された不変跡公式 ([Art81], [Art88a], [Art88b]) を用いる．不変跡公式の比較は単純跡公式の場合と比べてかなり難しく，[AC89, Chapter 2] 全てがその証明に割かれている．

大域的な底変換についても，命題 3.38 と類似した性質が成り立つ：

定理 3.40

L'/L を定理 3.39 の通りとし，$\mathrm{Gal}(L'/L)$ の生成元 τ を固定する．

i) Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の尖点的保型表現とし，$\Pi \cong \Pi \otimes (\chi \circ \det)$ を満たすような $\mathbb{A}_L^\times/L^\times N_{L'/L}(\mathbb{A}_{L'}^\times)$ の非自明指標 χ が存在すると仮定する．このとき $d \mid n$ であり，$\mathrm{GL}_{n/d}(\mathbb{A}_{L'})$ の τ 安定でない尖点的保型表現 Π' が存在して $\mathrm{BC}_{L'/L}(\Pi) = \Pi' \boxplus \Pi'^{\tau} \boxplus \cdots \boxplus \Pi'^{\tau^{d-1}}$ となる．

ii) Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の尖点的保型表現とし，i) のような指標 χ が存在しないと仮定する．このとき，$\mathrm{BC}_{L'/L}(\Pi)$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{L'})$ の尖点的保型表現である．

iii) $d \mid n$ であるとき，$\mathrm{GL}_{n/d}(\mathbb{A}_{L'})$ の τ 安定でない尖点的保型表現 Π' に対し，$\mathrm{BC}_{L'/L}(\Pi) = \Pi' \boxplus \Pi'^{\tau} \boxplus \cdots \boxplus \Pi'^{\tau^{d-1}}$ となる $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の尖点的保型表現 Π が一意的に存在する．

iv) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{L'})$ の τ 安定な尖点的保型表現 Π' に対し，$\mathrm{BC}_{L'/L}(\Pi) = \Pi'$ となる $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の尖点的保型表現 Π が存在する．このような Π を一つ固定すると，$\mathrm{BC}_{L'/L}$ による Π' の逆像は $\{\Pi \otimes (\chi \circ \det) \mid \chi$ は $\mathbb{A}_L^\times/L^\times N_{L'/L}(\mathbb{A}_{L'}^\times)$ の指標$\}$ となる．

証明　iv) の「$\mathrm{BC}_{L'/L}$ による逆像」の部分以外は [AC89, Chapter 3, Theorem 4.2] に含まれている．残った部分は [AC89, Chapter 3, Theorem 4.2] の証明から分かる． ∎

注意 3.41

保型表現に対する底変換の理論の存在の背景には，もちろん大域ラングランズ対応（予想 3.9）がある．しかし，予想 3.9 が代数的保型表現のみに関するものであるのに対し，定理 3.39 や定理 3.40 は代数的とは限らない保型表現をその対象としている．このことは，代数的とは限らない保型表現を記述する，予想 3.9 より一般のラングランズ対応が存在すること（仮説的ラングランズ群の存在）を示唆している．[Lan79] 参照．

最後に，底変換が局所ラングランズ対応を介して制限関手 $\mathrm{Res}_{W_E}^{W_F}$ に対応することを定理の形で述べておく．

定理 3.42

$\mathrm{rec}_E(\mathrm{BC}_{E/F}(\pi)) = \mathrm{rec}_F(\pi)|_{W_E}$.

この定理は局所ラングランズ対応を証明する途中で得られ，底変換の理論と合わせて局所ラングランズ対応自体の証明に重要な役割を果たす．4.1 節参照．

3.3.2 保型誘導

3.3.1 節と同様，E を F の有限次拡大とし，$d=[E:F]$ とおく．W_E は W_F の指数 d の開部分群なので，誘導表現により写像 $\mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}\colon \mathcal{G}_{n,\ell}(F) \longrightarrow \mathcal{G}_{nd,\ell}(E)$ が導かれる．したがって，局所ラングランズ対応により，自然な写像

$$\mathbf{Irr}\bigl(\mathrm{GL}_n(E)\bigr) \longrightarrow \mathbf{Irr}\bigl(\mathrm{GL}_{nd}(F)\bigr)$$

が存在することになる．これを**保型誘導**と呼び，$\mathrm{AI}_{E/F}$ と書く．

底変換のときと同様，E/F が巡回拡大のときには，保型誘導を指標関係式で特徴付け，跡公式によって構成することができる (Henniart-Herb [HH95])．ここでは，記号の煩雑さを避けるため，Kazhdan によって考察された $n=1$ の場合を紹介する．この場合は $E^\times$ の指標から $\mathrm{GL}_d(F)$ の既約スムーズ表現を構成することになるが，記号をこれまでの話と合わせるため，d のことを n と書く．$\tau \in \mathrm{Gal}(E/F)$ を 3.3.1 節と同様の記号とし，$\varepsilon\colon F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\mathrm{Ker}\,\varepsilon = N_{E/F}(E^\times)$ を満たす指標とする（これは局所類体論により $\mathrm{Gal}(E/F)$ の指標と対応する）．

定義 3.43

$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現 (π, V) が $\pi \cong \pi \otimes (\varepsilon \circ \det)$ を満たすとし，$A_\pi\colon V \xrightarrow{\cong} V$ をこれらの間の同型写像とする（すなわち，A_π は $g \in \mathrm{GL}_n(F)$ に対して $A_\pi \circ \pi(g) = \varepsilon(\det g)\pi(g) \circ A_\pi$ を満たす $\mathbb{C}$ 同型写像である）．Schur の補題より，このような A_π は定数倍を除いて唯一存在する．

$f \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し，$f \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F), K)$ かつ $K \subset \mathrm{Ker}(\varepsilon \circ \det)$ を満たす $\mathrm{GL}_n(F)$ のコンパクト開部分群 K をとると，$\pi(f) \circ A_\pi$ は V^K を V^K にうつす．$\mathrm{Tr}_\pi^\varepsilon(f) = \mathrm{Tr}(\pi(f) \circ A_\pi; V^K)$ とおく．これは K のとり方によらない．

定理 1.10 や定理 3.29 と同様に，$\mathrm{GL}_n(F)^{\mathrm{rs}}$ 上の局所定数関数 θ_π^ε で $\mathrm{GL}_n(F)$ 上局所 L^1 であるものが存在し，任意の $f \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し

$$\mathrm{Tr}_\pi^\varepsilon(f) = \int_{\mathrm{GL}_n(F)^{\mathrm{rs}}} f(g)\theta_\pi^\varepsilon(g)dg$$

となる（A_π の選び方に定数倍の任意性があるので，θ_π^ε も定数倍を除いて決まることに注意）．

例 3.44

$G = \mathrm{GL}_n(F)$, $G_\varepsilon = \mathrm{Ker}(\varepsilon \circ \det)$ とおく．ρ を G_ε の既約スムーズ表現とし，$\pi = \mathrm{Ind}_{G_\varepsilon}^{G} \rho$ も既約であると仮定する．このとき，$\pi \cong \pi \otimes (\varepsilon \circ \det)$ であり，A_π として次をとることができる：

$$A_\pi(f)(g) = \varepsilon(\det g)^{-1} f(g) \quad (f \in \mathrm{Ind}_{G_\varepsilon}^{G} \rho, g \in G).$$

ρ の指標を θ_ρ と書くと，θ_π^ε は以下の式で与えられる：$g \in \mathrm{GL}_n(F)^{\mathrm{rs}}$ に対し，

$$\theta_\pi^\varepsilon(g) = \begin{cases} \sum_{t \in G/G_\varepsilon} \varepsilon(\det t)\theta_\rho(t^{-1}gt) & (g \in G_\varepsilon), \\ 0 & (g \notin G_\varepsilon). \end{cases}$$

定義 3.45

$a_0 \in E^\times$ を $\tau(a_0) = (-1)^{n-1}a_0$ を満たすように一つ固定する．$a \in E^\times$ が正則である，すなわち $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Gal}(E/F)}(a) = \{1\}$ を満たすとき，

$$\widetilde{\Delta}(a) = \prod_{1 \le i < j \le n} \bigl(\tau^i(a) - \tau^j(a)\bigr), \quad \Delta(a) = |N_{E/F}(a)|^{-\frac{n-1}{2}} |\widetilde{\Delta}(a)a_0| \, \varepsilon\bigl(\widetilde{\Delta}(a)a_0\bigr)$$

とおく（$\tau(\widetilde{\Delta}(a)) = (-1)^{n-1}\widetilde{\Delta}(a)$ より $\widetilde{\Delta}(a)a_0 \in F^\times$ であることに注意）．$\Delta(a)$ は a_0 のとり方を変えると定数倍だけ変わるので，Δ は定数倍を除いて well-defined である．

θ を $E^\times$ の指標とし，π を $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現で $\pi \cong \pi \otimes (\varepsilon \circ \det)$ を満たすものとする．π が θ の**保型誘導**であるとは，ある定数 $c \in \mathbb{C}^\times$ に対して次が成り立つことをいう：

> $g \in \mathrm{GL}_n(F)$ を正則半単純元とし，g と共役な $E^\times$ の元 a_g が存在すると仮定する（すなわち，a_g は F 上の最小多項式が g の固有多項式と一致するような $E^\times$ の元である）．このとき以下の指標関係式が成立する：
>
> $$\theta_\pi^\varepsilon(g) = c\Delta\bigl(a_g\bigr)^{-1} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)} \theta\bigl(\sigma(a_g)\bigr).$$

注意 3.46

i) ここでの指標関係式は，[HH95] に合わせて修正したものであり，[Kaz84] のものとは少し異なる．

ii) θ_π^ε と Δ の定義には定数倍の不定性があったが，指標関係式にも定数 c が含まれるので，π が θ の保型誘導になっているかどうかは well-defined である．

iii) 正則半単純元 $g \in \mathrm{GL}_n(F)$ が $E^\times$ の元と共役でないときには，$\theta_\pi^\varepsilon(g) = 0$ となることが知られている ([Kaz84, §1, Lemma 1])．したがって，π が θ の保型

誘導であるときには，上の定義の指標関係式によって θ_π^ε が定数倍を除き完全に指定されることになる．

iv) π が θ の保型誘導であるとき，π の中心指標 ω_π は $\varepsilon^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\theta|_{F^\times}$ で与えられる．実際，$\theta_\pi^\varepsilon(g)\neq 0$ となる正則半単純元 $g\in\mathrm{GL}_n(F)$ および $z\in F^\times$ に対し，$\theta_\pi^\varepsilon(zg)=\varepsilon(z)^{\frac{n(n-1)}{2}}\theta(z)\theta_\pi^\varepsilon(g)$ となることが定義より確かめられる（$\varepsilon^{\frac{n(n-1)}{2}}$ が位数 1 または 2 であることに注意）．

定理 3.47（Kazhdan [Kaz84, Theorem A]）

i) $E^\times$ の指標 θ に対し，θ の保型誘導 $\mathrm{AI}_{E/F}(\theta)$ が一意的に存在する．$\mathrm{AI}_{E/F}(\theta)$ は ε,τ のとり方によらない．

ii) $\theta\mapsto\mathrm{AI}_{E/F}(\theta)$ は，以下の 2 つの間の一対一対応を与える：
- $E^\times$ の指標の $\mathrm{Gal}(E/F)$ 軌道．
- $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現で $\pi\cong\pi\otimes(\varepsilon\circ\det)$ を満たすものの同型類．

iii) $\mathrm{AI}_{E/F}(\theta)$ が超尖点表現になるためには，θ が正則な指標であること，すなわち $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Gal}(E/F)}(\theta)=\{1\}$ となることが必要十分である．

例 3.48

E/F が n 次不分岐拡大であり，$\theta\colon E^\times\longrightarrow\mathbb{C}^\times$ も不分岐指標である場合を考える．θ の佐武パラメータ（すなわち，E の素元 ϖ_E における値 $\theta(\varpi_E)$）を z_θ とすると，$\mathrm{AI}_{E/F}(\theta)$ は $\mathrm{GL}_n(F)$ の不分岐表現であり，その佐武パラメータは $\{e^{\frac{2\pi ik}{n}}z_\theta^{1/n}\mid 0\leq k\leq n-1\}$ である（[HH95, Corollary 5 of Theorem 5.6] 参照）．

さらに，保型誘導は以下の意味で大域的なものと整合的である．

定理 3.49（Kazhdan [Kaz84, Theorem B]）

L を代数体とし，L' をその n 次巡回拡大とする．

Θ を $\mathbb{A}_{L'}^\times/L'^\times$ の指標とする．L の各素点 v に対し，v の上にある L' の素点を $w_1,\ldots,w_k$ とし，$\Pi_v=\mathrm{AI}_{L'_{w_1}/L_v}(\Theta_{w_1})\boxplus\cdots\boxplus\mathrm{AI}_{L'_{w_k}/L_v}(\Theta_{w_k})$ とおく．この定義は v が有限素点の場合にしか意味を持たないが，v が無限素点の場合には局所ラングランズ対応（定理 3.23，定理 3.26）を用いて定義することができる．$\mathrm{AI}_{L'/L}(\Theta)=\bigotimes_v\Pi_v$ とおく．このとき $\mathrm{AI}_{L'/L}(\Theta)$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の保型表現であり，指標 $\varepsilon\colon\mathbb{A}_L^\times/L^\times N_{L'/L}(\mathbb{A}_{L'}^\times)\longrightarrow\mathbb{C}^\times$ に対し $\mathrm{AI}_{L'/L}(\Theta)\cong\mathrm{AI}_{L'/L}(\Theta)\otimes(\varepsilon\circ\det)$ が成り立つ．

期待される通り，局所ラングランズ対応によって保型誘導は誘導表現に対応する．

定理 3.50
θ を $\mathrm{GL}_1(E)=E^\times$ のスムーズ指標とするとき，次が成り立つ：

$$\mathrm{rec}_F\bigl(\mathrm{AI}_{E/F}(\theta)\bigr)=\mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}\mathrm{rec}_E(\theta).$$

注意 3.51
3.3.1 節で紹介した底変換の理論を用いて保型誘導を構成することも可能である．E/F を素数次巡回拡大とし，$d=[E:F]$ とおく．$\mathrm{Gal}(E/F)$ の生成元 τ を固定する．$\mathrm{GL}_n(E)$ の既約超尖点表現 π に対し，$\mathrm{GL}_{nd}(F)$ の既約スムーズ表現 $\mathrm{AI}_{E/F}(\pi)$ を以下のように定める．π が τ 安定である場合には，命題 3.38 iv) より $\mathrm{BC}_{E/F}(\rho)=\pi$ となる $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約超尖点表現 ρ が存在する．$F^\times/N_{E/F}(E^\times)$ の非自明指標 χ を固定すると，集合 $\{\rho\otimes(\chi^i\circ\det)\mid 0\le i\le d-1\}$ は ρ のとり方に依存しないので，

$$\mathrm{AI}_{E/F}(\pi)=\rho\boxplus\bigl(\rho\otimes(\chi\circ\det)\bigr)\boxplus\cdots\boxplus\bigl(\rho\otimes(\chi^{d-1}\circ\det)\bigr)$$

とする．一方，π が τ 安定でない場合には，命題 3.38 iii) より $\mathrm{BC}_{E/F}(\rho')=\pi\boxplus\pi^\tau\boxplus\cdots\boxplus\pi^{\tau^{d-1}}$ となる $\mathrm{GL}_{nd}(F)$ の既約超尖点表現 ρ' が一意的に存在するので，$\mathrm{AI}_{E/F}(\pi)=\rho'$ とする．この構成は，

$$\mathrm{AI}_{E/F}\bigl(\mathrm{St}_m(\pi)\bigr)=\begin{cases}\mathrm{St}_m(\rho)\boxplus\mathrm{St}_m(\rho)^\tau\boxplus\cdots\boxplus\mathrm{St}_m(\rho)^{\tau^{d-1}} & (\pi\cong\pi^\tau)\\ \mathrm{St}_m(\rho') & (\pi\not\cong\pi^\tau)\end{cases}$$

とすることで既約離散系列表現へと拡張でき，さらにラングランズ和と両立するようにして一般の既約スムーズ表現へと拡張できる．局所ラングランズ対応（特に性質 3.4）および定理 3.42 のもとで $\mathrm{rec}_F(\mathrm{AI}_{E/F}(\pi))=\mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}\mathrm{rec}_E(\pi)$ となることが容易に示せるので，ここで構成した $\mathrm{AI}_{E/F}(-)$ が $n=1$ のときに定理 3.47 のものと一致することも分かる．しかし，定義 3.45 の指標関係式を直接確認するのは易しくない（[HH95, p. 133] 参照）．
同様に，定理 3.40 を用いて等圧的保型表現の保型誘導を構成することもできる．

3.4 局所ラングランズ対応の具体的な記述

ここでは, 局所ラングランズ対応の具体的な記述について考えてみる．性質 3.4 iii), iv) より，任意の既約超尖点表現 π に対して $\mathrm{rec}_F(\pi)$ が記述できればよい．$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約超尖点表現は Bushnell-Kutzko [BK93] によって完全に分類されているので，その分類のパラメータを用いて対応する W_F の表現を書くことができるか，ということが問題になる．この方向の研究は主に Bushnell, Henniart によって行われている（[BH05a], [BH05b], [BH10], [BH14] 等を参照）が，現在でも完全には解決されていない．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)$ の場合でさえ，できていない部分があるようである．

本小節では，具体的な記述がうまくいく場合として，以下のようなケースを考える．E を F の n 次不分岐拡大 $(n \geq 2)$ とし，$\theta\colon E^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を正則な馴分岐指標とする．すなわち，以下の 2 つを仮定する：

- $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Gal}(E/F)}(\theta) = \{1\}$.
- $\theta|_{1+\varpi\mathcal{O}_E^\times} = \mathbf{1}$.

このとき，誘導表現 $\mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}\theta$ は W_F の n 次元既約スムーズ表現である．局所ラングランズ対応と性質 3.4 i) より，$\mathrm{rec}_F(\pi) = \mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}\theta$ となる $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約超尖点表現 π が存在する．この π が θ からどのように構成されるかを紹介しよう．定理 3.50 より $\pi = \mathrm{AI}_{E/F}(\theta)$ であるから，この問題は $\mathrm{AI}_{E/F}(\theta)$ を具体的に記述する問題と言ってもよい．

ここでは, F の剰余体 κ を $\mathbb{F}_q$ と書く．E の剰余体は $\mathbb{F}_{q^n}$ である．$E^\times = \langle\varpi^{\mathbb{Z}}\rangle \times \mathcal{O}_E^\times$ であるから，θ は $\theta(\varpi)$ と $\theta|_{\mathcal{O}_E^\times}$ から決まる．仮定より，$\theta|_{\mathcal{O}_E^\times}$ は $\mathbb{F}_{q^n}^\times = \mathcal{O}_E^\times/1+\varpi\mathcal{O}_E^\times$ 上の指標 $\overline{\theta}\colon \mathbb{F}_{q^n}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を経由する．θ は正則であったから，$\overline{\theta}$ も正則となる（$\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)$ に対し $\theta^\sigma(\varpi) = \theta(\varpi)$ であることに注意）．

$\mathbb{F}_{q^n}^\times$ の正則指標に対し，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の既約表現を自然に定めることができる（**MacDonald 対応**）．この対応の構成にはいくつか方法があるが，ここでは代数多様体の ℓ 進コホモロジーを用いる Deligne-Lusztig 理論を簡単に紹介する．この方法の長所は，一般の連結簡約代数群に対して適用可能であるというところである．より詳しい解説は，原論文 [DL76] の他，[庄司] などを参照されたい．

定義 3.52

方程式

$$\left(\det(X_i^{q^{j-1}})_{1\leq i,j\leq n}\right)^{q-1} = (-1)^{n-1}$$

で定まる $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上のアフィン代数多様体を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の **Deligne-Lusztig 多様体**と呼び，DL_n と表す．

左辺が $\prod_{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{F}_q^n\setminus\{(0,\dots,0)\}}(a_1X_1+\cdots+a_nX_n)$ の定数倍に一致することに注意すると，DL_n には座標変換によって $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ が右から作用することが分かる．また，座標のスカラー倍によって $\mathbb{F}_{q^n}^\times$ が（右から）作用する．

注意 3.53

一般に，Deligne-Lusztig 多様体は $\mathbb{F}_q$ 上の連結簡約代数群 G とその Weyl 群 [注 12] の元 $w \in W$ から定まる．上記の DL_n は，$G = \mathrm{GL}_n$ および Coxeter 元 $w = (1\ 2\ \cdots\ n) \in W = \mathfrak{S}_n$ に対応する Deligne-Lusztig 多様体である（[DL76, 2.2] 参照）．

注 12 ここでの Weyl 群は，各極大トーラス T に対する絶対 Weyl 群 W_T の射影極限 $\varprojlim_T W_T$ として定義されるものであり，G のみから内在的に決まる抽象群である．[DL76, 1.1] 参照．

ℓ 進エタールコホモロジー $H^i_c(\mathrm{DL}_n, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) \times \mathbb{F}^\times_{q^n}$ の有限次元表現である．これを用いて，$\mathbb{F}^\times_{q^n}$ の正則指標に $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の表現を対応させることができる．

定理 3.54

i) χ を $\mathbb{F}^\times_{q^n}$ の正則指標とすると，$i \neq n-1$ のとき $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}^\times_{q^n}}(\chi, H^i_c(\mathrm{DL}_n, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) = 0$ である．また，$\mathrm{DL}(\chi) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}^\times_{q^n}}(\chi, H^{n-1}_c(\mathrm{DL}_n, \overline{\mathbb{Q}}_\ell))$ とおくと，$\mathrm{DL}(\chi)$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の既約尖点的表現である．ここで，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の既約表現 π が尖点的であるとは，任意の放物型部分群 $P \subsetneq \mathrm{GL}_n$ に対し $\pi^{N_P(\mathbb{F}_q)} = 0$ となることとする．これは π が小さい Levi 部分群からの放物型誘導に現れないことと同値である．

ii) $\mathbb{F}^\times_{q^n}$ の正則指標 χ, χ' に対して $\mathrm{DL}(\chi) \cong \mathrm{DL}(\chi')$ となることは，χ と χ' が同じ $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)$ 軌道に属することと同値である．

iii) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の任意の既約尖点的表現 π に対し，ある $\mathbb{F}^\times_{q^n}$ の正則指標 χ が存在して $\pi \cong \mathrm{DL}(\chi)$ となる．

略証　$\mathbb{F}_q$ ベクトル空間の同型 $\mathbb{F}_{q^n} \cong \mathbb{F}_q^n$ を固定し，$\mathbb{F}^\times_{q^n}$ を $\mathrm{GL}_{n,\mathbb{F}_q}$ の非等方的極大トーラス T の $\mathbb{F}_q$ 値点とみなす．$\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)$ の $\mathbb{F}^\times_{q^n}$ への作用は $W_T^{\Gamma_{\mathbb{F}_q}}$（$W_T$ は T の絶対 Weyl 群）の $T(\mathbb{F}_q)$ への作用と同一視できるので，χ が正則であることは $T(\mathbb{F}_q)$ の指標として [DL76, Definition 5.19] の意味で一般的な位置にあること (in general position) と同値である．[DL76, Proposition 5.16] より，これは χ が非特異 (non-singular) であること（[DL76, Definition 5.19] 参照）とも同値である．

i) を示す．[DL76, Corollary 9.9] より $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}^\times_{q^n}}(\chi, H^i_c(\mathrm{DL}_n, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) = 0$ $(i \neq n-1)$ である．特に $\mathrm{DL}(\chi) = (-1)^{n-1} R^\chi_T$ なので，[DL76, Proposition 7.4, Theorem 8.3] から $\mathrm{DL}(\chi)$ が既約尖点的表現であることが従う．

ii) は Deligne-Lusztig の直交関係 [DL76, Theorem 6.8] の帰結である．

iii) について考える．まず [DL76, Corollary 7.7] より，$\mathrm{GL}_{n,\mathbb{F}_q}$ の極大トーラス T' および $T'(\mathbb{F}_q)$ の指標 χ が存在して，π は $R^\chi_{T'}$ に現れることが分かる．もし T' が非等方的でないなら，放物型部分群 $P \subsetneq \mathrm{GL}_{n,\mathbb{F}_q}$ で T' を含むものが存在する．このとき，$T' \subset L_P = P/N_P$ に対する $R^\chi_{T'}$ を $P(\mathbb{F}_q)$ の表現と見たものを $R^\chi_{T',P}$ と書くと，[DL76, Proposition 8.2] より $R^\chi_{T'} = \mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)}_{P(\mathbb{F}_q)}(R^\chi_{T',P})$ であるから，π が尖点的であることに矛盾する．このことから T' は非等方的な極大トーラスである．$\mathrm{GL}_{n,\mathbb{F}_q}$ の非等方的な極大トーラスは全て共役であるから（$\mathbb{F}_q$ の n 次拡大体は全て同型であることによる），$T' = T$ としてよい．

あとは χ が $T(\mathbb{F}_q) = \mathbb{F}^\times_{q^n}$ の正則指標であることを示せばよいが，さらに細かい議論が必要になるので，ここでは説明できない．本質的には，$R^{\mathbf{1}}_T$ に既約尖点的表現が現れないこと（冪単尖点的表現の非存在）を証明することになる．これは GL_n

に特有の現象であり，例えば Sp_4 の場合には θ_{10} と呼ばれる有名な冪単尖点的表現がある． ∎

注意 3.55

χ を $\mathbb{F}_{q^n}^\times$ の正則指標とするとき，$\mathrm{DL}(\chi)$ の中心指標は $\chi|_{\mathbb{F}_q^\times}$ である．これは $\mathbb{F}_q^\times \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ と $\mathbb{F}_q^\times \subset \mathbb{F}_{q^n}^\times$ の DL_n への作用が一致することの帰結である．

定理 3.56

正則半単純元 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ が $\mathbb{F}_{q^n}^\times$ の元 a_g と共役であるとき，次が成り立つ：

$$\mathrm{Tr}\bigl(g; \mathrm{DL}(\chi)\bigr) = (-1)^{n-1} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)} \chi\bigl(\sigma(a_g)\bigr).$$

証明　定理 3.54 の略証と同様，$\mathbb{F}_{q^n}^\times = T(\mathbb{F}_q)$ とみなす．$g = a_g \in T(\mathbb{F}_q)$ としてよい．g は正則半単純なので，g の中心化群は T に一致する．したがって [DL76, Corollary 7.2] と $\mathrm{DL}(\chi) = (-1)^{n-1} R_T^\chi$ より，

$$(-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}\bigl(g, \mathrm{DL}(\chi)\bigr) = \frac{1}{\#T(\mathbb{F}_q)} \sum_{\substack{h \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) \\ h^{-1}gh \in T(\mathbb{F}_q)}} \chi(h^{-1}gh)$$

である．右辺が $\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)} \chi(\sigma(a_g))$ に一致することは容易に分かる． ∎

注意 3.57

$\mathrm{DL}(\chi)$ のより初等的な構成については，[Gre55] を参照．特に $n = 2$ の場合には，[原下, §3.3] の構成と一致する．

この $\mathrm{DL}(-)$ を用いて，正則馴分岐指標 $\theta\colon E^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ に対応する $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約超尖点表現を構成しよう．以下では，$\mathcal{O}_F$ 加群の同型 $\mathcal{O}_E \cong \mathcal{O}_F^n$ を固定し，$\mathcal{O}_E^\times \subset \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$, $E^\times \subset \mathrm{GL}_n(F)$, $\mathbb{F}_{q^n}^\times \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ とみなす．

定義 3.58

$H = E^\times \cdot \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) = F^\times \cdot \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ とおく（二つ目の等号は E が F の不分岐拡大であることから従う）．正則馴分岐指標 $\theta\colon E^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ に対し，$\overline{\theta}\colon \mathbb{F}_{q^n}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ に対応する $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の既約尖点的表現 $\mathrm{DL}(\overline{\theta})$ を $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ に持ち上げたものを $\rho(\overline{\theta})$ と書くことにする．注意 3.55 より $\rho(\overline{\theta})|_{\mathcal{O}_F^\times} = \theta|_{\mathcal{O}_F^\times}$ であるから，H 上の有限次元既約表現 $\rho(\theta)$ を，$\rho(\theta)|_{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)} = \rho(\overline{\theta})$, $\rho(\theta)|_{F^\times} = \theta|_{F^\times}$ となるように一意的に定めることができる．$\pi(\theta) = \text{c-Ind}_H^{\mathrm{GL}_n(F)} \rho(\theta)$ とおく．

命題 3.59
$\pi(\theta)$ は $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約超尖点表現である．

この命題の証明には次の補題を用いる：

補題 3.60
$G = \mathrm{GL}_n(F)$ とし，H を G の中心を法としてコンパクトな開部分群とする．すなわち，H は G の中心 $Z = F^\times$ を含み，H/Z はコンパクトであると仮定する．ρ を H の既約スムーズ表現とする．

$g \in G$ に対し，$g^{-1}Hg$ の表現 ρ^g を $\rho^g(g^{-1}hg) = \rho(h)$ $(h \in H)$ で定める．任意の $g \in G \setminus H$ に対し $\mathrm{Hom}_{H\cap g^{-1}Hg}(\rho, \rho^g) = 0$ ならば，$\operatorname{c-Ind}_H^G \rho$ は G の既約超尖点表現である．

証明　まず $\operatorname{c-Ind}_H^G \rho$ の既約性を示す．$g \in G$ に対し $V_g = \{f \in \operatorname{c-Ind}_H^G \rho \mid \operatorname{supp} f \subset HgH\}$ とおくと，V_g は $\operatorname{c-Ind}_H^G \rho$ の H 部分空間であり，$(\operatorname{c-Ind}_H^G \rho)|_H = \bigoplus_{g\in H\backslash G/H} V_g$ となる．さらに，H の表現として $V_g \cong \operatorname{c-Ind}_{H\cap g^{-1}Hg}^H \rho^g$ であることが容易に確かめられる．よって $(\operatorname{c-Ind}_H^G \rho)|_H \cong \bigoplus_{g\in H\backslash G/H} \operatorname{c-Ind}_{H\cap g^{-1}Hg}^H \rho^g$ となる．$H \cap g^{-1}Hg$ は H の指数有限開部分群であるから，Frobenius 相互律より

$$\mathrm{Hom}_H(\rho, \operatorname{c-Ind}_{H\cap g^{-1}Hg}^H \rho^g) = \mathrm{Hom}_H(\rho, \mathrm{Ind}_{H\cap g^{-1}Hg}^H \rho^g) = \mathrm{Hom}_{H\cap g^{-1}Hg}(\rho, \rho^g)$$

である．$g \in G \setminus H$ ならば仮定よりこれは 0 であるから，ρ から $\operatorname{c-Ind}_H^G \rho$ への H 準同型は V_1 を経由することが分かり，$\mathrm{Hom}_H(\rho, (\operatorname{c-Ind}_H^G \rho)|_H) = \mathrm{Hom}_H(\rho, V_1) \cong \mathrm{Hom}_H(\rho, \rho)$ が従う．特に，ρ から $\operatorname{c-Ind}_H^G \rho$ への 0 でない H 準同型の像は V_1 に一致する．

$U \neq 0$ を $\operatorname{c-Ind}_H^G \rho$ の G 部分空間とすると，

$$0 \neq \mathrm{Hom}_G(U, \operatorname{c-Ind}_H^G \rho) \subset \mathrm{Hom}_G(U, \mathrm{Ind}_H^G \rho) = \mathrm{Hom}_H(U|_H, \rho)$$

である．ρ の中心指標を ω とすると，$\operatorname{c-Ind}_H^G \rho$, U も中心指標 ω を持つ．中心指標が ω であるような H のスムーズ表現は完全可約であるから，$\mathrm{Hom}_H(\rho, U|_H) \neq 0$ であることが従う．$\mathrm{Hom}_H(\rho, U|_H) \subset \mathrm{Hom}_H(\rho, (\operatorname{c-Ind}_H^G \rho)|_H) = \mathrm{Hom}_H(\rho, \rho)$ であり，$\mathrm{Hom}_H(\rho, \rho)$ は 1 次元であるから，$\mathrm{Hom}_H(\rho, U|_H) = \mathrm{Hom}_H(\rho, (\operatorname{c-Ind}_H^G \rho)|_H)$ である．すなわち，ρ から $\operatorname{c-Ind}_H^G \rho$ への 0 でない H 準同型の像 V_1 は U に含まれる．$\operatorname{c-Ind}_H^G \rho$ は G の表現として V_1 で生成されることが容易に分かるので，U も $\operatorname{c-Ind}_H^G \rho$ を生成する．U は G 不変な部分空間であったから，$U = \operatorname{c-Ind}_H^G \rho$ が従う．

次に $\operatorname{c-Ind}_H^G \rho$ が超尖点表現であることを示す．ρ の表現空間を W とし，$w \in W$, $w^\vee \in W^\vee$ を $\langle w, w^\vee \rangle = 1$ となるようにとる．$\phi_w \in \operatorname{c-Ind}_H^G W$, $\phi_{w^\vee} \in \operatorname{c-Ind}_H^G W^\vee \subset$

$\mathrm{Ind}_H^G W^\vee = (\text{c-}\mathrm{Ind}_H^G W)^\vee$ を

$$\phi_w(g) = \begin{cases} \rho(g)w & (g \in H), \\ 0 & (g \notin H), \end{cases} \qquad \phi_{w^\vee}(g) = \begin{cases} \rho^\vee(g)w^\vee & (g \in H), \\ 0 & (g \notin H), \end{cases}$$

で定めることができる．ϕ_w と $\phi_{w^\vee}$ から決まる $\text{c-}\mathrm{Ind}_H^G \rho$ の行列係数 $f_{\phi_w,\phi_{w^\vee}}$（定義 1.14 参照）は $f_{\phi_w,\phi_{w^\vee}}(1) = 1$ および $\operatorname{supp} f_{\phi_w,\phi_{w^\vee}} \subset H$ を満たすので，$\text{c-}\mathrm{Ind}_H^G \rho$ が超尖点表現であることが従う（注意 1.16 i) も参照のこと）． ∎

注意 3.61

証明の後半部に出てきた $\text{c-}\mathrm{Ind}_H^G \rho^\vee \subset \mathrm{Ind}_H^G \rho^\vee = (\text{c-}\mathrm{Ind}_H^G \rho)^\vee$ は実際には等式 $\text{c-}\mathrm{Ind}_H^G \rho^\vee = (\text{c-}\mathrm{Ind}_H^G \rho)^\vee$ となる．これは $\mathrm{Ind}_H^G \rho^\vee = (\text{c-}\mathrm{Ind}_H^G \rho)^\vee$ が既約であることから従う．

命題 3.59 の証明　$H = F^\times \cdot \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ に上の補題を適用する．$K_0 = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$, $K_1 = \mathrm{Ker}(\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q))$ とおく．$g \in G \setminus H$ とすると，$g^{-1}K_0 g \neq K_0$ である．このとき，ある放物型部分群 $P \subsetneq \mathrm{GL}_{n,\mathbb{F}_q}$ が存在して次を満たす：

- $K_0 \cap g^{-1}K_0 g$ の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ における像は $P(\mathbb{F}_q)$.
- $K_0 \cap g^{-1}K_1 g$ の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ における像は $N_P(\mathbb{F}_q)$.

これは Cartan 分解 $\mathrm{GL}_n(F) = \coprod_{\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n} K_0 \mathrm{diag}(\varpi^{\lambda_1}, \ldots, \varpi^{\lambda_n}) K_0$ を使うと容易に証明できる．

$\mathrm{Hom}_{H \cap g^{-1}Hg}(\rho(\theta), \rho(\theta)^g) = 0$ を示すためには，$\mathrm{Hom}_{K_0 \cap g^{-1}K_1 g}(\rho(\theta), \rho(\theta)^g) = 0$ を示せば十分である．$\rho(\theta)|_{K_0 \cap g^{-1}K_1 g}$ は $\mathrm{DL}(\overline{\theta})|_{N_P(\mathbb{F}_q)}$ を $K_0 \cap g^{-1}K_1 g$ に持ち上げたものである．一方，$\rho(\theta)^g|_{g^{-1}K_1 g} = (\rho(\theta)|_{K_1})^g$ は自明表現の直和である．したがって，

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{K_0 \cap g^{-1}K_1 g}\bigl(\rho(\theta), \rho(\theta)^g\bigr) &= \mathrm{Hom}_{N_P(\mathbb{F}_q)}\bigl(\mathrm{DL}(\overline{\theta}), \mathbf{1}^{\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{DL}(\overline{\theta})}\bigr) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\bigl(\mathrm{DL}(\overline{\theta})_{N_P(\mathbb{F}_q)}, \mathbf{1}^{\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{DL}(\overline{\theta})}\bigr) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\bigl(\mathrm{DL}(\overline{\theta})^{N_P(\mathbb{F}_q)}, \mathbf{1}^{\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{DL}(\overline{\theta})}\bigr) \end{aligned}$$

を得る．定理 3.54 i) より $\mathrm{DL}(\overline{\theta})$ は尖点的であるから，これは 0 である． ∎

命題 3.62

θ を定義 3.58 の通りとする．3.3.2 節と同様，指標 $\varepsilon\colon F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\mathrm{Ker}\,\varepsilon = N_{E/F}(E^\times)$ を満たすように固定する．

i) $\pi(\theta) \cong \pi(\theta) \otimes (\varepsilon \circ \det)$ が成り立つ．

ii) $\lambda \in \mathbb{F}_{q^n}^\times$ が正則であるとは，$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)}(\lambda) = \{1\}$ を満たすこととする

(これは $\mathbb{F}_{q^n} = \mathbb{F}_q(\lambda)$ と同値である). $a \in \mathcal{O}_E^\times$ とし, その $\mathbb{F}_{q^n}^\times$ における像 $\overline{a}$ が正則であると仮定する. このとき, 次が成り立つ：

$$\theta^{\varepsilon}_{\pi(\theta)}(a) = c \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)} \theta\bigl(\sigma(a)\bigr) \quad (c \in \mathbb{C}^\times \text{ は } a \text{ によらない定数}).$$

証明　例 3.44 と同様, $G_\varepsilon = \mathrm{Ker}(\varepsilon \circ \det)$ とおく. $H = F^\times \cdot \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \subset G_\varepsilon$ であるから, $\pi(\theta) = \mathrm{Ind}_{G_\varepsilon}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\text{c-Ind}_H^{G_\varepsilon} \rho(\theta))$ である. これより特に $\pi(\theta) \cong \pi(\theta) \otimes (\varepsilon \circ \det)$ となるので, i) が従う.

ii) を示す. 例 3.44 のように $A_{\pi(\theta)}$ をとって $\theta^{\varepsilon}_{\pi(\theta)}$ を計算する. $\pi'(\theta) = \text{c-Ind}_H^{G_\varepsilon} \rho(\theta)$ とおくと, 例 3.44 と $a \in E^\times \subset G_\varepsilon$ より,

$$\theta^{\varepsilon}_{\pi(\theta)}(a) = \sum_{t \in G/G_\varepsilon} \varepsilon(\det t) \theta_{\pi'(\theta)}(t^{-1}at)$$

が成り立つ. 一方, a は $\mathrm{GL}_n(F)$ の元として楕円正則半単純[注 13] であるから, $\pi'(\theta) = \text{c-Ind}_H^{G_\varepsilon} \rho(\theta)$ の指標の a での値は次のように計算できる：

$$\theta_{\pi'(\theta)}(a) = \sum_{\substack{z \in G_\varepsilon/H \\ z^{-1}az \in H}} \mathrm{Tr}\bigl(z^{-1}az; \rho(\theta)\bigr).$$

(これの証明は難しくない. [Hen92, Appendice, Théorème A2] 参照.)

さらに計算を進めるために, $g \in \mathrm{GL}_n(F)$ に対し, $g^{-1}ag \in H$ ならば $g \in H$ であることを証明しておこう. $g \notin H$ であると仮定する. 命題 3.59 の証明中にあるように, 放物型部分群 $P \subsetneq \mathrm{GL}_n$ が存在して, $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \cap g\,\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)g^{-1}$ の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ における像は $P(\mathbb{F}_q)$ となる. $a \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \cap gHg^{-1} = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \cap g\,\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)g^{-1}$ より[注 14], $\overline{a} \in P(\mathbb{F}_q)$ である. $\overline{a} \in \mathbb{F}_{q^n}^\times$ の正則性の仮定より, $\overline{a}$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の元として楕円正則半単純であるから, これは矛盾である.

このことから直ちに

$$\begin{aligned}\theta_{\pi'(\theta)}(a) = \mathrm{Tr}\bigl(a; \rho(\theta)\bigr) = \mathrm{Tr}\bigl(\overline{a}; \mathrm{DL}(\overline{\theta})\bigr) &\overset{(*)}{=} (-1)^{n-1} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q)} \overline{\theta}\bigl(\sigma(\overline{a})\bigr) \\ &= (-1)^{n-1} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)} \theta\bigl(\sigma(a)\bigr)\end{aligned}$$

を得る ($(*)$ の等号において定理 3.56 を用いた). 一方, $t \in G \setminus G_\varepsilon$ のとき, 任意の $z \in G_\varepsilon$ に対し $z^{-1}(t^{-1}at)z \notin H$ である (そうでなければ $tz \in H \subset G_\varepsilon$ となって

[注 13] 中心化群の連結成分が中心を法として非等方的な極大トーラスになるということ. $\mathrm{GL}_n(F)$ の場合は, 固有多項式が既約になることと同値.

[注 14] $h \in H = F^\times \cdot \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ が $\det h \in \mathcal{O}_F^\times$ を満たすなら $h \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ であることに注意.

矛盾する）から，$\theta_{\pi'(\theta)}(t^{-1}at)=0$ である．よって

$$\theta^{\varepsilon}_{\pi(\theta)}(a)=\theta_{\pi'(\theta)}(a)=(-1)^{n-1}\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)}\theta\bigl(\sigma(a)\bigr)$$

となり ii) が従う． ∎

次が目標の定理である：

定理 3.63（Henniart [Hen92]）
$\delta\colon E^{\times}\longrightarrow\mathbb{C}^{\times};\ \delta(a)=(-1)^{v_E(a)}$ を位数 2 の不分岐指標とするとき，次が成り立つ：

$$\mathrm{AI}_{E/F}(\theta)=\pi(\delta^{n-1}\theta),\quad \mathrm{rec}_F\bigl(\pi(\delta^{n-1}\theta)\bigr)=\mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F}\theta.$$

証明　命題 3.62 i) と定理 3.47 ii) より，$\pi(\delta^{n-1}\theta)=\mathrm{AI}_{E/F}(\varphi)$ となる正則指標 $\varphi\colon E^{\times}\longrightarrow\mathbb{C}^{\times}$ が存在する．θ と φ の $\mathrm{Gal}(E/F)$ 軌道が一致することを証明したい．注意 3.46 iv) より，$\mathrm{AI}_{E/F}(\varphi)$ の中心指標は $(\delta^{n-1}\varphi)|_{F^{\times}}$ である．$\pi(\delta^{n-1}\theta)$ の中心指標が $(\delta^{n-1}\theta)|_{F^{\times}}$ であることは容易に分かるので，$\theta|_{F^{\times}}=\varphi|_{F^{\times}}$ が従う．$E^{\times}=F^{\times}\cdot\mathcal{O}_E^{\times}$ なので，問題は $\theta|_{\mathcal{O}_E^{\times}}$ と $\varphi|_{\mathcal{O}_E^{\times}}$ の $\mathrm{Gal}(E/F)$ 軌道が一致することに帰着された．

$a\in\mathcal{O}_E^{\times}$ とし，$\overline{a}\in\mathbb{F}_{q^n}^{\times}$ が正則であると仮定する．このとき，命題 3.62 ii) より，次が成り立つ：

$$\theta^{\varepsilon}_{\pi(\delta^{n-1}\theta)}(a)=c\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)}\theta\bigl(\sigma(a)\bigr)\quad(c\in\mathbb{C}^{\times}\text{ は }a\text{ によらない定数}).$$

一方，保型誘導に対する指標関係式（定義 3.45）より，次が成り立つ：

$$\theta^{\varepsilon}_{\mathrm{AI}_{E/F}(\varphi)}(a)=c'\Delta(a)^{-1}\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)}\varphi\bigl(\sigma(a)\bigr)\quad(c'\in\mathbb{C}^{\times}\text{ は }a\text{ によらない定数}).$$

$\overline{a}\in\mathbb{F}_{q^n}^{\times}$ の正則性より $\widetilde{\Delta}(a)\in\mathcal{O}_E^{\times}$ であることに注意する．特に，定義 3.45 における a_0 は $\mathcal{O}_E^{\times}$ の元としてとることができる ($\mathbb{F}_{q^n}^{\times}$ における像が正則になるような $a_1\in\mathcal{O}_E^{\times}$ を一つ固定して $a_0=\widetilde{\Delta}(a_1)$ とすればよい)．このとき，定義より $\Delta(a)=1$ となるから，上の式の右辺は $c'\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)}\varphi(\sigma(a))$ となる．$\pi(\delta^{n-1}\theta)=\mathrm{AI}_{E/F}(\varphi)$ であったから，

$$c\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)}\theta\bigl(\sigma(a)\bigr)=c'\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(E/F)}\varphi\bigl(\sigma(a)\bigr)$$

が成り立つ（$c,c'\in\mathbb{C}^{\times}$ は a によらない定数）．

$m\geq 1$ を十分大きくとり，$\theta|_{1+\varpi^m\mathcal{O}_E}$, $\varphi|_{1+\varpi^m\mathcal{O}_E}$ が自明となるようにしておく．θ,φ を有限アーベル群 $V=\mathcal{O}_E^{\times}/1+\varpi^m\mathcal{O}_E$ 上の指標とみなす．V の元 a で $\overline{a}\in\mathbb{F}_{q^n}^{\times}$

が正則になるもの全体の集合を V^{reg} と書く．上で示したことから，$\lambda \in \mathbb{C}^\times$ が存在し，$a \in V^{\mathrm{reg}}$ に対し

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)} \theta^\sigma(a) = \lambda \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)} \varphi^\sigma(a) \tag{$*$}$$

が成り立つ（θ^σ は $\theta^\sigma(a) = \theta(\sigma(a))$ で定まる指標）．一方，θ, φ が正則指標であることから，指標の直交関係

$$\sum_{a \in V} \Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)} \theta^\sigma(a) \Big) \Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)} \overline{\theta^\sigma(a)} \Big) = n|V|,$$
$$\sum_{a \in V} \Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)} \varphi^\sigma(a) \Big) \Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)} \overline{\varphi^\sigma(a)} \Big) = n|V|$$

が成り立つ．もし $\theta|_{\mathcal{O}_E^\times}$ と $\varphi|_{\mathcal{O}_E^\times}$ の $\mathrm{Gal}(E/F)$ 軌道が一致しないとすると，さらに

$$\sum_{a \in V} \Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)} \theta^\sigma(a) \Big) \Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)} \overline{\varphi^\sigma(a)} \Big) = 0$$

も成り立つ．このとき，$(*)$ より

$$\sum_{a \in V \setminus V^{\mathrm{reg}}} \Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)} \theta^\sigma(a) \Big) \Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)} \big(\overline{\theta^\sigma(a) - \lambda\varphi^\sigma(a)}\big) \Big) = n|V|,$$
$$\sum_{a \in V \setminus V^{\mathrm{reg}}} \Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)} \big(\overline{-\lambda^{-1}\theta^\sigma(a) + \varphi^\sigma(a)}\big) \Big) \Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)} \varphi^\sigma(a) \Big) = n|V|$$

が成り立つ．$\alpha = \#V/\#(V \setminus V^{\mathrm{reg}}) = (q^n - 1)/$（$\mathbb{F}_{q^n}^\times$ の非正則元の個数）とおくと，$|\theta^\sigma(a)| = 1$, $|\theta^\sigma(a) - \lambda\varphi^\sigma(a)| \le 1 + |\lambda|$ より，一つ目の式から不等式評価 $n(1 + |\lambda|) \ge \alpha$ が得られる．同様に，二つ目の式からは $n(1 + |\lambda|^{-1}) \ge \alpha$ が得られる．$|\lambda|$ と $|\lambda|^{-1}$ のいずれかは 1 以上なので，$2n \ge \alpha$ とならなくてはならない．

実は，(n, q) が $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(4, 2)$, $(6, 2)$ の場合を除き，この不等式は成り立たない．例えば n が素数の場合，$\mathbb{F}_{q^n}^\times$ の非正則元は $\mathbb{F}_q^\times$ の元に他ならないので，$\alpha = (q^n - 1)/(q - 1) = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$ となる．$n \ge 3$ ならば $\alpha \ge 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} \ge 1 + 2 + 4(n - 2) > 2n$ となり $\alpha > 2n$ が得られる．$n = 2$ のときも，$q \ge 4$ ならば $\alpha = 1 + q > 4 = 2n$ となる．他の場合も（もう少し複雑だが）同様にできる（[Hen92, 2.7] 参照）．このことから，$(n, q) \neq (2, 2), (2, 3), (4, 2), (6, 2)$ ならば矛盾が生じ，$\theta|_{\mathcal{O}_E^\times}$ と $\varphi|_{\mathcal{O}_E^\times}$ の $\mathrm{Gal}(E/F)$ 軌道が一致することが分かる．

$(n, q) = (2, 2), (4, 2), (6, 2)$ の場合は，上記の直交関係式の使い方に工夫を加え，個別に細かい議論を行うことによって矛盾を導く．$(n, q) = (2, 3)$ の場合が最も面倒であり，命題 3.62 ii) を $\overline{a}$ が正則でない場合にも部分的に拡張する必要がある．[Hen92, 2.8–2.12] 参照．∎

注意 3.64

i) 不分岐指標 δ^{n-1} は，"rectifier" と呼ばれるものの一番簡単な例となっている．より分岐の高い場合も，Bushnell-Kutzko の分類のパラメータ（simple strata と呼ばれる）から素直に W_F の表現を構成すると，局所ラングランズ対応と指標の分だけずれることがしばしばあり，その指標を ε 因子等から決定するのが難しいようである（上の定理の場合は，幸運にも中心指標を見るだけで十分であった）．

ii) E が F の n 次不分岐拡大である場合には，$E^\times$ の正則指標 θ が暴分岐する場合であっても $\mathrm{AI}_{E/F}(\theta)$ を具体的に記述することができる．[Hen92] 参照．

iii) 定理 3.63 を証明する全く別の方法として，Drinfeld 上半空間の被覆の還元に Deligne-Lusztig 多様体が現れることを用いるという方法もある．[Wan14] の主結果と，Drinfeld 上半空間のコホモロジーに局所ラングランズ対応が現れることを組み合わせればよい．

4　局所ラングランズ対応の証明について

この節では，$\mathrm{GL}_n(F)$ に対する局所ラングランズ対応の証明について解説する．前節では，まず定理 3.1 において局所ラングランズ対応の大雑把な主張を述べた後，それが満たすべき性質を順次説明したが，参照しやすいように再度定理の形でまとめておこう（局所・大域整合性については，現在知られているものよりもかなり弱い，局所ラングランズ対応が証明された当時に得られていたものを書いている）．

定理 4.1（Harris-Taylor）
ℓ を素数とし，同型 $\iota\colon \overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$ を固定する．

i) $\ell \neq p$ とする．$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現の同型類の集合を $\mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$ と書き，W_F の Frobenius 半単純な n 次元 ℓ 進表現の同型類の集合を $\mathcal{G}_{n,\ell}(F)$ と書く．このとき，全単射 $\mathrm{rec}_F\colon \mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F)) \xrightarrow{\cong} \mathcal{G}_{n,\ell}(F)$ で性質 3.2，性質 3.3，性質 3.4，性質 3.15 を満たすものが存在する．

ii) L を CM 体とし，Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の正則代数的な尖点的保型表現で $\Pi^\vee \cong \Pi^c$ を満たすものとする．さらに，L のある有限素点 v_0 に対し Π_{v_0} が離散系列表現になると仮定する．このとき，Π に対応する Γ_L の n 次元半単純代数的 ℓ 進表現 R_Π が存在して，以下の性質を満たす：$v \nmid \ell$ となる L の任意の有限素点 v に対し，

$$(R_\Pi)_v^{\mathrm{ss}} = \mathrm{rec}_{L_v}(\Pi_v)^{\mathrm{ss}}.$$

この定理は最初に Harris-Taylor [HT01] によって証明された[注 15]．その後，定理の i) の部分に関して Henniart [Hen00] による少し違う証明が発表された．Henniart の証明は，志村多様体の悪い還元を調べることなく rec_F を構成できるという点において簡略化がされているといえるが，定理の ii) の部分である局所・大域整合性については何も得ることができないという欠点がある．さらに最近，Scholze [Sch13b] によって定理 4.1 そのものの別証明が得られた．Scholze の証明における一番の改良点は，「数値的ラングランズ対応」[Hen88] を使わなくてもよいというところである．数値的ラングランズ対応とは，大雑把には，導手を固定し不分岐指標での捻りを同一視すると $\mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$ と $\mathcal{G}_{n,\ell}(F)$ の元の個数が一致するということを主張するもので，その証明は等標数局所体に移って Laumon の局所 ℓ 進 Fourier 変換を用いた帰納法を行うという大掛かりなものである．[HT01] においては，まず rec_F^{-1} を構成し，それが全単射であることを「単射で両者の個数が一致するから全射」というタイプの議論を行うことにより導いていたが，Scholze の別証明によって，このいささか不自然な議論はもはや不要となったのである．

この改良により，定理 4.1 の証明に必要な理論の量が減ったばかりでなく，証明の見通しもかなりよくなった．例えば [HT01] においては，$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約超尖点表現と W_F の既約表現が対応することは対の ε 因子の比較を経て最後に証明されることであったが，Scholze の方法では ε 因子の比較の部分を完全に分離することができる．本稿で紹介する証明は，[HT01] と [Sch13b] の証明のよいところを組み合わせたものである．

4.1 証明のあらすじ

定理 4.1 の証明は 5 つのステップに分けることができる．ステップ 1 とステップ 2 では幾何学的な理論を駆使するため，詳しい説明は 4.2 節と 4.3 節に回し，本小節では概要のみを説明する．ステップ 3 からステップ 5 は表現論的な議論を行う部分なので，ある程度詳しく証明を紹介する．

■ステップ 1 — rec_F の構成 (local geometry)

既約超尖点表現の同型類のなす $\mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$ の部分集合を $\mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ と書く．また，W_F の既約な ℓ 進表現の同型類のなす $\mathcal{G}_{n,\ell}(F)$ の部分集合を $\mathcal{G}_{n,\ell}^{\mathrm{Irr}}(F)$ と書く．Zelevinsky 分類（系 1.28）および L パラメータの分類（命題 2.9）から，全単射 rec_F を構成するためには，全単射 $\mathrm{rec}_F\colon \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F)) \xrightarrow{\cong} \mathcal{G}_{n,\ell}^{\mathrm{Irr}}(F)$ を構成し，性質 3.4 を満たすようにのばせばよい．

まずはじめに，既約超尖点表現 π に対して W_F の有限次元 ℓ 進表現 $\mathrm{rec}_F(\pi)$ を

[注 15] もちろん小さい n に対してはこれ以前に得られていた結果もあるが，ここではふれない．なお，F が p 進体ではなく等標数局所体の場合には，$\mathrm{GL}_n(F)$ の局所ラングランズ対応は Laumon-Rapoport-Stuhler [LRS93] によって Harris-Taylor 以前に証明されていた．

構成する[注16]．このステップにおいては，**Lubin-Tate 塔**の ℓ 進エタールコホモロジーを用いる．詳細は 4.2 節で述べるが，Lubin-Tate 空間とは，高さ n の形式 $\mathcal{O}_F$ 加群の普遍変形空間として得られる $\widehat{F}^{\mathrm{ur}}$（$F$ の最大不分岐拡大の完備化）上の $n-1$ 次元リジッド空間である．その上の普遍形式 $\mathcal{O}_F$ 加群の ϖ^m 等分点 $(m \geq 1)$ へのレベル構造を考えることによって得られるエタール被覆の射影系を Lubin-Tate 塔と呼び，その $n-1$ 次コホモロジーの既約分解を用いて $\mathrm{rec}_F(\pi)$ を構成するのである（3.4 節で紹介した Deligne-Lusztig 理論と似ている）．古典的な Lubin-Tate 理論においては，高さ 1 の形式 $\mathcal{O}_F$ 加群（Lubin-Tate 群）の ϖ^m 等分点を用いて F の最大アーベル拡大が構成されたが，上記の $\mathrm{rec}_F(\pi)$ の構成はこれの自然な一般化となっている．このことから，次の命題が従う．

命題 4.2

$n=1$ のとき，$\chi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_1(F)) = \mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_1(F))$ に対し $\mathrm{rec}_F(\chi) = \chi \circ \mathrm{Art}_F^{-1}$.

また，以下の命題は rec_F の構成からすぐに示せる．

命題 4.3

i) $\pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ および $F^\times$ の不分岐指標 χ に対し，次が成り立つ：

$$\mathrm{rec}_F\bigl(\pi \otimes (\chi \circ \det)\bigr) = \mathrm{rec}_F(\pi) \otimes \chi.$$

ii) F' を別の p 進体とし，$\mathbb{Q}_p$ 上の体同型 $F \xrightarrow{\cong} F'$ が与えられたとすると，以下の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}\bigl(\mathrm{GL}_n(F)\bigr) & \xrightarrow{\mathrm{rec}_F} & \mathcal{G}_\ell(F) \\
\downarrow{\cong} & & \downarrow{\cong} \\
\mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}\bigl(\mathrm{GL}_n(F')\bigr) & \xrightarrow{\mathrm{rec}_{F'}} & \mathcal{G}_\ell(F').
\end{array}$$

ここで，$\mathcal{G}_\ell(F)$ は W_F の（Frobenius 半単純とは限らない）有限次元 ℓ 進表現の同型類の集合を表すものとする．

$\mathrm{rec}_F(\pi)$ は結果として既約になるが，定義からすぐには分からないので，その半単純化を $\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi)$ とおく．これは W_F の有限次元スムーズ表現であり（注意 2.19 参照），命題 4.3 と同様の性質を満たす．

ステップ 1 において最も重要なのは次の定理である：

[注16] この時点で $\mathrm{rec}_F(\pi)$ が n 次元であることを証明することもできるが，そうしなくてもよい．

定理 4.4

$n \geq 2$ のとき，$\pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し $\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi)^{I_F} = 0$ である．

この定理の証明には，レベル ϖ^m の Lubin-Tate 空間が完備正則局所環を座標環とする形式モデル（Drinfeld レベル構造を用いて構成される）を持つことと Gabber の絶対純性定理 ([Fuj02], [ILO14, Exposé XVI]) を用いる．詳細は 4.2 節を参照．この定理が [Sch13b] の核心であり，後に rec_F の全単射性を証明する際の鍵となる．

$\pi \in \mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し，$\mathrm{supp}(\pi) = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$ とするとき，$\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi) = \bigoplus_{i=1}^k \mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi_i)$ と定める（$\mathrm{supp}(\pi)$ については定義 1.20 を参照）．π が不分岐ならば，$\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi)$ は不分岐局所ラングランズ対応で π に対応する W_F の不分岐表現になることが命題 4.2 から分かる．

■ステップ 2 — 大域的な Galois 表現の構成 (global geometry)

このステップでは，大域的な保型表現に伴う Galois 表現を構成し，その局所成分がステップ 1 で構成した $\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}$ を用いて記述されることを示す．主結果は次の定理である．

定理 4.5

L を CM 体とし，Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の正則代数的な尖点的保型表現で $\Pi^\vee \cong \Pi^c$ を満たすものとする．さらに，L のある有限素点 v_0 に対し Π_{v_0} が離散系列表現になると仮定する．このとき，Γ_L の n 次元半単純代数的 ℓ 進表現 R_Π で以下の性質を満たすものが存在する：$v \nmid \ell$ となる L の任意の有限素点 v に対し，

$$(R_\Pi)_v^{\mathrm{ss}} = \mathrm{rec}_{L_v}^{\mathrm{ss}}(\Pi_v).$$

ステップ 1 の最後に述べたことから，R_Π は Π に対応する．

この定理の証明は，GL_n の局所ラングランズ対応の証明において最も難しく，本質的な部分である．ここではあまり詳しいことは述べられないが，少しだけ説明を試みたい．以下では簡単のため，L が虚二次体を含むと仮定する（一般の場合は，Galois 表現の貼り合わせによってこの場合に帰着することができる）．

証明には志村多様体のエタールコホモロジーを用いる．GL_n $(n \geq 3)$ には志村多様体がないため，同じ A 型であるユニタリ群の志村多様体を使うのであるが，ここでは通常のユニタリ群ではなく，L 上の階数 n の可除代数 B に伴うユニタリ群 [注 17] G の志村多様体を用いる．また，無限素点におけるユニタリ群の符号は $(1, n-1) \times (0, n) \times \cdots \times (0, n)$ となるようにしておく．このような志村多様体を考えることの利点としては，次の 3 つが挙げられる．

[注 17] 正確には unitary similitude 群．

- 志村多様体がコンパクトになる．
- 可除代数に伴うユニタリ群は非自明なエンドスコピー群を持たないので，志村多様体のコホモロジーや Arthur 跡公式が極めて簡単な形になる．基本補題を用いた跡公式の安定化は基本的に不要である．
- 全ての n に対して存在する．これに対し，全ての有限素点において準分裂かつ無限素点における符号が $(1, n-1) \times (0, n) \times \cdots \times (0, n)$ となる L 上のユニタリ群が存在するためには，n が奇数，または $n \equiv 2 \pmod 4$ かつ $[L : \mathbb{Q}]/2$ が奇数という条件がつく [注 18]．

G に対応する志村多様体は，Kottwitz [Kot92a] や Clozel [Clo93] によって研究されていた "simple Shimura variety" の中でも最も簡単なものであり，そのエタールコホモロジーがユニタリ群 G のラングランズ対応と関係していることは Harris-Taylor 以前から分かっていた．一方，G の保型表現と GL_n の保型表現を結び付ける関手性は Clozel-Labesse の底変換 ([Lab99, Appendix A]) と呼ばれ，跡公式の安定化の問題を回避する形で当時既に確立されていた [注 19]．定理 4.5 における Π の条件「$\Pi^\vee \cong \Pi^c$」および「Π_{v_0} が離散系列表現となる v_0 の存在」は，Π が G の保型表現 π から来ることを保証するためのものである．また，Π が正則代数的であることから，π は G の志村多様体のコホモロジーに現れることが分かる．以上のことから，大雑把には，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の尖点的保型表現 Π から始めて G の保型表現 π をとり，G に対応する志村多様体のエタールコホモロジーにおける π^∞ 部分をとれば R_Π が構成できるということになる（実際にはもう少し修正が必要である．なお，このような構成は [Clo91] において既に行われていた）．上述の Kottwitz の結果から，R_Π は Π と対応する．[HT01] の主要な貢献は，[Car86], [Boy99] 等の手法をうまく拡張して志村多様体の悪い還元を調べることで，Π が分岐するような有限素点 v においても等式 $(R_\Pi)_v^{\mathrm{ss}} = \mathrm{rec}_{L_v}^{\mathrm{ss}}(\Pi_v)$ を証明したという点にある．より詳しい解説は 4.3 節を参照していただきたい．

■ステップ 3 — rec_F と表現論的な操作の関係

定理 4.5 と大域化の議論により，次を証明することができる．

定理 4.6

$\pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し，以下が成り立つ．

i) $\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi)$ は n 次元表現である．

[注 18] 例えば [Shi11] では，n が奇数の場合に全ての有限素点で準分裂なユニタリ群の志村多様体を考え，n が偶数の場合は一つ大きいサイズのユニタリ群に対応する志村多様体のコホモロジーの「エンドスコピー部分」を利用することで，Π_{v_0} が離散系列表現となる有限素点 v_0 が存在しないような Π に対しても Galois 表現の構成を行っているが，これは局所ラングランズ対応があらかじめ証明されているから可能になることである．

[注 19] これに対し，全ての有限素点で準分裂なユニタリ群の保型表現と GL_n の保型表現を結び付けるためには基本補題が必要となる．

ii) $F^\times$ のスムーズ指標 χ に対し，$\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi\otimes(\chi\circ\det))=\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi)\otimes\chi$.
iii) π の中心指標を ω_π とすると，$\omega_\pi=\det(\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi))$.
iv) $\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi^\vee)=\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi)^\vee$.
v) E を F の素数次巡回拡大とするとき，$\mathrm{rec}_E^{\mathrm{ss}}(\mathrm{BC}_{E/F}(\pi))=\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi)|_{W_E}$.

証明　π は既約超尖点表現なので，不分岐指標で捻ると保型表現へと大域化できる．すなわち，CM 体 L とその有限素点 v，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の正則代数的な尖点的保型表現 Π で $\Pi^\vee\cong\Pi^c$ を満たすもの，$F^\times$ の不分岐指標 ψ が存在して，以下を満たす：

- v は $L^+=L^{c=1}$ 上分解する．
- $L_v\cong F$ であり，その同型のもとで $\Pi_v\cong\pi\otimes(\psi\circ\det)$.

これは Arthur 跡公式によって証明される．[HT01, Corollary VI.2.6] を参照 注 [20]．

Π に対し，定理 4.5 の通りに R_Π をとる．命題 4.3 i) より

$$(R_\Pi)_v^{\mathrm{ss}}=\mathrm{rec}_{L_v}^{\mathrm{ss}}(\Pi_v)=\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}\bigl(\pi\otimes(\psi\circ\det)\bigr)=\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi)\otimes\psi$$

であるから，$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi)=\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_\Pi)_v=n$ となり i) が従う．

ii) から v) の証明はどれもよく似ているので，ii) と v) のみ説明する．まず ii) を示す．$\mathbb{A}_L^\times/L^\times L_\infty^\times$ のスムーズ指標 Ξ を，$\Xi^{-1}=\Xi^c$ かつ $\chi^{-1}\Xi_v$ が不分岐であるようにとることができる．$\Pi\otimes(\Xi\circ\det)$ も定理 4.5 の条件を満たすので，Γ_L の n 次元半単純 ℓ 進表現 R_Π, $R_{\Pi\otimes(\Xi\circ\det)}$ が得られる．Π_w および Ξ_w が不分岐となるような L の有限素点 $w\nmid\ell$ に対し，

$$(R_\Pi\otimes\Xi)_w^{\mathrm{ss}}=\mathrm{rec}_{L_w}^{\mathrm{ss}}(\Pi_w)\otimes\Xi_w,\quad (R_{\Pi\otimes(\Xi\circ\det)})_w^{\mathrm{ss}}=\mathrm{rec}_{L_w}^{\mathrm{ss}}\bigl(\Pi_w\otimes(\Xi_w\circ\det)\bigr)$$

となるので，命題 4.3 i) から $(R_\Pi\otimes\Xi)_w^{\mathrm{ss}}=(R_{\Pi\otimes(\Xi\circ\det)})_w^{\mathrm{ss}}$ が得られる．さらに，両辺は不分岐表現である．よって Chebotarev の密度定理より $R_\Pi\otimes\Xi\cong R_{\Pi\otimes(\Xi\circ\det)}$ が成り立つ．命題 4.3 i) と ψ, $\chi^{-1}\Xi_v$ の不分岐性から

$$\begin{aligned}(R_\Pi\otimes\Xi)_v^{\mathrm{ss}}&=\mathrm{rec}_{L_v}^{\mathrm{ss}}(\Pi_v)\otimes\Xi_v=\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}\bigl(\pi\otimes(\psi\circ\det)\bigr)\otimes\Xi_v=\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}\bigl(\pi)\otimes\psi\Xi_v,\\(R_{\Pi\otimes(\Xi\circ\det)})_v^{\mathrm{ss}}&=\mathrm{rec}_{L_v}^{\mathrm{ss}}\bigl(\Pi_v\otimes(\Xi_v\circ\det)\bigr)=\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}\bigl(\pi\otimes(\chi\circ\det)\bigr)\otimes\psi\chi^{-1}\Xi_v\end{aligned}$$

となるので，$\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi)\otimes\chi=\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi\otimes(\chi\circ\det))$ が従う．

$d=[E:F]$ とおく．上の L を適切にとると，L の d 次巡回拡大である CM 体 L' および L' の素点で v の上にあるもの v' が存在して，$L'_{v'}/L_v$ が E/F と同型になるようにできる（[HT01, Lemma VII.2.4] の証明の冒頭部参照）．v と異なる L の有限素点 u で L' において完全分解するものを一つ選び，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の保型表現 Π を上記の条件に加えさらに Π_u が超尖点表現となるようにとっておく．このとき，

注 [20] [HT01] の証明は見かけ上志村多様体のコホモロジーを用いているが，[Shi12, Corollary 1.2] を用いて適切なユニタリ群の保型表現を構成してから GL_n に持ち上げることで，純保型表現論的な証明も可能であると思われる．

$\Pi' = \mathrm{BC}_{E/F}(\Pi)$ は u の上にある素点において超尖点的なので，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{L'})$ の尖点的保型表現である．Π' は正則代数的であり，$\Pi'^{\vee} \cong \Pi'^{c}$ であることも示せる．したがって，定理 4.5 を Π' に適用することで，$\Gamma_{L'}$ の n 次元半単純 ℓ 進表現 $R_{\Pi'}$ が得られる．$R_{\Pi'} \cong R_{\Pi}|_{\Gamma_{L'}}$ を示そう．L の有限素点 $w \nmid \ell$ において，L'/L および Π が不分岐であるとする（有限個を除いて全ての w がこの条件を満たす）．w の上にある L' の素点 w' をとる．このとき，

$$
\begin{aligned}
(R_{\Pi'})^{\mathrm{ss}}_{w'} &= \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{L'_{w'}}(\Pi'_{w'}) = \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{L'_{w'}}(\mathrm{BC}_{L'_{w'}/L_w}\Pi_w) \overset{(*)}{=} \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{L_w}(\Pi_w)|_{W_{L'_{w'}}},\\
(R_{\Pi}|_{\Gamma_{L'}})^{\mathrm{ss}}_{w'} &= ((R_{\Pi})_w|_{W_{L'_{w'}}})^{\mathrm{ss}} = (\mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{L_w}(\Pi_w)|_{W_{L'_{w'}}})^{\mathrm{ss}} = \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{L_w}(\Pi_w)|_{W_{L'_{w'}}}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，$(*)$ においては $\mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}$ が不分岐ラングランズ対応を誘導すること，不分岐拡大に関する底変換が不分岐ラングランズ対応で制限に対応することを用いた．特に $(R_{\Pi'})^{\mathrm{ss}}_{w'} = (R_{\Pi}|_{\Gamma_{L'}})^{\mathrm{ss}}_{w'}$ であるから，Chebotarev 密度定理より $R_{\Pi'} \cong R_{\Pi}|_{\Gamma_{L'}}$ が従う．

$$
\begin{aligned}
(R_{\Pi'})^{\mathrm{ss}}_{v'} &= \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{L'_{v'}}(\Pi'_{v'}) = \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{L'_{v'}}(\mathrm{BC}_{L'_{v'}/L_v}\Pi_v) = \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{E}\bigl(\mathrm{BC}_{E/F}(\pi \otimes (\psi \circ \det))\bigr)\\
&= \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{E}\bigl(\mathrm{BC}_{E/F}(\pi) \otimes (\psi \circ N_{E/F} \circ \det)\bigr)\\
&\overset{(\dagger)}{=} \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{E}\bigl(\mathrm{BC}_{E/F}(\pi)\bigr) \otimes (\psi \circ N_{E/F}),\\
(R_{\Pi}|_{\Gamma_{L'}})^{\mathrm{ss}}_{v'} &= \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{L_v}(\Pi_v)|_{W_{L'_{v'}}} = \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{F}\bigl(\pi \otimes (\psi \circ \det)\bigr)\bigr|_{W_E} = \bigl(\mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{F}(\pi) \otimes \psi\bigr)\bigr|_{W_E}\\
&= \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{F}(\pi)|_{W_E} \otimes (\psi \circ \mathrm{Art}_F^{-1})|_{W_E} = \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{F}(\pi)|_{W_E} \otimes (\psi \circ N_{E/F})
\end{aligned}
$$

であるから（$(\dagger)$ において ii) を用いた），$\mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{E}(\mathrm{BC}_{E/F}(\pi)) = \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{F}(\pi)|_{W_E}$ が得られる． ∎

■ステップ 4 — rec_F の全単射性

このステップでは，定理 4.4 と定理 4.6 を用いて rec_F の全単射性を証明する．

定理 4.7

$\pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し $\mathrm{rec}_F(\pi)$ は既約（したがって特に $\mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_F(\pi) = \mathrm{rec}_F(\pi)$）であり，$\mathrm{rec}_F$ は $\mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ から $\mathcal{G}^{\mathrm{Irr}}_{n,\ell}(F)$ への全単射を与える．

証明　n についての帰納法を用いる．$n=1$ の場合は命題 4.2 よりよい．以下では $n \geq 2$ とする．

まず，$\pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し $\mathrm{rec}_F(\pi)$ が既約になることを示そう．$\sigma = \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_F(\pi)$ の既約性を証明すれば十分である．次を満たすような体の有限次拡大の列 $F = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_m$ をとる：

- F_{i+1}/F_i は素数次巡回拡大 $(0 \leq i \leq m-1)$.
- $\sigma^{I_{F_m}} \neq 0$.

$\pi_0 = \pi, \pi_{i+1} = \mathrm{BC}_{F_{i+1}/F_i}(\pi_i)$ によって帰納的に $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_m$ を定めると，定理 4.6 v) より $\mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{F_i}(\pi_i) = \sigma|_{W_{F_i}}$ である．特に $\mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{F_m}(\pi_m)^{I_{F_m}} = \sigma^{I_{F_m}} \neq 0$ であるから，定理 4.4 より π_m は超尖点表現ではない．よって，π_i が超尖点表現となるような最大の i を i_0 とすると $i_0 \leq m-1$ である．$F' = F_{i_0}, E = F_{i_0+1}, \pi' = \pi_{i_0}$ とおく．$d = [E : F']$ とおき，生成元 $\tau \in \mathrm{Gal}(E/F')$ をとる．命題 3.38 i), ii) より，$\Pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_{n/d}(E))$ で $\Pi \not\cong \Pi^\tau$ となるものが存在して，$\mathrm{BC}_{E/F'}(\pi') = \Pi \boxplus \Pi^\tau \boxplus \cdots \boxplus \Pi^{\tau^{d-1}}$ となる．帰納法の仮定より，$\Sigma = \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_E(\Pi)$ は既約であり，$\mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_E(\Pi) \not\cong \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_E(\Pi^\tau)$ である．命題 4.3 ii) より $\mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_E(\Pi^\tau) = \Sigma^\tau$ であるから，$\Sigma \not\cong \Sigma^\tau$ となる．再び命題 4.3 ii) より $(\sigma|_{W_{F'}})|_{W_E} = \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_E(\mathrm{BC}_{E/F'}(\pi')) = \Sigma \oplus \Sigma^\tau \oplus \cdots \oplus \Sigma^{\tau^{d-1}}$ であるから，$\sigma|_{W_{F'}}$ は $W_{F'}$ の既約表現である．したがって σ は W_F の既約表現であることが示された．

次に rec_F の全単射性を示す．$\sigma \in \mathcal{G}^{\mathrm{Irr}}_{n,\ell}(F)$ をとり，$\mathrm{rec}_F(\pi) = \sigma$ となる $\pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ が唯一存在することを証明すればよい．次を満たすような体の有限次拡大の列 $F = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{m+1}$ が存在する：

- F_{i+1}/F_i は素数次巡回拡大 $(0 \leq i \leq m)$.
- $\sigma|_{W_{F_m}}$ は既約，$\sigma|_{W_{F_{m+1}}}$ は既約ではない．

まず，$\mathrm{rec}_{F_m}(\pi) = \sigma|_{W_{F_m}}$ となる $\pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F_m))$ が一意的に存在することを示そう．簡単のため，$F = F_m, E = F_{m+1}, \sigma = \sigma|_{W_{F_m}}$ と置き直す．$d = [E : F]$ とおき，生成元 $\tau \in \mathrm{Gal}(E/F)$ をとる．$\sigma|_{W_E}$ は既約ではないので，$\Sigma \in \mathcal{G}^{\mathrm{Irr}}_{n/d,\ell}(E)$ で $\Sigma \not\cong \Sigma^\tau$ となるものが存在して $\sigma|_{W_E} = \Sigma \oplus \Sigma^\tau \oplus \cdots \oplus \Sigma^{\tau^{d-1}}$ となる．帰納法の仮定より，$\mathrm{rec}_E(\Pi) = \Sigma$ となる $\Pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_{n/d}(E))$ が一意的に存在する．帰納法の仮定と命題 4.3 ii) および $\Sigma \not\cong \Sigma^\tau$ より，$\Pi \not\cong \Pi^\tau$ である．したがって命題 3.38 iii) より，$\mathrm{BC}_{E/F}(\pi) = \Pi \boxplus \Pi^\tau \boxplus \cdots \boxplus \Pi^{\tau^{d-1}}$ となる $\pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ が一意的に存在する．定理 4.6 v) より $\mathrm{rec}_F(\pi)|_{W_E} = \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_E(\mathrm{BC}_{E/F}(\pi)) = \sigma|_{W_E}$ であり，これと $\mathrm{rec}_F(\pi)$ の既約性から $\sigma = \mathrm{Ind}^{W_F}_{W_E}(\Sigma) \cong \mathrm{rec}_F(\pi)$ が従う．これで存在が示された．π の一意性を示そう．$\pi' \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対しても $\mathrm{rec}_F(\pi') = \sigma$ となると仮定する．$\sigma|_{W_E}$ は既約ではないから，定理 4.6 v) より $\mathrm{BC}_{E/F}(\pi')$ は超尖点表現ではない．したがって，$\Pi' \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_{n/d}(F))$ で $\Pi' \not\cong (\Pi')^\tau$ となるものが存在して，$\mathrm{BC}_{E/F}(\pi') = \Pi' \boxplus (\Pi')^\tau \boxplus \cdots \boxplus (\Pi')^{\tau^{d-1}}$ となる．$\mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_E(\mathrm{BC}_{E/F}(\pi')) = \sigma|_{W_E} = \Sigma \oplus \Sigma^\tau \oplus \cdots \oplus \Sigma^{\tau^{d-1}}$ より，$\mathrm{rec}_E((\Pi')^{\tau^i}) = \Sigma$ となる i が存在する．Π' を $(\Pi')^{\tau^i}$ に置き変えることで，$\mathrm{rec}_E(\Pi') = \Sigma$ としてよい．$\mathrm{rec}_E(\Pi) = \Sigma$ と帰納法の仮定より $\Pi = \Pi'$ であるから，$\mathrm{BC}_{E/F}(\pi') = \Pi \boxplus \Pi^\tau \boxplus \cdots \boxplus \Pi^{\tau^{d-1}} = \mathrm{BC}_{E/F}(\pi)$ となり，命題 3.38 iii) から $\pi' = \pi$ が結論される．

あとは $0 \leq i \leq m-1$ に対し，$\mathrm{rec}_{F_{i+1}}(\Pi) = \sigma|_{W_{F_{i+1}}}$ となる $\Pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F_{i+1}))$ が一意的に存在することを仮定して，$\mathrm{rec}_{F_i}(\pi) = \sigma|_{W_{F_i}}$ となる $\pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F_i))$ が一意的に存在することを示せばよい．上と同様に，$F = F_i, E = F_{i+1}, \sigma = \sigma|_{W_{F_i}}$

と置き直し，$d=[E:F]$ とおき，生成元 $\tau\in\mathrm{Gal}(E/F)$ をとる．命題 4.3 ii) より $\mathrm{rec}_E(\Pi^\tau)=(\sigma|_{W_E})^\tau=\sigma|_{W_E}=\mathrm{rec}_E(\Pi)$ となるから，Π の一意性より $\Pi\cong\Pi^\tau$ である．よって命題 3.38 iv) から，$\mathrm{BC}_{E/F}(\pi_0)=\Pi$ となる $\pi_0\in\mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ が存在する．定理 4.6 v) より $\mathrm{rec}_F(\pi_0)|_{W_E}=\mathrm{rec}_E(\Pi)=\sigma|_{W_E}$ となるから，$F^\times/N_{E/F}E^\times\cong\mathrm{Gal}(E/F)$ の指標 χ が存在して $\mathrm{rec}_F(\pi_0)\otimes\chi\cong\sigma$ となる．したがって $\pi=\pi_0\otimes(\chi\circ\det)$ とおくと，定理 4.6 ii) から $\mathrm{rec}_F(\pi)=\sigma$ となるので π の存在が示された．
次に一意性を示す．$\pi'\in\mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ も $\mathrm{rec}_F(\pi')=\sigma$ を満たすとすると，定理 4.6 v) より $\mathrm{rec}_E^{\mathrm{ss}}(\mathrm{BC}_{E/F}(\pi'))=\sigma|_{W_E}$ となるので，まず $\mathrm{BC}_{E/F}(\pi')$ が超尖点表現であることが分かり，次に Π の一意性から $\mathrm{BC}_{E/F}(\pi')=\Pi=\mathrm{BC}_{E/F}(\pi)$ が分かる．よって命題 3.38 iv) より，$F^\times/N_{E/F}E^\times$ の指標 χ' が存在して $\pi'\cong\pi\otimes(\chi'\circ\det)$ となる．定理 4.6 ii) より $\sigma=\mathrm{rec}_F(\pi')=\mathrm{rec}_F(\pi\otimes(\chi'\circ\det))=\sigma\otimes\chi'$ となるから $\chi'=\mathbf{1}$ が得られ，$\pi'=\pi$ が従う． ∎

この定理から，局所ラングランズ対応を構成することができる．

定義 4.8

$\mathrm{rec}_F\colon\mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))\longrightarrow\mathcal{G}_{n,\ell}(F)$ を次のように定める：

$$\mathrm{rec}_F\bigl(\mathrm{St}_{m_1}(\pi_1)\boxplus\cdots\boxplus\mathrm{St}_{m_k}(\pi_k)\bigr)=\bigl(\mathrm{rec}_F(\pi_1)\otimes\mathbf{Sp}_{m_1}\bigr)\oplus\cdots\oplus\bigl(\mathrm{rec}_F(\pi_k)\otimes\mathbf{Sp}_{m_k}\bigr).$$

ここで記号は系 1.28 の通りとする．すなわち，$n=n_1+\cdots+n_k$ は n の分割，m_i は n_i の約数，π_i は $\mathrm{GL}_{n_i/m_i}(F)$ の既約超尖点表現である．

定理 4.7 より，これは全単射となる．

命題 4.2，命題 4.3，定理 4.6，定理 4.7 より，この rec_F が性質 3.2，性質 3.3，性質 3.4 を満たすことが分かる．また，定理 3.42 も定理 4.6 v) および定理 4.7 から導くことができる（π が $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約超尖点表現ならば，命題 3.38 i), ii) より $\mathrm{BC}_{E/F}(\pi)$ は超尖点表現のラングランズ和なので，$\mathrm{rec}_E^{\mathrm{ss}}(\mathrm{BC}_{E/F}(\pi))=\mathrm{rec}_E(\mathrm{BC}_{E/F}(\pi))$ となることに注意）．あとは性質 3.15 を証明すればよい．

■ステップ 5 — L 因子・ε 因子を保つこと

このステップの目標は次の定理である：

定理 4.9

ψ を F の非自明な指標とする．$\pi\in\mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し，以下が成り立つ：

$$L(s,\pi)=L\bigl(s,\mathrm{rec}_F(\pi)\bigr),\quad \varepsilon(s,\pi,\psi)=\varepsilon\bigl(s,\mathrm{rec}_F(\pi),\psi\bigr).$$

注意 4.10

[JPSS83, Theorem 3.1, Theorem 8.2, Theorem 9.5] と [Tat79, (4.1.6)] より，π が超尖点表現である場合に帰着できる．$n=1$ の場合は性質 3.2 より従うので，$n \geq 2$ としてよい．この場合 $L(s,\pi)$ と $L(s,\mathrm{rec}_F(\pi))$ はともに 1 となるので，ε 因子のみ比較すればよい．

証明のアイデアは次のようなものである．π を局所成分 Π_v に持つような保型表現 Π をとる．Π に対応する Galois 表現 R が存在し，さらに R の L 関数が解析接続および関数等式を満たすとする．ε 因子は関数等式に現れるので，Π の関数等式と R の関数等式を比べることで $\pi=\Pi_v$ と $\mathrm{rec}_F(\pi)=R_v$ の ε 因子を比較することができる（v 以外にも Π_w が分岐するような素点 w からの寄与が現れるが，w において十分分岐する指標で Π を捻ることでこの寄与は消すことができる）．一般の R に対して L 関数の解析接続，関数等式を証明することは困難なので，π に対して Π をうまく選ぶことが必要になる．一般の π に対してこのようなことはできないが，もし π が指標からの保型誘導 $\mathrm{AI}_{E/F}(\theta)$（$E/F$ は巡回拡大，θ は $E^\times$ のスムーズ指標）になっているなら，E/F および θ を大域化して Π も保型誘導として選んでおけば，R の L 関数は Hecke 指標の L 関数なので解析接続，関数等式が成り立つ．そこで，より一般の，Galois 拡大とは限らない体拡大に対しても保型誘導を一般化し，それに対して同様の議論を適用することを考える（**Harris の非 Galois 保型誘導**）．このような場合だけ考えれば十分であることは，ℓ 進表現側に Brauer 誘導定理を使うことで証明できる．

もう少し詳しいことを説明するためには，関数等式を満たす Galois 表現のクラスを与える大域的な Weil 群を用いると便利であるため，まずこれについて簡単に復習する．定義は述べないが，代数体 L の Weil 群 W_L は以下のような特徴を持つ局所コンパクト群である．

(a) 全射 $W_L \twoheadrightarrow \Gamma_L$ がある．

(b) $W_L^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{A}_L^\times/L^\times$ であり，合成 $\mathbb{A}_L^\times/L^\times \cong W_L^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \Gamma_L^{\mathrm{ab}}$ は類体論の全射となる．

(c) L の各素点 v および代数閉包の埋め込み $\overline{L} \hookrightarrow \overline{L}_v$ に対し，群準同型 $W_{L_v} \longrightarrow W_L$ が定まる．

詳細は [Tat79] を参照．

以下では，W_L の $\mathbb{C}$ 上の有限次元連続表現を考える．(a) より，Γ_L の Artin 表現はこのようなものの一部である．また (b) より，W_L の連続指標は L の Hecke 指標と一対一に対応する（もちろん Artin 表現以外のものも出てくる）．W_L の原始的な（すなわち，より小さい部分群からの誘導表現として書けない）既約連続表現は上記の 2 種類の表現のテンソル積で書けることが知られている ([Tat79, (2.2.3)])．

R を W_L の有限次元連続表現とする．$W_L = \varprojlim_{L'/L} W_L/[W_{L'},W_{L'}]$ であるから（[Tat79, (1.1)] 参照．$[W_{L'},W_{L'}]$ は $W_{L'}$ の交換子群の閉包を表す），L の有限次 Galois 拡大 L' が存在して，$R|_{W_{L'}}$ は $W_{L'}^{\mathrm{ab}}$ を経由する．特に R が半単純ならば，

$R|_{W_{L'}}$ は $W_{L'}$ の指標の直和である．

L の各素点 v に対し，(c) の準同型 $W_{L_v} \longrightarrow W_L$ によって R を制限することで，W_{L_v} の（$\mathbb{C}$ 上の）連続表現が同型を除いて定まる．これを R_v と書く．上述の半単純表現の性質より，R が半単純ならば R_v も半単純になることが分かる．

R の L 関数，ε 因子を

$$L(s,R) = \prod_v L(s,R_v), \quad \varepsilon(s,R) = \prod_v \varepsilon(s,R_v,\Psi_v)$$

と定める．Ψ は $\mathbb{A}_L/L$ の非自明な指標である．$\varepsilon(s,R)$ は Ψ のとり方によらない．$L(s,R)$ は解析接続および関数等式を満たす ([Tat79, Theorem 3.5.3])：

定理 4.11

$L(s,R)$ は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ のとき絶対収束し，全平面に有理型に解析接続される．また，関数等式 $L(s,R) = \varepsilon(s,V)L(1-s,R^\vee)$ が成り立つ．

R が Artin 表現および連続指標である場合にはこの定理はよく知られている．一般の場合はこの場合に帰着することで証明できる．

W_L の連続表現と Γ_L の ℓ 進表現の関係を考えよう．W_L の有限次元半単純連続表現 R が次の条件を満たすとき，**代数的**であるということにする：

L の任意の無限素点 v に対し，$R_v|_{W_\mathbb{C}}$ は $z \mapsto z^a\overline{z}^b$ $(a,b \in \mathbb{Z})$ という形の指標の直和である．

このとき，固定していた体同型 $\iota\colon \overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$ を用いると，以下の条件を満たす Γ_L の半単純 ℓ 進表現 R_ℓ を構成することができる ([Sch13b, Lemma 13.4])：

$v \nmid \ell$ となる L の有限素点 v に対し，$(R_\ell)_v \cong R_v$．

R が Artin 表現の場合は $R_\ell = R$ とすればよい．また，R が代数的な連続指標の場合には，R_ℓ は R に対応する ℓ 進指標に他ならない．

R_ℓ の L 関数・ε 因子は R の L 関数・ε 因子と一致するので，R_ℓ に対しても L 関数の解析接続・関数等式が証明できたことになる．

ε 因子の比較は次の定理によって可能になる：

定理 4.12（[Hen86, Theorem 4.1]）

L を代数体とし，Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の保型表現とする．R を W_L の n 次元連続表現とする．S を L の素点の有限集合とし，$v \notin S$ ならば $\mathrm{rec}_{L_v}(\Pi_v) = R_v$ が成り立っているとする．Ψ を $\mathbb{A}_L/L$ の非自明指標とする．このとき，任意の有限素点 v に対して，Π_v と R_v の γ 因子

$$\gamma(s,\Pi_v,\Psi_v) = \frac{\varepsilon(s,\Pi_v,\Psi_v)L(1-s,\Pi_v^\vee)}{L(s,\Pi_v)},\ \gamma(s,R_v,\Psi_v) = \frac{\varepsilon(s,R_v,\Psi_v)L(1-s,R_v^\vee)}{L(s,R_v)}$$

は一致する．

証明　L の無限素点全体を S_∞ と書く．

S を大きくすることで，$v \notin S$ ならば v は有限素点であり，Π_v は不分岐表現の指標による捻りであるとしてよい．このとき，$v \notin S$ に対して $L(s, \Pi_v) = L(s, R_v)$, $L(s, \Pi_v^\vee) = L(s, R_v^\vee)$, $\varepsilon(s, \Pi_v, \Psi_v) = \varepsilon(s, R_v, \Psi_v)$ となるから，関数等式より

$$\prod_{v \in S} \gamma(s, \Pi_v, \Psi_v) = \prod_{v \notin S} \gamma(s, \Pi_v, \Psi_v)^{-1} = \prod_{v \notin S} \gamma(s, R_v, \Psi_v)^{-1} = \prod_{v \in S} \gamma(s, R_v, \Psi_v)$$

が成り立つ．$v_0 \in S \setminus S_\infty$ を固定し，$\gamma(s, \Pi_{v_0}, \Psi_{v_0}) = \gamma(s, R_{v_0}, \Psi_{v_0})$ を示せばよい．まず，$\mathbb{A}_L^\times / L^\times L_\infty^\times$ の指標 χ を，各 $v \in S \setminus S_\infty$ に対し χ_v が十分大きな導手を持つようにとる．$\Pi \otimes (\chi \circ \det)$ と $R \otimes \chi$ に上の議論を適用すると，

$$\prod_{v \in S} \gamma\bigl(s, \Pi_v \otimes (\chi_v \circ \det), \Psi_v\bigr) = \prod_{v \in S} \gamma(s, R_v \otimes \chi_v, \Psi_v)$$

が成り立つ．さらに，$v \in S \setminus S_\infty$ に対して χ_v が十分大きな導手を持つという仮定から

$$\begin{gathered}
L\bigl(s, \Pi_v \otimes (\chi_v \circ \det)\bigr) = L\bigl(s, \Pi_v^\vee \otimes (\chi_v^{-1} \circ \det)\bigr) = 1, \\
\varepsilon\bigl(s, \Pi_v \otimes (\chi_v \circ \det), \Psi_v\bigr) = \varepsilon(s, \chi_v, \Psi_v)^{n-1} \varepsilon(s, \chi_v \omega_{\Pi_v}, \Psi_v), \\
L(s, R_v \otimes \chi_v) = L(s, R_v^\vee \otimes \chi_v^{-1}) = 1, \\
\varepsilon(s, R_v \otimes \chi_v, \Psi_v) = \varepsilon(s, \chi_v, \Psi_v)^{n-1} \varepsilon(s, \chi_v \det R_v, \Psi_v)
\end{gathered}$$

が成り立つことが知られている（[Hen86, Lemma 4.2] 参照）．性質 3.3 ii) から $\omega_\Pi = \det R$ であることに注意すると，$v \in S \setminus S_\infty$ に対し $\gamma(s, \Pi_v \otimes (\chi_v \circ \det), \Psi_v) = \gamma(s, R_v \otimes \chi_v, \Psi_v)$ であることが分かるので，上の式と合わせて

$$\prod_{v \in S_\infty} \gamma(s, \Pi_v, \Psi_v) = \prod_{v \in S_\infty} \gamma(s, R_v, \Psi_v) \tag{$*$}$$

が得られる（$v \in S_\infty$ のとき $\chi_v = \mathbf{1}$ となるように χ をとったことに注意）．

次に，$\mathbb{A}_L^\times / L^\times L_\infty^\times$ の指標 χ' を，各 $v \in S \setminus (S_\infty \cup \{v_0\})$ に対し χ'_v が十分大きな導手を持ち，$\chi'_{v_0} = \mathbf{1}$ であるようにとる．このとき，上と同様の議論により，

$$\prod_{v \in S_\infty \cup \{v_0\}} \gamma(s, \Pi_v, \Psi_v) = \prod_{v \in S_\infty \cup \{v_0\}} \gamma(s, R_v, \Psi_v)$$

となるので，$(*)$ と合わせて $\gamma(s, \Pi_{v_0}, \Psi_{v_0}) = \gamma(s, R_{v_0}, \Psi_{v_0})$ を得る．　■

次に，非 Galois 保型誘導について説明する．そのためにまず，保型表現と Weil 群の表現が対応することの定義をしておく．

定義 4.13

L を代数体とする．Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の保型表現とし，R を W_L の n 次元半単純連続表現とする．Π と R が対応するとは，L の任意の素点 v に対し $\mathrm{rec}_{L_v}(\Pi_v) = R_v$ が成り立つことをいう．

注意 4.14

Π に対応する R が存在するとき，L の任意の有限素点 v において $\mathrm{rec}_{L_v}(\Pi_v)$ のモノドロミー作用素は 0 であるから，Π_v は超尖点表現のラングランズ和で表される．

定理 4.15（Harris の非 Galois 保型誘導）

$L \subset L_1 \subset L_2$ を CM 体の有限次拡大の列とし，以下を仮定する：

- L_2/L は可解な Galois 拡大である．
- $n = [L_1 : L]$.

L の素点 v_0 で，L_2/L において惰性的であるものを一つ固定する．L_1, L_2 において v_0 の上にあるただ一つの素点を同じ記号 v_0 で表す．

χ を $\mathbb{A}_{L_1}^\times / L_1^\times$ の連続指標で以下の仮定を満たすものとする：

(a) $\chi^{-1} = \chi^c$.

(b) L_1 の任意の無限素点 v に対し，χ_v は $z \mapsto z^{p_v}\overline{z}^{-p_v}$ $(p_v \in \mathbb{Z})$ という形であり，$v \neq v'$ ならば $p_v \neq p_{v'}$ である．

(c) $(\chi \circ N_{L_2/L_1})_{v_0}$ の $\mathrm{Gal}(L_2/L)$ における安定化群は $\mathrm{Gal}(L_2/L_1)$ に一致する．

このとき，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の尖点的保型表現 $\Pi = \mathrm{AI}_{L_1/L}(\chi)$ で $\mathrm{Ind}_{W_{L_1}}^{W_L} \chi$ に対応するものが唯一存在する．

この定理は [Har98, Lemma 1.6], [HT01, Proposition VII.2.7], [Sch13b, Theorem 13.6] において扱われている．ここで述べた定式化は Scholze によるものである．

証明　$[L_2 : L]$ に関する帰納法で示す．$L \subset L_2$ の中間体 L_3 を，L_3/L が素数次巡回拡大となるようにとる．$L_3 \subset L_1$ ならば $\mathrm{AI}_{L_1/L}(\chi) = \mathrm{AI}_{L_3/L}(\mathrm{AI}_{L_1/L_3}(\chi))$ とすればよい（AI_{L_3/L_1} は注意 3.51 で説明した保型誘導）．Π が $\mathrm{Ind}_{W_{L_1}}^{W_L} \chi$ に対応することは定理 3.42 より従う．条件 (c) から $\mathrm{Ind}_{W_{L_{1,v_0}}}^{W_{L_{v_0}}} \chi_{v_0}$ は既約なので，$\mathrm{rec}_{L_{v_0}}(\Pi_{v_0}) = \mathrm{Ind}_{W_{L_{1,v_0}}}^{W_{L_{v_0}}} \chi_{v_0}$ より Π_{v_0} は超尖点表現であり，したがって Π は尖点的保型表現である．

次に $L_3 \not\subset L_1$ の場合を考える．$L_3 \subset L_1L_3 \subset L_2$ および L_1L_3 の Hecke 指標 $\chi' = \mathrm{BC}_{L_1L_3/L_1}(\chi) = \chi \circ N_{L_1L_3/L_1}$ に帰納法の仮定を適用することができる．$\Pi' = \mathrm{AI}_{L_1L_3/L_3}(\chi')$ とおく．Π' が $\mathrm{Ind}_{W_{L_1L_3}}^{W_{L_3}}(\chi') = \mathrm{Ind}_{W_{L_1L_3}}^{W_{L_3}}(\chi|_{W_{L_1L_3}}) = \mathrm{Ind}_{W_{L_1}}^{W_L}(\chi)|_{W_{L_3}}$ に対応することを用いると，以下が示せる：

(1) Π' は v_0 において超尖点的であり，したがって尖点的保型表現である．

(2) Π' は正則代数的であり，$\Pi'^\vee \cong \Pi'^c$ を満たす．

(3) $\tau \in \mathrm{Gal}(L_3/L) = \mathrm{Gal}(L_1L_3/L_1)$ に対し $\Pi' \cong (\Pi')^\tau$ である．

(1) と (3) および定理 3.40 iv) より，$\mathrm{BC}_{L_3/L}(\Pi) = \Pi'$ となる $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の尖点的保型表現 Π が存在する．帰納法の仮定と注意 4.14 より，任意の有限素点において Π' は超尖点表現のラングランズ和であるから，Π も同様の性質を満たすことが分かる（命題 3.36 と命題 3.38 i), ii) を用いる）．

(1) より Π_{v_0} は超尖点表現である．

$$\mathrm{rec}_{L_{v_0}}(\Pi_{v_0})|_{W_{L_{3,v_0}}} = \mathrm{rec}_{L_{3,v_0}}(\Pi'_{v_0}) = \mathrm{Ind}_{W_{L_1}}^{W_L}(\chi)_{v_0}|_{W_{L_{3,v_0}}}$$

および $\mathrm{Ind}_{W_{L_1}}^{W_L}(\chi)_{v_0}|_{W_{L_{3,v_0}}} = \mathrm{Ind}_{W_{L_1L_3}}^{W_{L_3}}(\chi')_{v_0}$ の既約性より，Π を $\mathrm{Gal}(L_3/L) \cong \mathrm{Gal}(L_{3,v_0}/L_{v_0})$ の指標で捻ることで，Π は $\mathrm{rec}_{L_{v_0}}(\Pi_{v_0}) = \mathrm{Ind}_{W_{L_1}}^{W_L}(\chi)_{v_0}$ を満たすようにできる．Π が $R = \mathrm{Ind}_{W_{L_1}}^{W_L}(\chi)$ に対応することを示したい．L の素点 v_1 を固定し，$\mathrm{rec}_{L_{v_1}}(\Pi_{v_1}) = R_{v_1}$ を証明しよう．$v_0, v_1 \nmid \ell$ を満たす素数 ℓ を一つとり固定する．上記の (2) より Π は正則代数的な保型表現であり，$\Pi^\vee \cong \Pi^c \otimes (\eta \circ \det)$ となるような $\mathrm{Gal}(L_3/L)$ の指標 η が存在することが分かる．このとき，$\xi \circ N_{L/L^+} = \eta$ となる $\mathbb{A}_L^\times/L^\times L_\infty^\times$ の指標 ξ が存在することが示せる（[HT01, p. 241–242] 参照）．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_L)$ の保型表現 $\Pi \otimes (\xi \circ \det)$ は $(\Pi \otimes (\xi \circ \det))^\vee \cong (\Pi \otimes (\xi \circ \det))^c$ を満たす．したがって，定理 4.5 を $\Pi \otimes (\xi \circ \det)$（および固定した素数 ℓ）に適用することができ，Γ_L の n 次元半単純 ℓ 進表現 $R_{\Pi \otimes (\xi \circ \det)}$ が得られる．$R_\Pi = R_{\Pi \otimes (\xi \circ \det)} \otimes \xi^{-1}$ とおくと，$v \nmid \ell$ となる L の任意の有限素点 v に対し $(R_\Pi)_v^{\mathrm{ss}} = \mathrm{rec}_{L_v}(\Pi_v)^{\mathrm{ss}}$ が成り立つ．

Γ_L の 2 つの ℓ 進表現 R_ℓ, R_Π を比較しよう．$v \nmid \ell$ となる L の有限素点 v およびその上にある L_3 の素点 w に対し，

$$\begin{aligned}(R_\Pi|_{\Gamma_{L_3}})_w^{\mathrm{ss}} &= (R_\Pi)_v^{\mathrm{ss}}|_{W_{L_{3,w}}} = \mathrm{rec}_{L_v}(\Pi_v)^{\mathrm{ss}}|_{W_{L_{3,w}}} = \mathrm{rec}_{L_{3,w}}(\Pi'_w)^{\mathrm{ss}} \\ &= \mathrm{Ind}_{W_{L_1}}^{W_L}(\chi)|_{W_{L_{3,w}}} = (R_\ell|_{\Gamma_{L_3}})_w\end{aligned}$$

が成り立つから，Chebotarev 密度定理と $(R_\ell|_{\Gamma_{L_3}})_{v_0}$ の既約性より，$R_\Pi|_{\Gamma_{L_3}} \cong R_\ell|_{\Gamma_{L_3}}$ が成り立つ．したがって，$\mathrm{Gal}(L_3/L)$ の指標 ζ が存在して $R_\Pi \cong R_\ell \otimes \zeta$ となる．$(R_\Pi)_{v_0}^{\mathrm{ss}} = \mathrm{rec}_{L_{v_0}}(\Pi_{v_0})^{\mathrm{ss}} = \mathrm{Ind}_{W_{L_1}}^{W_L}(\chi)_{v_0} = (R_\ell)_{v_0}$ と $(R_\ell)_{v_0}$ の既約性より，$\zeta_{v_0} = \mathbf{1}$ が分かる．よって $\mathrm{Gal}(L_3/L) \cong \mathrm{Gal}(L_{3,v_0}/L_{v_0})$ より $\zeta = \mathbf{1}$ となり，$R_\Pi \cong R_\ell$ が従う．特に $\mathrm{rec}_{L_{v_1}}(\Pi_{v_1})^{\mathrm{ss}} = (R_\ell)_{v_1}^{\mathrm{ss}} = R_{v_1}$ となる．既に述べたように Π_{v_1} は超尖点表現のラングランズ和であるから，$\mathrm{rec}_{L_{v_1}}(\Pi_{v_1})^{\mathrm{ss}} = \mathrm{rec}_{L_{v_1}}(\Pi_{v_1})$ が分かり，所望の等式 $\mathrm{rec}_{L_{v_1}}(\Pi_{v_1}) = R_{v_1}$ が従う． ∎

非 Galois 保型誘導を使うと，$\mathrm{rec}_F(\pi)$ が W_F の部分群の指標からの誘導表現である場合に π と $\mathrm{rec}_F(\pi)$ の γ 因子を比べることができる．

系 4.16

$\pi \in \mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し，次を仮定する：F の有限次拡大 E および $E^\times$ の位

数有限の指標 χ が存在して，$\mathrm{rec}_F(\pi) = \mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F} \chi$ となる．このとき，$\gamma(s,\pi,\psi) = \gamma(s, \mathrm{rec}_F(\pi), \psi)$ が成り立つ．ここで，ψ は F の非自明指標である．

証明　E/F の Galois 閉包を E' とすると，E'/F は可解拡大である（p 進体の任意の Galois 拡大は可解である）．よって，定理 4.15 のような $L \subset L_1 \subset L_2$ および L の素点 v が存在して，$L_v \subset L_1 \otimes_L L_v \subset L_2 \otimes_L L_v$ が $F \subset E \subset E'$ と同型になる．L は v が L^+ 上分裂するように選んでおく．また，定理 4.15 のような v_0 で，L^+ 上分裂するものを一つ選ぶ．このとき，$\mathbb{A}_{L_1}^\times / L_1^\times$ の連続指標 Ξ および $\mathbb{A}_L^\times / L^\times$ の連続指標 η で次を満たすものをとることができる（[HT01, Lemma VII.2.10] の証明を参照）：

- Ξ は定理 4.15 における条件 (a), (b), (c) を満たす．
- $\chi^{-1}\Xi_v$ は $L_v^\times$ の不分岐指標である．
- $\chi = \Xi_v(\eta_v \circ N_{L_1 \otimes_L L_v / L_v})$.

Ψ を $\mathbb{A}_L/L$ の非自明指標とする．$\psi = \Psi_v$ と仮定してよい．この設定で定理 4.15 を適用する．$\Pi = \mathrm{AI}_{L_1/L}(\Xi) \otimes (\eta \circ \det)$，$R = (\mathrm{Ind}_{W_{L_1}}^{W_L} \Xi) \otimes \eta$ とおく．L の任意の素点 w に対し $\mathrm{rec}_{L_w}(\Pi_w) = R_w$ であるから，定理 4.12 より $\gamma(s, \Pi_v, \Psi_v) = \gamma(s, R_v, \Psi_v)$ である．$\mathrm{rec}_F(\pi) = \mathrm{Ind}_{W_E}^{W_F} \chi = R_v = \mathrm{rec}_F(\Pi_v)$ より $\pi = \Pi_v$ であるから，$\gamma(s,\pi,\psi) = \gamma(s, \mathrm{rec}_F(\pi), \psi)$ となり主張が従う．■

これで定理 4.9 を証明することができる．

定理 4.9 の証明　注意 4.10 より，π が超尖点表現である場合に

$$\gamma(s,\pi,\psi) = \gamma\bigl(s, \mathrm{rec}_F(\pi), \psi\bigr)$$

を示せば十分である．$\sigma = \mathrm{rec}_F(\pi)$ とおく．σ は W_F の既約スムーズ表現であるから，π を不分岐指標で捻ることにより，W_F の σ への作用は有限商を経由すると仮定してよい．すなわち，F のある有限次 Galois 拡大 F' が存在して $\sigma|_{W_{F'}}$ は自明になるとしてよい．Brauer 誘導定理を有限群 $W_F/W_{F'} = \mathrm{Gal}(F'/F)$ に適用することで，以下のことが分かる：

> F'/F の中間体 E_i $(1 \le i \le k)$，$E_i^\times$ の位数有限の指標 χ_i，整数 $m_i \neq 0$ が存在して，$W_F/W_{F'}$ の有限次元表現の Grothendieck 群における等式 $[\sigma] = \sum_{i=1}^k m_i [\mathrm{Ind}_{W_{E_i}}^{W_F} \chi_i]$ が成り立つ．

並べ換えにより，$1 \le i \le j$ で $m_i < 0$，$j < i \le k$ で $m_i > 0$ としてよい．$\pi_i \in \mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_{[E_i:F]}(F))$ を $\mathrm{rec}_F(\pi_i) = \mathrm{Ind}_{W_{E_i}}^{W_F} \chi_i$ を満たす元とする．このとき，

$$\sigma \oplus \bigoplus_{1 \le i \le j} (\mathrm{Ind}_{W_{E_i}}^{W_F} \chi_i)^{\oplus(-m_i)} \cong \bigoplus_{j < i \le k} (\mathrm{Ind}_{W_{E_i}}^{W_F} \chi_i)^{\oplus m_i}$$

であるから，rec_F の全単射性より

$$\pi \boxplus \pi_1^{\boxplus(-m_1)} \boxplus \cdots \boxplus \pi_j^{\boxplus(-m_j)} \cong \pi_{j+1}^{\boxplus m_{j+1}} \boxplus \cdots \boxplus \pi_k^{\boxplus m_k}$$

となる ($\pi_i^{\boxplus m_i} = \underbrace{\pi_i \boxplus \cdots \boxplus \pi_i}_{m_i\text{ 個}}$)．これより，

$$\gamma(s,\pi,\psi) = \prod_{i=1}^{k} \gamma(s,\pi_i,\psi)^{m_i}, \quad \gamma(s,\sigma,\psi) = \prod_{i=1}^{k} \gamma(s,\mathrm{Ind}_{W_{E_i}}^{W_F} \chi_i,\psi)^{m_i}$$

が得られる．系 4.16 より $\gamma(s,\pi_i,\psi) = \gamma(s,\mathrm{Ind}_{W_{E_i}}^{W_F} \chi_i,\psi)$ であるから，$\gamma(s,\pi,\psi) = \gamma(s,\sigma,\psi)$ となり主張が証明できた． ∎

注意 4.17

上記の証明においては，$\pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対して π と $\mathrm{rec}_F(\pi)$ の ε 因子を比較する際に，n より大きなサイズの GL に対する系 4.16 も用いている．例えば $n = p = 2$ の場合，W_F の 2 次元既約表現で，指数 2 の開部分群の指標を誘導することによっては構成できないものが存在することが知られており，このような表現を誘導表現の符号付き和で書くためには 3 次元以上の誘導表現が必要になる．

このような議論は，全ての $n \geq 2$ に対して局所ラングランズ対応を同時に証明しているから可能になるものである．

4.2 Local geometry — 非可換 Lubin-Tate 理論

本節では，rec_F の構成および定理 4.4 の証明について解説する．前節でも述べたように，rec_F の構成には，形式 $\mathcal{O}_F$ 加群の普遍変形空間（Lubin-Tate 空間）を用いる．ここでは，より現代的な，p 可除群を用いた定式化を紹介する．まず，p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群の定義から始めよう．

定義 4.18

S を $\mathcal{O}_F$ 上のスキームとし，$\varpi \in \mathcal{O}_F$ が S 上局所的に冪零であるとする．

i) S 上の **p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群**とは，S 上の p 可除群 X と準同型 $\iota\colon \mathcal{O}_F \longrightarrow \mathrm{End}(X)$ の組であって次の条件を満たすもののこととする：

 任意の $a \in \mathcal{O}_F$ に対し，$\iota(a)$ が $\mathrm{Lie}(X)$ に誘導する自己準同型は，構造射 $\mathcal{O}_F \longrightarrow \mathcal{O}_S$ によって $\mathcal{O}_S$ 加群 $\mathrm{Lie}(X)$ を $\mathcal{O}_F$ 加群とみなしたときの $a \in \mathcal{O}_F$ の作用と一致する．

しばしば ι を省略し，p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群 (X,ι) のことを X と書く．このときは，$\iota(a)$ のことを $[a]_X$ あるいは単に $[a]$ と書く．

ii) p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群の間の $\mathcal{O}_F$ 準同型とは，p 可除群としての準同型で $\mathcal{O}_F$ の作用

と可換なものとする．$\mathcal{O}_F$ 準同型 $f\colon X \longrightarrow X'$ が **$\mathcal{O}_F$ 同種写像**であるとは，f が p 可除群の間の同種写像を与えることとする．すなわち，f は（X, X' を S 上の fppf 層とみなしたとき）全射かつ $\mathrm{Ker}\, f$ が S 上の有限局所自由群スキームとなることとする．$\mathrm{Ker}\, f$ の階数 $\deg \mathrm{Ker}\, f$（これは S 上の局所定数関数である）は $q = \#\kappa$ の冪となることが知られている．$\log_q(\deg \mathrm{Ker}\, f)$ を f の**高さ**と呼び，$\mathrm{ht}\, f$ と書く．

iii) S 上の p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群 X に対し，$[\varpi]_X$ の高さが h ならば，X は高さ h の p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群であるという．また，局所自由 $\mathcal{O}_S$ 加群 $\mathrm{Lie}(X)$ の階数が d であるとき，X は d 次元であるという．

iv) X, X' を S 上の p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群とする．X から X' への **$\mathcal{O}_F$ 準同種写像**とは，S 上の層 $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_F}(X, X') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の切断 f であって次を満たすもののこととする：

任意の $x \in S$ に対し，その開近傍 U および整数 $m \geq 0$ が存在して，$f|_U \circ [\varpi^m]_X$ は $X|_U$ から $X'|_U$ への $\mathcal{O}_F$ 同種写像から誘導される．

$\mathcal{O}_F$ 準同種写像 $f\colon X \longrightarrow X'$ に対しても $\mathrm{ht}\, f$ を定義することができる（$f \circ [\varpi^m]_X$ が同種写像から来る場合には $\mathrm{ht}\, f = \mathrm{ht}(f \circ [\varpi^m]_X) - \mathrm{ht}([\varpi^m]_X)$ とおけばよい）．

$\mathcal{O}_F$ 準同種写像とは，標語的には「$\mathcal{O}_F$ 同種写像 f を用いて $\varpi^{-m} f$ と書ける」写像のことである．

注意 4.19

i) X, X' を S 上の p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群とするとき，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(X, X')$ はねじれ元を持たない．特に，$\mathcal{O}_F$ 同種写像を $\mathcal{O}_F$ 準同種写像とみなす写像は単射である．このため，以下では $\mathcal{O}_F$ 準同種写像が「$\mathcal{O}_F$ 同種写像である」などという言い方をする．

ii) $f\colon X \longrightarrow X'$ を $\mathcal{O}_F$ 準同種写像とするとき，$\mathcal{O}_F$ 準同種写像 $g\colon X' \longrightarrow X$ で $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_{X'}$ を満たすものが存在する．特に，X から X への $\mathcal{O}_F$ 準同種写像全体は群をなす．これを $\mathbf{QIsog}(X)$ と書く．

Lubin-Tate 空間の構成の出発点となるのが次の命題である．

命題 4.20（Drinfeld [Dri74, Proposition 1.7]）

$n \geq 1$ を整数とするとき，$\overline{\kappa}$ 上の 1 次元連結 p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群 $\mathbb{X}$ で高さが n のものが同型を除いて一意的に存在する（$\overline{\kappa}$ 上の p 可除群 X が連結であるとは，スキーム $X[p]$ が連結であることをいうのであった）．$D = \mathrm{End}_{\mathcal{O}_F}(\mathbb{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とおくと，D は F 上の中心的斜体であり，その Hasse 不変量は $1/n$ である．さらに，$\mathrm{End}_{\mathcal{O}_F}(\mathbb{X})$ は D の整数環 $\mathcal{O}_D$ に一致する．$\mathbf{QIsog}(\mathbb{X}) = D^\times$ であり，$h \in \mathbf{QIsog}(\mathbb{X})$ に対し

て $\mathrm{ht}\, h = v_F(\mathrm{Nrd}(h))$ が成り立つ（Nrd は D の被約ノルムを表す）．

この命題は，Dieudonné 理論を使うと比較的容易に証明できる．

例 4.21

i) $n = 1$ の場合，$\mathbb{X}$ はいわゆる Lubin-Tate 群（を p 可除群とみなしたもの）に他ならない．

ii) $n = 2$, $F = \mathbb{Q}_p$ の場合，E を $\overline{\kappa}$ 上の超特異楕円曲線とすると $\mathbb{X} = E[p^\infty]$ である．

以下では $n \geq 1$ を固定し，対応する $\mathbb{X}$ をとる．$\mathbb{X}$ の $\mathcal{O}_F$ 準同種写像による変形のモジュライ空間を考えよう．F の最大不分岐拡大の完備化を $\breve{F}$ と書く．$\mathcal{O}_{\breve{F}}$ 上のスキームで，$\varpi \in \mathcal{O}_F$ がその上で局所的に冪零であるもの全体のなす圏を $\mathbf{Nilp}$ で表す．$S \in \mathbf{Nilp}$ に対し，$\overline{S} = S \otimes_{\mathcal{O}_{\breve{F}}} \mathcal{O}_{\breve{F}}/\varpi\mathcal{O}_{\breve{F}} = S \otimes_{\mathcal{O}_{\breve{F}}} \overline{\kappa}$ とおく．

定義 4.22

反変関手 $\mathcal{M}\colon \mathbf{Nilp} \longrightarrow \mathbf{Set}$（$\mathbf{Set}$ は集合の圏）を次のように定める．$S \in \mathbf{Nilp}$ に対し，$\mathcal{M}(S)$ は以下のような組 (X, ρ) の同型類の集合とする：

- X は S 上の p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群．
- $\rho\colon \mathbb{X} \times_{\operatorname{Spec} \overline{\kappa}} \overline{S} \longrightarrow X \times_S \overline{S}$ は $\mathcal{O}_F$ 準同種写像．

また，整数 δ に対し，$\mathcal{M}$ の部分関手 $\mathcal{M}^{(\delta)}$ を上記のような (X, ρ) で $\mathrm{ht}\, \rho = \delta$ となるものの同型類を分類するものとして定める．

$D^\times = \mathbf{QIsog}(\mathbb{X})$ は $\mathcal{M}$ に以下のように右から作用する：$h \in \mathbf{QIsog}(\mathbb{X})$ は $(X, \rho) \in \mathcal{M}(S)$ を $(X, \rho \circ h)$ にうつす．これによって $\mathcal{M}^{(\delta)}$ は $\mathcal{M}^{(\delta + v_F(\mathrm{Nrd}(h)))}$ にうつされる．

定理 4.23（Lubin-Tate [LT66], Drinfeld [Dri74, Proposition 4.2]）

$\mathcal{M}$ および $\mathcal{M}^{(\delta)}$ は $\mathcal{O}_{\breve{F}}$ 上の形式スキームで表現される．各 $\delta \in \mathbb{Z}$ に対し非標準的な同型 $\mathcal{M}^{(\delta)} \cong \operatorname{Spf} \mathcal{O}_{\breve{F}}[[T_1, \ldots, T_{n-1}]]$ がある．$\mathcal{M} = \coprod_{\delta \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}^{(\delta)}$ である．

$\mathcal{M}$ を **Lubin-Tate 空間**と呼ぶ．

注意 4.24

$\mathcal{M}^{(0)}$ は p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群の普遍変形空間に一致する．すなわち，Artin 局所 $\mathcal{O}_{\breve{F}}$ 代数 $(A, \mathfrak{m})$ で自然な環準同型 $\overline{\kappa} \longrightarrow A/\mathfrak{m}$ が同型になるものに対し，形式スキームの射 $\operatorname{Spec} A \longrightarrow \mathcal{M}^{(0)}$ は次のような組 (X, ξ) の同型類と一対一に対応する：

- X は $\operatorname{Spec} A$ 上の p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群．
- $\xi\colon \mathbb{X} \xrightarrow{\cong} X \otimes_A \overline{\kappa}$ は p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群の同型．

証明　$\mathcal{M}^{(0)}$ の定義より，$\mathcal{M}^{(0)}(A)$ の元は定義 4.22 のような組 (X,ρ) で $\operatorname{ht}\rho=0$ となるものと対応する．$\rho\colon \mathbb{X}\otimes_{\overline{\kappa}} A/\varpi A \longrightarrow X\otimes_A A/\varpi A$ を $A/\mathfrak{m}=\overline{\kappa}$ に底変換することで，高さ 0 の $\mathcal{O}_F$ 準同種写像 $\rho_{\mathfrak{m}}\colon \mathbb{X}\longrightarrow X\otimes_A\overline{\kappa}$ が得られる．$\rho_{\mathfrak{m}}$ が同型であることを示そう．命題 4.20 より $X\otimes_A\overline{\kappa}\cong\mathbb{X}$ である．この同型を一つ固定すると，$\rho_{\mathfrak{m}}$ は $\operatorname{End}_{\mathcal{O}_F}(\mathbb{X})=\mathcal{O}_D$ の元とみなすことができる．$v_F(\operatorname{Nrd}(\rho_{\mathfrak{m}}))=\operatorname{ht}\rho_{\mathfrak{m}}=0$ であるから，$\rho_{\mathfrak{m}}\in\mathcal{O}_D^\times$ となることが分かる．すなわち，$\rho_{\mathfrak{m}}$ は同型である．

逆に，X および同型 $\xi\colon\mathbb{X}\xrightarrow{\cong}X\otimes_A\overline{\kappa}$ が与えられたとする．このとき，準同種写像の剛性 ([Dri76, Appendix, Proof of Lemma 3], [RZ96, p. 52]) より，$\rho_{\mathfrak{m}}=\xi$ となる $\mathcal{O}_F$ 準同種写像 $\rho\colon\mathbb{X}\otimes_{\overline{\kappa}}A/\varpi A\longrightarrow X\otimes_A A/\varpi A$ が一意的に定まる．明らかに $\operatorname{ht}\rho=0$ であるから，(X,ρ) は $\mathcal{M}^{(0)}(A)$ の元である．■

$\mathcal{M}$ は $D^\times$ の作用の他に **Weil 降下データ**という付加構造を持つ．これは $\mathcal{M}$ が $\mathcal{O}_F$ 上の形式スキームから来るという条件を少し緩めたものである．

命題 4.25

自然な同型 $\operatorname{Gal}(F^{\mathrm{ur}}/F)\xrightarrow{\cong}\Gamma_\kappa$ によって $\operatorname{Frob}_q^{-1}$（$\kappa$ 上の q 乗写像）に対応する $\operatorname{Gal}(F^{\mathrm{ur}}/F)$ の元を τ と書く．τ は $\breve{F}$ の自己 F 同型に延長される．また，$\mathcal{M}$ の $\tau\colon\operatorname{Spf}\mathcal{O}_{\breve{F}}\longrightarrow\operatorname{Spf}\mathcal{O}_{\breve{F}}$ による底変換を $\mathcal{M}^\tau$ と書く．

このとき，$\operatorname{Spf}\mathcal{O}_{\breve{F}}$ 上の同型 $\mathcal{M}\xrightarrow{\cong}\mathcal{M}^\tau$ が自然に定まる．この同型によって $\mathcal{M}^{(\delta)}$ は $(\mathcal{M}^{(\delta-1)})^\tau$ にうつる．

証明　$S\in\mathbf{Nilp}$ に対し，S を構造射 $S\longrightarrow\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\breve{F}}\xrightarrow{\tau}\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{\breve{F}}$ によって $\mathcal{O}_{\breve{F}}$ 上のスキームと見たものを $S_{[\tau]}$ と書く．$S_{[\tau]}\in\mathbf{Nilp}$ であり，$\mathcal{M}^\tau(S)=\mathcal{M}(S_{[\tau]})$ となる．よって $\mathcal{M}(S)\xrightarrow{\cong}\mathcal{M}(S_{[\tau]})$ を定めればよい．

$(X,\rho)\in\mathcal{M}(S)$ をとる．X から自然に定まる $S_{[\tau]}$ 上の p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群を X_τ と書く．また，$\overline{\tau}=\operatorname{Frob}_v^{-1}$ が誘導する射 $\operatorname{Spec}\overline{\kappa}\longrightarrow\operatorname{Spec}\overline{\kappa}$ によって $\mathbb{X}$ を引き戻したものを $\overline{\tau}^*\mathbb{X}$ と書く．このとき $\mathbb{X}\times_{\operatorname{Spec}\overline{\kappa}}\overline{S_{[\tau]}}=\overline{\tau}^*\mathbb{X}\times_{\operatorname{Spec}\overline{\kappa}}\overline{S}$ であるから，

$$\mathbb{X}\times_{\operatorname{Spec}\overline{\kappa}}\overline{S_{[\tau]}}=\overline{\tau}^*\mathbb{X}\times_{\operatorname{Spec}\overline{\kappa}}\overline{S}\xrightarrow{\operatorname{Frob}_{\mathbb{X}}^{-1}\times\mathrm{id}}\mathbb{X}\times_{\operatorname{Spec}\overline{\kappa}}\overline{S}\xrightarrow{\rho}X\times_S\overline{S}=X_\tau\times_{S_{[\tau]}}\overline{S_{[\tau]}}$$

を合成することで $\mathcal{O}_F$ 準同種写像 ρ_τ を得る（$\operatorname{Frob}_{\mathbb{X}}\colon\mathbb{X}\longrightarrow\overline{\tau}^*\mathbb{X}$ は $\mathbb{X}$ の相対 Frobenius 射）．$(X,\rho)\mapsto(X_\tau,\rho_\tau)$ によって同型 $\mathcal{M}(S)\xrightarrow{\cong}\mathcal{M}(S_{[\tau]})$ が定まる．また，$\operatorname{Frob}_{\mathbb{X}}$ の高さは 1 なので，$\mathcal{M}^{(\delta)}(S)$ の元は $\mathcal{M}^{(\delta-1)}(S_{[\tau]})$ の元にうつる．■

$\mathcal{M}$ のリジッド一般ファイバーを M と書く．定理 4.23 より，これは $\breve{F}$ 上の $n-1$ 次元多重円盤の可算無限個の直和である．$\mathcal{M}$ 上の普遍 p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群 $\mathcal{X}^{\mathrm{univ}}$ が M 上に誘導する p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群を X^{univ} と書く．M は標数 0 の体 $\breve{F}$ 上のリジッド空

間であるから，X^{univ} はエタールな p 可除群である．モジュラー曲線の場合のように，X^{univ} のレベル構造を考えて M の被覆を定義しよう．

定義 4.26

$m \geq 0$ を整数とし，$\varpi^m \colon X^{\mathrm{univ}} \longrightarrow X^{\mathrm{univ}}$ の核を $X^{\mathrm{univ}}[\varpi^m]$ と書く．

$\mathcal{O}_F$ の作用と可換な有限エタール群スキームの同型 $(\mathcal{O}_F/\varpi^m)^n \xrightarrow{\cong} X^{\mathrm{univ}}[\varpi^m]$ を分類する M 上のリジッド空間を M_m とする．すなわち，Y を M 上のリジッド空間とするとき，$\mathrm{Hom}_M(Y, M_m)$ は同型 $(\mathcal{O}_F/\varpi^m)^n \xrightarrow{\cong} X^{\mathrm{univ}}[\varpi^m] \times_M Y$ 全体と自然に同一視できる．

M_m は M の有限エタール Galois 被覆であり，その Galois 群は $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F/\varpi^m)$ となる．$\{M_m\}_{m\geq 0}$ は M 上のリジッド空間の射影系をなす．これを **Lubin-Tate 塔**と呼ぶ．

$\delta \in \mathbb{Z}$ に対し，$\mathcal{M}^{(\delta)}$ のリジッド一般ファイバー $M^{(\delta)}$ の M_m における逆像を $M_m^{(\delta)}$ と書く．

例 4.27

$n = 1$ とする．$\breve{F}$ のレベル m の Lubin-Tate 拡大（$\breve{F}$ に Lubin-Tate 群の ϖ^m 等分点を付け加えて得られる拡大）を $\breve{F}_m$ と書くと，$M_m^{(\delta)} \cong \mathrm{Spa}(\breve{F}_m, \mathcal{O}_{\breve{F}_m})$ が成り立つ．

Lubin-Tate 塔への群作用について考えよう．$D^\times$ の M への作用および Weil 降下データは自然に Lubin-Tate 塔 $\{M_m\}$ へと持ち上がることが簡単に確認できる．各 m に対して M_m には $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F/\varpi^m)$ が作用するので，Lubin-Tate 塔 $\{M_m\}$ には $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ が作用するが，実は $\{M_m\}$ を pro-object ([SGA4, Exposé I, §8]) とみなすとこの作用は $\mathrm{GL}_n(F)$ へと延長することができる（モジュラー曲線に対する Hecke 作用素の類似）．より正確には，以下のようになる：

命題 4.28

整数 $m \geq 0$ に対し $K_m = \mathrm{Ker}(\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \to \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F/\varpi^m))$ とおく．

$g \in \mathrm{GL}_n(F)$ および整数 $m, m' \geq 0$ が $g^{-1}K_m g \subset K_{m'}$ を満たすならば，自然な射 $[g] \colon M_m \longrightarrow M_{m'}$ が定まる．$\delta \in \mathbb{Z}$ に対し $[g]$ は $M_m^{(\delta)}$ を $M_{m'}^{(\delta - v_F(\det g))}$ にうつす．

$[g]$ は m, m' の変更と両立し，$g, g' \in \mathrm{GL}_n(F)$ に対し $[g'] \circ [g] = [gg']$ が成り立つ．したがって，$\mathrm{GL}_n(F)$ は pro-object $\{M_m\}$ への右作用を定める．

略証　$\breve{F}$ の代数閉包の完備化を $\mathbb{C}_p$ とし，$[g] \colon M_m(\mathbb{C}_p) \longrightarrow M_{m'}(\mathbb{C}_p)$ がどのような写像になるかを説明する．$M_\infty(\mathbb{C}_p) = \varprojlim_m M_m(\mathbb{C}_p)$ とおく．まず，$\mathrm{GL}_n(F)$ の $M_\infty(\mathbb{C}_p)$ への右作用を定める．

$M_\infty(\mathbb{C}_p)$ は以下のような 3 つ組 (X, ρ, η) の同型類のなす集合と同一視できる：

- X は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ 上の p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群.
- $\rho\colon \mathbb{X}\otimes_{\overline{\kappa}}\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\varpi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}\longrightarrow X\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\varpi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ は $\mathcal{O}_F$ 準同種写像.
- $\eta\colon \mathcal{O}_F^n\xrightarrow{\cong}T_pX_{\mathbb{C}_p}$ は $\mathcal{O}_F$ 加群の同型（$X_{\mathbb{C}_p}=X\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}\mathbb{C}_p$ とおいた）.

$\mathrm{GL}_n(F)^+=\{g\in\mathrm{GL}_n(F)\mid \mathcal{O}_F^n\subset g\mathcal{O}_F^n\}$ とおく．最初に $g\in\mathrm{GL}_n(F)^+$ の作用を考える．η は $F^n/\mathcal{O}_F^n\xrightarrow{\cong}X_{\mathbb{C}_p}[\varpi^\infty]$ と同一視できることに注意する．この同型による $g\mathcal{O}_F^n/\mathcal{O}_F^n\subset F^n/\mathcal{O}_F^n$ の像を C と書くと，C は $X_{\mathbb{C}_p}$ の有限部分群スキームとなる．これの X における閉包を $\overline{C}$ と書き，$X'=X/\overline{C}$ とおく．$\overline{C}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ 上有限平坦であるから，X' は p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群となる．ρ と $X\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\varpi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}\longrightarrow X'\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/\varpi\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ の合成を ρ' とおく．

以下の図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & g\mathcal{O}_F^n/\mathcal{O}_F^n \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & F^n/\mathcal{O}_F^n \arrow[r, "g^{-1}"] \arrow[d, "\cong"'] & F^n/\mathcal{O}_F^n \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] & X_{\mathbb{C}_p}[\varpi^\infty] \arrow[r] & X'_{\mathbb{C}_p}[\varpi^\infty] \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

横列が完全系列であることから，破線の同型が誘導される．これに対応する同型 $\mathcal{O}_F^n\xrightarrow{\cong}T_pX'_{\mathbb{C}_p}$ を η' とおく．以上で $[g](X,\rho,\eta)=(X',\rho',\eta')\in M_\infty(\mathbb{C}_p)$ が定まった．これにより半群 $\mathrm{GL}_n(F)^+$ の $M_\infty(\mathbb{C}_p)$ への右作用が得られる．このことは $\eta_{\mathbb{Q}}\colon F^n\xrightarrow{\cong}V_pX_{\mathbb{C}_p}$[注 21] と $\eta'_{\mathbb{Q}}\colon F^n\xrightarrow{\cong}V_pX'_{\mathbb{C}_p}=V_pX_{\mathbb{C}_p}$ に対し $\eta'_{\mathbb{Q}}=\eta_{\mathbb{Q}}\circ g$ が成り立つことに注目すると納得できるだろう．また，$g\in\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ のときは $C=0$ より $X=X'$ となり，$\eta'=\eta\circ g$ となる．よって，上で定めた作用は $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ の射影系 $\{M_m\}$ への作用から誘導されるものの拡張になっていることも分かる．

次に，$\varpi\in\mathrm{GL}_n(F)\setminus\mathrm{GL}_n(F)^+$ の $M_\infty(\mathbb{C}_p)$ への作用を定める．$\varpi^{-1}\in\mathrm{GL}_n(F)^+$ であるから，ϖ^{-1} の作用が同型であることを示せば十分である．この場合，$C=X_{\mathbb{C}_p}[\varpi]$ であるから，$X'=X/X[\varpi]\xrightarrow[\cong]{[\varpi]}X$ である．この同型により $(X',\rho',\eta')\cong(X,\rho\circ\varpi,\eta)$ となるので，$\varpi^{-1}\in\mathrm{GL}_n(F)^+$ の $M_\infty(\mathbb{C}_p)$ への作用は $\varpi\in D^\times$ の作用と一致する．特に $\varpi^{-1}\in\mathrm{GL}_n(F)^+$ は同型で作用する．

$\mathrm{GL}_n(F)$ は $\mathrm{GL}_n(F)^+$ と ϖ によって生成されるので，以上により $\mathrm{GL}_n(F)$ の $M_\infty(\mathbb{C}_p)$ への作用が定まる．

$\delta\in\mathbb{Z}$ に対し，$M^{(\delta)}(\mathbb{C}_p)$ の $M_\infty(\mathbb{C}_p)$ における逆像を $M_\infty^{(\delta)}(\mathbb{C}_p)$ と書く．$(X,\rho,\eta)\in M_\infty^{(\delta)}(\mathbb{C}_p)$ および $g\in\mathrm{GL}_n(F)$ に対し，$[g](X,\rho,\eta)\in M_\infty^{(\delta-v_F(\det g))}(\mathbb{C}_p)$ となることを示そう．$g\in\mathrm{GL}_n(F)^+$ としてよい．上と同じ記号を用いて $[g](X,\rho,\eta)=(X',\rho',\eta')$ と書くと，$\mathrm{ht}\,\rho'=\mathrm{ht}\,\rho+\log_q\deg C=\delta-v_F(\det g)$ となるのでよい．

最後に，$g\in\mathrm{GL}_n(F)$ および整数 $m,m'\geq 0$ が $g^{-1}K_mg\subset K_{m'}$ を満たすとして，有限レベルの射 $[g]\colon M_m(\mathbb{C}_p)\longrightarrow M_{m'}(\mathbb{C}_p)$ を構成する．$M_m(\mathbb{C}_p)=M_\infty(\mathbb{C}_p)/K_m$ な

[注 21] $V_pX_{\mathbb{C}_p}=T_pX_{\mathbb{C}_p}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$ は有理 Tate 加群を表す.

ので，$x, x' \in M_\infty(\mathbb{C}_p)$ が同じ K_m 軌道に属するとき $[g](x)$ と $[g](x')$ が同じ $K_{m'}$ 軌道に属することを示せばよい．$x' = [k](x)$ $(k \in K_m)$ とおくと $[g](x') = [g]([k](x)) = [kg](x) = [g^{-1}kg]([g](x))$ となるので，$g^{-1}kg \in K_{m'}$ と合わせて主張が得られる．また，無限レベルの結果から，$[g]$ は $M_m^{(\delta)}(\mathbb{C}_p)$ の元を $M_{m'}^{(\delta - v_F(\det g))}(\mathbb{C}_p)$ にうつすことも分かる． ∎

注意 4.29

i) 上の説明における ϖ^{-1} の作用の部分と同様にして，$a \in F^\times \subset \mathrm{GL}_n(F)$ の $\{M_m\}$ への作用は $a^{-1} \in F^\times \subset D^\times$ の作用と一致することが証明できる．

ii) 上の説明においては，まず $M_\infty(\mathbb{C}_p)$ を考え，その商として $M_m(\mathbb{C}_p)$ に関する主張を導いた．このように，「無限レベルの Lubin-Tate 空間」が有限レベルの場合よりも扱いやすいということがしばしばある（上述のように Hecke 作用が群作用になるという事情のほか，p 可除群の p 進 Hodge 理論が使いやすくなるという理由などもある）．その一方で，射影極限 $\varprojlim_m M_m$ は非常に大きな空間であり，もはやリジッド空間にはならない．このような空間を扱うのに適した枠組みが，Scholze によって導入されたパーフェクトイド空間である．パーフェクトイド空間の理論そのものについては [Sch12], [Sch13d] を参照．また，Lubin-Tate 空間やその一般化である Rapoport-Zink 空間が無限レベルにおいてパーフェクトイド空間になることは [SW13] を参照．なお，パーフェクトイド空間の理論は定理 3.14 の Scholze による証明にも用いられる．

iii) M_m よりも一般に，$\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ のコンパクト開部分群 K に対し，レベル K の Lubin-Tate 空間 M_K を定義することができる．これは Tate 加群 T_pX^{univ} の「K を法とした自明化[注 22]」を分類する M の有限エタール被覆である．$K = K_m$ のときは M_{K_m} は M_m と一致する．また，$M_K(\mathbb{C}_p) = M_\infty(\mathbb{C}_p)/K$ である．
$g \in \mathrm{GL}_n(F)$ が $g^{-1}Kg \subset \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ を満たすとき，同型 $[g]\colon M_K \xrightarrow{\cong} M_{g^{-1}Kg}$ を自然に定めることができる．命題 4.28 における $[g]$ は，

$$M_{K_m} \xrightarrow[\cong]{[g]} M_{g^{-1}K_m g} \xrightarrow{(*)} M_{K_{m'}}$$

を合成したものと解釈できる（$(*)$ はレベルを下げる自然な射）．

前小節のステップ 1 で出てきた「Lubin-Tate 塔 $\{M_m\}$ の ℓ 進エタールコホモロジー」とは以下で定めるものである：

定義 4.30
整数 i に対し，$H^i_{\mathrm{LT}} = \varinjlim_m H^i_c(M_m \otimes_{\breve{F}} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ と定める．

注 22 このような自明化（K レベル構造）を定式化するには，例えば [Kot92b, §5] のように基本群を用いる方法がある．

H^i_{LT} には3つの群 $\mathrm{GL}_n(F)$, $D^\times$, W_F が作用する：

命題 4.31

H^i_{LT} は $\mathrm{GL}_n(F)\times D^\times\times W_F$ の表現となる．$\mathrm{GL}_n(F)\times D^\times$ の作用はスムーズであり，W_F の作用は連続である．

証明　$\mathrm{GL}_n(F)$, $D^\times$ の $\{M_m\}$ への作用から，$\mathrm{GL}_n(F)\times D^\times$ の H^i_{LT} への作用が自然に誘導される．$K_m\subset \mathrm{GL}_n(F)$ が $H^i_c(M_m\otimes_{\breve{F}}\mathbb{C}_p,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ に自明に作用することから，$\mathrm{GL}_n(F)$ の作用はスムーズであることが分かる．$D^\times$ の作用がスムーズになることはもっと非自明であり，例えば [FGL08, Théorème IV.9.26] から従う．

H^i_{LT} には $\breve{F}$ の絶対 Galois 群，すなわち F の惰性群 I_F が連続に作用する．この作用が W_F に延長できることを示そう．$m\geq 0$ を固定し，$H^i_c(M_m\otimes_{\breve{F}}\mathbb{C}_p,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ に W_F の作用を定める．M_m には Weil 降下データが定まっていたので，adic 空間の同型 $\alpha_m\colon M_m\xrightarrow{\cong}M_m$ で以下の図式が可換になるものが存在する：

$$\begin{array}{ccc} M_m & \xrightarrow[\cong]{\alpha_m} & M_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spa}(\breve{F},\mathcal{O}_{\breve{F}}) & \xrightarrow[\cong]{\tau} & \mathrm{Spa}(\breve{F},\mathcal{O}_{\breve{F}}). \end{array}$$

$\sigma\in W_F$ をとる．2つの可換図式

$$\begin{array}{ccc} M_m & \xrightarrow{\alpha_m^{-d(\sigma)}} & M_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spa}(\breve{F},\mathcal{O}_{\breve{F}}) & \xrightarrow{\tau^{-d(\sigma)}} & \mathrm{Spa}(\breve{F},\mathcal{O}_{\breve{F}}), \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Spa}(\mathbb{C}_p,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Spa}(\mathbb{C}_p,\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spa}(\breve{F},\mathcal{O}_{\breve{F}}) & \xrightarrow{\tau^{-d(\sigma)}} & \mathrm{Spa}(\breve{F},\mathcal{O}_{\breve{F}}) \end{array}$$

より，adic 空間の同型 $M_m\otimes_{\breve{F}}\mathbb{C}_p\xrightarrow{\cong}M_m\otimes_{\breve{F}}\mathbb{C}_p$ が引き起こされる．これが誘導する $H^i_c(M_m\otimes_{\breve{F}}\mathbb{C}_p,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ の自己同型を σ の作用と定めればよい．

こうして定めた H^i_{LT} への W_F の作用が $\mathrm{GL}_n(F)\times D^\times$ の作用と可換であることも定義よりすぐに分かる．∎

系 4.32

整数 i および δ に対し，$H^i_{\mathrm{LT},\delta}=\varinjlim_m H^i_c(M^{(\delta)}_m\otimes_{\breve{F}}\mathbb{C}_p,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ とおく．また，群準同型 $\phi\colon \mathrm{GL}_n(F)\times D^\times\times W_F\longrightarrow\mathbb{Z}$ を $\phi(g,h,\sigma)=-v_F(\det g)+v_F(\mathrm{Nrd}\,h)+d(\sigma)$ で定める．

このとき，H^i_{LT} は $H^i_{\mathrm{LT}}=\bigoplus_{\delta\in\mathbb{Z}}H^i_{\mathrm{LT},\delta}$ と直和分解し，成分 $H^i_{\mathrm{LT},\delta}$ は $(g,h,\sigma)\in\mathrm{GL}_n(F)\times D^\times\times W_F$ の作用によって成分 $H^i_{\mathrm{LT},\delta-\phi(g,h,\sigma)}$ にうつされる．

証明　まず，$M_m = \coprod_{\delta\in\mathbb{Z}} M_m^{(\delta)}$ より $H^i_{\mathrm{LT}} = \bigoplus_{\delta\in\mathbb{Z}} H^i_{\mathrm{LT},\delta}$ を得る．また，定義 4.22，命題 4.25，命題 4.28 より，(g,h,σ) の作用で $H^i_{\mathrm{LT},\delta}$ は $H^i_{\mathrm{LT},\delta-\phi(g,h,\sigma)}$ にうつされることが分かる（命題 4.31 の証明において $\sigma \in W_F$ の作用を定義したときには，Weil 降下データの「$-d(\sigma)$ 乗」を用いたことを思い出すとよい）． ∎

H^i_{LT} を用いて，$\pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し $\mathrm{rec}_F(\pi)$ を定義するのであるが，そのためにまず $\mathrm{GL}_n(F)$ の表現と $D^\times$ の表現を関係づける**局所 Jacquet-Langlands 対応**について述べておく．

定理 4.33（局所 Jacquet-Langlands 対応）
次の 2 つの集合の間に自然な全単射がある：

- $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約離散系列表現の同型類の集合 $\mathbf{Disc}(\mathrm{GL}_n(F))$.
- $D^\times$ の既約スムーズ表現の同型類の集合 $\mathbf{Irr}(D^\times)$.

$\rho \in \mathbf{Irr}(D^\times)$ に対応する $\mathbf{Disc}(\mathrm{GL}_n(F))$ の元を $\mathrm{JL}(\rho)$ と書き，$\pi \in \mathbf{Disc}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対応する $\mathbf{Irr}(D^\times)$ の元を $\mathrm{LJ}(\pi)$ と書く．π と ρ が JL および LJ で対応することは，以下の指標関係式で特徴付けられる：

$$\theta_\rho(h) = (-1)^{n-1}\theta_\pi(g_h) \quad \bigl(h \in (D^\times)^{\mathrm{rs}}\bigr).$$

ここで，$(D^\times)^{\mathrm{rs}}$ は $D^\times$ の正則半単純元全体を表す．また，g_h は h と同じ固有多項式を持つ $\mathrm{GL}_n(F)$ の元である（$h \mapsto g_h$ により，$D^\times$ の正則半単純元の共役類と $\mathrm{GL}_n(F)$ の楕円正則半単純元の共役類は一対一に対応する）．

証明は [Rog83], [DKV84] を参照.

例 4.34
$n=2$ の場合を考える．χ を $F^\times$ のスムーズ指標とする．完全系列

$$0 \longrightarrow \chi\circ\det \longrightarrow \mathrm{Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)}(\chi\boxtimes\chi) \longrightarrow \mathrm{St}_2 \otimes(\chi\circ\det) \longrightarrow 0$$

より，$\theta_{\mathrm{St}_2\otimes(\chi\circ\det)} = \theta_{\mathrm{Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)}(\chi\boxtimes\chi)} - \theta_{\chi\circ\det}$ となる．

$h \in (D^\times)^{\mathrm{rs}}$ に対し $g_h \in \mathrm{GL}_2(F)$ は楕円正則半単純元であるから，[vD72, Theorem 3] より $\theta_{\mathrm{Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)}(\chi\boxtimes\chi)}(g_h) = 0$ である．よって

$$\theta_{\mathrm{St}_2\otimes(\chi\circ\det)}(g_h) = -\theta_{\chi\circ\det}(g_h) = -\chi(\det g_h) = -\chi(\mathrm{Nrd}\, h) = -\theta_{\chi\circ\mathrm{Nrd}}(h)$$

となり，$\mathrm{JL}(\chi\circ\mathrm{Nrd}) = \mathrm{St}_2\otimes(\chi\circ\det)$ であることが分かる（実は $n \geq 3$ の場合も $\mathrm{JL}(\chi\circ\mathrm{Nrd}) = \mathrm{St}_n\otimes(\chi\circ\det)$ が成り立つ）．

なお，$\mathrm{GL}_2(F)$ の既約離散系列表現で $\mathrm{St}_2\otimes(\chi\circ\det)$ という形をしていないものは超尖点表現であるから，局所 Jacquet-Langlands 対応で $\mathrm{GL}_2(F)$ の既約超尖点表現と $D^\times$ の 2 次元以上の既約スムーズ表現が対応することも分かる．

注意 4.35

$\mathbb{R}$ 上の場合にも局所 Jacquet-Langlands 対応が存在する．すなわち，$\mathbb{H}$ を $\mathbb{R}$ 上の四元数体とするとき，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の既約離散系列表現と $\mathbb{H}^\times$ の既約許容表現が一対一に対応し，同様の指標関係式を満たす．これによって，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の離散系列表現 $D_{1,0}$（定義 3.19 参照）と $\mathbb{H}^\times$ の自明表現が対応する（注意 3.20 iii) を用いて上の例と同様の計算をすればよい）．

これで rec_F が定義できる．

定義 4.36

$\pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し，W_F の ℓ 進表現 $\mathrm{rec}_F(\pi)$ を次で定める：

$$\mathrm{rec}_F(\pi) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F)}\bigl(\pi, \mathrm{Hom}_{D^\times}(H^{n-1}_{\mathrm{LT}}, \mathrm{LJ}(\pi))\bigr)^\vee\Bigl(\frac{n-1}{2}\Bigr).$$

上の定義において $n-1$ 次のコホモロジーしか考えていないのは，それ以外の次数のコホモロジーに超尖点表現が現れないためである：

定理 4.37

$i \neq n-1$ のとき，$\mathrm{GL}_n(F)$ のスムーズ表現 H^i_{LT} は既約超尖点表現を部分商に持たない．

証明は [Mie10] を参照．この定理より，$i \neq n-1$ のとき $\pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F)}\bigl(\pi, \mathrm{Hom}_{D^\times}(H^i_{\mathrm{LT}}, \mathrm{LJ}(\pi))\bigr) = 0$$

となる．実際，$\mathrm{Hom}_{D^\times}(H^i_{\mathrm{LT}}, \mathrm{LJ}(\pi))^{\mathrm{sm}}$ は $\mathrm{GL}_n(F)$ 表現として $(H^i_{\mathrm{LT}})^\vee \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{LJ}(\pi)$ に埋め込めるので，もし $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F)}(\pi, \mathrm{Hom}_{D^\times}(H^i_{\mathrm{LT}}, \mathrm{LJ}(\pi))) \neq 0$ ならば単射 $\mathrm{GL}_n(F)$ 準同型 $\pi \hookrightarrow (H^i_{\mathrm{LT}})^\vee$ が存在することになる．これの双対 $(H^i_{\mathrm{LT}})^{\vee\vee} \twoheadrightarrow \pi^\vee$ と自然な写像 $H^i_{\mathrm{LT}} \hookrightarrow (H^i_{\mathrm{LT}})^{\vee\vee}$ の合成は 0 でないことが容易に分かるので，H^i_{LT} が既約超尖点表現 $\pi^\vee$ を商に持つことになり定理 4.37 に矛盾する．

注意 4.38

実は，$\mathrm{GL}_n(F)$ の表現として $\mathrm{Hom}_{D^\times}(H^{n-1}_{\mathrm{LT}}, \mathrm{LJ}(\pi))^{\mathrm{sm}}$ は $\pi^{\oplus n}$ と同型であることが証明できる（大域的な証明と，M_m に Lefschetz 跡公式を適用する局所的な証明 ([Str08b], [Mie12]) の二通りの方法がある）．

rec_F の定義はやや複雑な形になっているが，これは $\mathrm{GL}_n(F)$ や $D^\times$ の中心がコンパクトでないため H^{n-1}_{LT} の準尖点部分が直和分解しないという事情による．スムーズ指標 $\chi\colon F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を固定し，以下で定義する H^{n-1}_{LT} の商 $H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi}$ を考えることで，rec_F のより簡明な解釈が得られる．

定義 4.39

$\chi\colon F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ をスムーズ指標とする．H^{n-1}_{LT} の商で $F^\times \subset D^\times$ が χ 倍で作用するような最大のものを $H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi}$ と書く．これは $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times \times W_F$ の表現である．注意 4.29 i) より，$F^\times \subset \mathrm{GL}_n(F)$ は $H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi}$ に χ^{-1} 倍で作用する．

$H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi}$ の $\mathrm{GL}_n(F)$ 表現としての準尖点部分（[Ber84, 2.3] 参照）を $H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi,\mathrm{cusp}}$ と書く．これは $H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi}$ の直和因子である．

命題 4.40

$\chi\colon F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ をスムーズ指標とするとき，以下が成り立つ：

i) $\chi(\varpi^c) = 1$ となるように整数 $c \geq 1$ をとると，$\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \times I_F$ の表現として $H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi}$ は $\bigoplus_{0\leq\delta\leq cn-1} H^{n-1}_{\mathrm{LT},\delta}$ の直和因子である．

ii) $H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi}$ は $\mathrm{GL}_n(F)$ の表現として許容的である．

iii) $H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi,\mathrm{cusp}}$ は以下のように直和分解できる：

$$H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi,\mathrm{cusp}} = \bigoplus_{\pi,\rho} \pi \boxtimes \rho \boxtimes \sigma_{\pi,\rho}.$$

ただし，π は $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約超尖点表現で中心指標が χ^{-1} であるものの同型類を動き，ρ は $D^\times$ の既約スムーズ表現で中心指標が χ であるものの同型類を動く．$\sigma_{\pi,\rho}$ は W_F の有限次元 ℓ 進表現である．

iv) $\pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ の中心指標が χ ならば，$\mathrm{rec}_F(\pi) = \sigma_{\pi^\vee,\mathrm{LJ}(\pi)}(\frac{n-1}{2})$ が成り立つ．

なお，注意 4.38 より，$\rho \neq \mathrm{LJ}(\pi^\vee)$ のときは $\sigma_{\pi,\rho} = 0$ となることも分かるが，これは後で使わない．

証明　i) を示す．χ は $\varpi^{c\mathbb{Z}} \subset F^\times$ 上自明であるから，$H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi}$ は

$$H^{n-1}_{\mathrm{LT},\varpi^{c\mathbb{Z}}} = \varinjlim_m H^{n-1}_c\bigl((M_m/\varpi^{c\mathbb{Z}}) \otimes_{\breve{F}} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell\bigr)$$

の商である（$M_m/\varpi^{c\mathbb{Z}}$ は M_m の $\varpi^{c\mathbb{Z}} \subset F^\times \subset D^\times$ による商を表す）．$M_m/\varpi^{c\mathbb{Z}} = \coprod_{0\leq\delta\leq cn-1} M_m^{(\delta)}$ であることが容易に分かるので，$\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \times I_F$ の表現として $H^{n-1}_{\mathrm{LT},\varpi^{c\mathbb{Z}}} \cong \bigoplus_{0\leq\delta\leq cn-1} H^{n-1}_{\mathrm{LT},\delta}$ が成立する．一方，$F^\times/\varpi^{c\mathbb{Z}}$ はコンパクト群であるから，直和分解 $H^{n-1}_{\mathrm{LT},\varpi^{c\mathbb{Z}}} = \bigoplus_\chi H^{n-1}_{\mathrm{LT},\varpi^{c\mathbb{Z}},\chi}$ がある（χ は $F^\times/\varpi^{c\mathbb{Z}}$ のスムーズ指標を動き，$F^\times \subset D^\times$ は $H^{n-1}_{\mathrm{LT},\varpi^{c\mathbb{Z}},\chi}$ に χ 倍で作用する）．定義より $H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi} = H^{n-1}_{\mathrm{LT},\varpi^{c\mathbb{Z}},\chi}$ なので，主張が従う．

ii) を示す．$m \geq 0$ に対し，$(H^{n-1}_{\mathrm{LT},\delta})^{K_m} = H^{n-1}_c(M_m^{(\delta)} \otimes_{\breve{F}} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ は有限次元であることが知られている（例えば [Str08a, Lemma 2.5.1] 参照）．よって，i) より

$(H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi})^{K_m}$ も有限次元になる．すなわち，$H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi}$ は $\mathrm{GL}_n(F)$ の表現として許容的である．

iii) を示す．$D^\times/F^\times$ はコンパクトであるから，$H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi,\mathrm{cusp}} = \bigoplus_\rho V_\rho \boxtimes \rho$（$V_\rho$ は $\mathrm{GL}_n(F) \times W_F$ の表現）という形の直和分解がある．V_ρ は中心指標 χ^{-1} を持つ $\mathrm{GL}_n(F)$ の超尖点表現であるから，既約超尖点表現の可算個の直和になる ([Cas, Proposition 5.4.2])．よって $V_\rho = \bigoplus_\pi \pi \boxtimes \sigma_{\pi,\rho}$（$\sigma_{\pi,\rho}$ は W_F の表現）という形の直和分解ができる．このとき $H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi,\mathrm{cusp}} = \bigoplus_{\pi,\rho} \pi \boxtimes \rho \boxtimes \sigma_{\pi,\rho}$ である．$\sigma_{\pi,\rho}$ の有限次元性を示す．$m \geq 0$ を $\pi^{K_m} \neq 0$ となるようにとる．$\pi^{K_m} \boxtimes \rho \boxtimes \sigma_{\pi,\rho}$ は $(H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi,\mathrm{cusp}})^{K_m}$ に含まれる．ii) より $(H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi,\mathrm{cusp}})^{K_m}$ は有限次元なので，$\sigma_{\pi,\rho}$ が有限次元であることが分かる．

iv) を示す．$\mathrm{LJ}(\pi)$ の中心指標は χ なので，

$$\mathrm{Hom}_{D^\times}\bigl(H^{n-1}_{\mathrm{LT}}, \mathrm{LJ}(\pi)\bigr) = \mathrm{Hom}_{D^\times}\bigl(H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi}, \mathrm{LJ}(\pi)\bigr)$$

であることが分かる．これと iii) の直和分解より，$\mathrm{rec}_F(\pi) = \sigma^{\vee\vee}_{\pi^\vee,\mathrm{LJ}(\pi)}(\frac{n-1}{2}) = \sigma_{\pi^\vee,\mathrm{LJ}(\pi)}(\frac{n-1}{2})$ となるのでよい（最後の等号で $\sigma_{\pi^\vee,\mathrm{LJ}(\pi)}$ が有限次元であることを用いた）． ∎

系 4.41

$\pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し，$\mathrm{rec}_F(\pi)$ は W_F の有限次元 ℓ 進表現である．

証明　χ を π の中心指標として命題 4.40 iv) を適用すればよい． ∎

$n = 1$ の場合の $H^i_{\mathrm{LT},\chi}$ に関する次の定理は，古典的 Lubin-Tate 理論の帰結である（古典的 Lubin-Tate 理論については [Yos08] 等を参照）：

定理 4.42

χ を $F^\times$ のスムーズ指標とするとき，$\mathrm{GL}_1(F) \times F^\times \times W_F$ の表現としての同型

$$H^0_{\mathrm{LT},\chi} \cong \chi^{-1} \boxtimes \chi \boxtimes (\chi \circ \mathrm{Art}_F^{-1})$$

がある．また，$i > 0$ のとき $H^i_{\mathrm{LT}} = H^i_{\mathrm{LT},\chi} = 0$ である．

この定理より，以前に述べた命題 4.2 が従う．命題 4.3 の証明も与えておこう．

命題 4.3 の証明　i) を示す．ϕ を系 4.32 の通りとし，$H = \mathrm{Ker}\,\phi$ とおくと，系 4.32 より $H^i_{\mathrm{LT}} = \text{c-Ind}_H^{\mathrm{GL}_n(F)\times D^\times \times W_F} H^i_{\mathrm{LT},0}$ となる．$\chi\colon F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を不分岐指標とし，$\chi_{\mathrm{GL}_n(F)} = \chi\circ\det$, $\chi_{D^\times} = \chi\circ\mathrm{Nrd}$, $\chi_{W_F} = \chi\circ\mathrm{Art}_F^{-1}$ とおくと，$\chi^{-1}_{\mathrm{GL}_n(F)} \boxtimes \chi_{D^\times} \boxtimes \chi_{W_F}$ は H 上自明な $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times \times W_F$ の指標であるから，

$$H^i_{\mathrm{LT}} \otimes (\chi^{-1}_{\mathrm{GL}_n(F)} \boxtimes \chi_{D^\times} \boxtimes \chi_{W_F}) \cong H^i_{\mathrm{LT}}$$

が得られる．これを用いて $\pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ に対し $\mathrm{rec}_F(\pi \otimes \chi_{\mathrm{GL}_n(F)})$ を計算しよう．まず，$\mathrm{GL}_n(F) \times W_F$ の表現の同型

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{D^\times}\bigl(H^{n-1}_{\mathrm{LT}}, \mathrm{LJ}(\pi \otimes \chi_{\mathrm{GL}_n(F)})\bigr) \\
&\quad \cong \mathrm{Hom}_{D^\times}\bigl(H^{n-1}_{\mathrm{LT}} \otimes (\chi^{-1}_{\mathrm{GL}_n(F)} \boxtimes \chi_{D^\times} \boxtimes \chi_{W_F}), \mathrm{LJ}(\pi) \otimes \chi_{D^\times}\bigr) \\
&\quad = \mathrm{Hom}_{D^\times}\bigl(H^{n-1}_{\mathrm{LT}}, \mathrm{LJ}(\pi)\bigr) \otimes (\chi_{\mathrm{GL}_n(F)} \boxtimes \chi^{-1}_{W_F})
\end{aligned}$$

が得られる．これより，

$$\begin{aligned}
\mathrm{rec}_F(\pi \otimes \chi_{\mathrm{GL}_n(F)}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F)}\bigl(\pi, \mathrm{Hom}_{D^\times}(H^{n-1}_{\mathrm{LT}}, \mathrm{LJ}(\pi))\bigr)^\vee \Bigl(\frac{n-1}{2}\Bigr) \otimes \chi_{W_F} \\
&= \mathrm{rec}_F(\pi) \otimes \chi_{W_F}
\end{aligned}$$

となり主張が示された．

ii) はエタールコホモロジーの関手性より明らかである．∎

次に，定理 4.4 の証明の解説に移る．このためには，M_m のよい形式モデル $\mathcal{M}_m$ を構成する必要がある．

定義 4.43

$m \geq 0$ を整数とする．$S \in \mathbf{Nilp}$ とし，X を S 上の p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群とする．$\mathcal{O}_F$ の作用と可換な有限平坦群スキームの準同型 $\eta_m \colon (\mathcal{O}_F/\varpi^m)^n \longrightarrow X[\varpi^m]$ が **Drinfeld レベル構造**であるとは，次の条件を満たすことをいう：

S 上の任意のアフィンスキーム $\mathrm{Spec}\, A$ および任意の $f \in \Gamma(X[\varpi^m] \times_S \mathrm{Spec}\, A, \mathcal{O})$ に対し，A 係数多項式の等式

$$\det(T - f) = \prod_{a \in (\mathcal{O}_F/\varpi^m)^n} \bigl(T - f(\eta_m(a))\bigr)$$

が成立する．ただし，$f(\eta_m(a))$ は $S \xrightarrow{a} (\mathcal{O}_F/\varpi^m)^n \xrightarrow{\eta_m} X[\varpi^m]$ の底変換 $\mathrm{Spec}\, A \longrightarrow X[\varpi^m] \times_S \mathrm{Spec}\, A$ によって f を引き戻して得られる $A = \Gamma(\mathrm{Spec}\, A, \mathcal{O})$ の元である．

Drinfeld レベル構造に関する詳細は，[KM85, Chapter 1] および [HT01, Chapter II] を参照．

定理 4.44（Drinfeld [Dri74, Proposition 4.3]）

$m \geq 0$ を整数とし，関手 $\mathcal{M}_m \colon \mathbf{Nilp} \longrightarrow \mathbf{Set}$ を次のように定める．$S \in \mathbf{Nilp}$ に対し，$\mathcal{M}_m(S)$ は以下のような 3 つ組 (X, ρ, η_m) の同型類の集合とする：

- $(X, \rho) \in \mathcal{M}(S)$.

- $\eta_m\colon (\mathcal{O}_F/\varpi^m)^n \longrightarrow X[\varpi^m]$ は Drinfeld レベル構造.

このとき，次が成り立つ：

i) $\mathcal{M}_m$ は $\mathcal{M}$ 上有限な形式スキームで表現される.

ii) 自然な射 $\mathcal{M}_{m+1} \longrightarrow \mathcal{M}_m$ が存在し，有限平坦になる.

iii) 射影系 $\{\mathcal{M}_m\}$ のリジッド一般ファイバーは $\{M_m\}$ と同型である.

iv) $\delta \in \mathbb{Z}$ に対し $\mathcal{M}^{(\delta)}$ の $\mathcal{M}_m$ における逆像 $\mathcal{M}_m^{(\delta)}$ はアフィン形式スキームであり，その座標環 $R_m^{(\delta)} = \Gamma(\mathcal{M}_m^{(\delta)}, \mathcal{O})$ は n 次元完備正則局所 $\mathcal{O}_{\breve{F}}$ 代数となる.

例 4.45

$n = 1$ のとき，$\breve{F}_m$ を例 4.27 の通りとすると，$\delta \in \mathbb{Z}$ に対し $\mathcal{M}_m^{(\delta)} \cong \operatorname{Spf} \mathcal{O}_{\breve{F}_m}$ である.

M_m のときと同様，$\mathcal{M}_m$ には $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \times D^\times$ の右作用および Weil 降下データが自然に定まる．実は pro-object $\{\mathcal{M}_m\}$ への $\mathrm{GL}_n(F)$ の右作用も定めることができるが，詳細は省略する.

$\mathcal{M}$ 上の普遍 p 可除 $\mathcal{O}_F$ 加群を $\mathcal{X}^{\mathrm{univ}}$ と書いていたのであった．$\mathcal{M}_m$ 上の普遍 Drinfeld レベル構造 $\eta_m^{\mathrm{univ}}\colon (\mathcal{O}_F/\varpi^m)^n \longrightarrow \mathcal{X}^{\mathrm{univ}}[\varpi^m] \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_m$ を用いて，以下のように $\mathcal{M}_m$ の閉部分形式スキームを定めることができる.

定義 4.46

$(\mathcal{O}_F/\varpi^m)^n$ の直和因子 I に対し，$\mathcal{M}_{m,I} \subset \mathcal{M}_m$ を条件 $I \subset \operatorname{Ker} \eta_m^{\mathrm{univ}}$ によって決まる閉部分形式スキームとする．すなわち，$\mathcal{M}_{m,I}$ は $S \in \mathbf{Nilp}$ に対し

$$\mathcal{M}_{m,I}(S) = \bigl\{(X, \rho, \eta_m) \in \mathcal{M}_m(S) \bigm| I \subset \ker \eta_m\bigr\}$$

を満たす形式スキームである．$\mathcal{M}_{m,I}^{(\delta)} \subset \mathcal{M}_m^{(\delta)}$ も同様に定める.

注意 4.47

$g \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ の作用で $\mathcal{M}_{m,I}^{(\delta)}$ は $\mathcal{M}_{m,g^{-1}I}^{(\delta)}$ にうつされる.

命題 4.48

$m \geq 1$, $0 \leq h \leq n$, δ を整数とする．$(\mathcal{O}_F/\varpi^m)^n$ の階数 h の直和因子の集合を $\mathcal{S}_{m,h}$ と書く.

i) $I \in \mathcal{S}_{m,h}$ のとき，$R_{m,I}^{(\delta)} = \Gamma(\mathcal{M}_{m,I}^{(\delta)}, \mathcal{O})$ は $n-h$ 次元完備正則局所 $\mathcal{O}_{\breve{F}}$ 代数である.

ii) $\operatorname{Spec} R_m^{(\delta)}[\varpi^{-1}] = \operatorname{Spec} R_m^{(\delta)} \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{S}_{m,1}} \operatorname{Spec} R_{m,I}^{(\delta)}$ となる.

証明 i) は [Dri74, Proposition 4.3 2)] より従う．ii) は [Mie10, Lemma 4.2 (i)] を参照. ∎

次の命題が定理 4.4 の証明の鍵となる．

命題 4.49（[Sch13a, Corollary 5.7]）
$i\geq 0$, $m\geq 0$, δ を整数とする．$\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)\times W_F/I_F$ の表現としての同型

$$H^i\bigl(I_F, R\Gamma(M_m^{(\delta)}\otimes_{\breve{F}}\mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)\bigr)\cong\bigl(\mathrm{Ind}_{P_i(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\mathrm{St}_i\boxtimes\mathbf{1})\bigr)^{K_m}\otimes\overline{\mathbb{Q}}_\ell(-i)$$

がある．ここで，$P_i\subset\mathrm{GL}_n$ は n の分割 $n=i+(n-i)$ に対応する標準放物型部分群である．

略証　まず，

$$H^i\bigl(I_F, R\Gamma(M_m^{(\delta)}\otimes_{\breve{F}}\mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)\bigr)=H^i(M_m^{(\delta)}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)\cong H^i(\mathrm{Spec}\,R_m^{(\delta)}[\varpi^{-1}], \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

が成り立つことに注意する．なお，後半の同型は $\mathcal{M}_m^{(\delta)}$ が代数化できること ([Str08a, Theorem 2.3.1])，形式隣接輪体の比較定理 ([Ber96, Theorem 3.1])，正則底変換定理 ([Fuj95, Theorem 7.1.1], [ILO14, Exposé XVII, Proposition 4.2.1]) を組み合わせることによって得られる．

以下簡単のため，$n=2$ の場合を扱う．$X=\mathrm{Spec}\,R_m^{(\delta)}$ とおき，その唯一の閉点を x と書く．$U=\mathrm{Spec}\,R_m^{(\delta)}[\varpi^{-1}]$, $V=X\setminus\{x\}$ とおく．$I\in\mathcal{S}_{m,1}$ に対し，$X_I=\mathrm{Spec}\,R_{m,I}^{(\delta)}$, $V_I=X_I\setminus\{x\}$ と定める．命題 4.48 ii) より $U=V\setminus\bigcup_{I\in\mathcal{S}_{m,1}}V_I$ である．また，$I, I'\in\mathcal{S}_{m,1}$ が相異なるならば $V_I\cap V_{I'}=\varnothing$ である（[Mie10, Lemma 4.2 (ii)] 参照）．

Gabber の絶対純性定理 ([ILO14, Exposé XVI, Théorème 3.1.1]) を用いると以下のようにコホモロジーの計算ができる：

$$H^i(V,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)=\begin{cases}\overline{\mathbb{Q}}_\ell & (i=0),\\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-2) & (i=3),\\ 0 & (i\neq 0,3),\end{cases}\qquad H^i(V_I,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)=\begin{cases}\overline{\mathbb{Q}}_\ell & (i=0),\\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-1) & (i=1),\\ 0 & (i\neq 0,1),\end{cases}$$

$$H^i_{V_I}(V,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)=H^{i-2}\bigl(V_I,\overline{\mathbb{Q}}_\ell(-1)\bigr)=\begin{cases}\overline{\mathbb{Q}}_\ell(-1) & (i=2),\\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-2) & (i=3),\\ 0 & (i\neq 2,3).\end{cases}$$

よって，完全系列

$$\cdots\longrightarrow H^2(V,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\longrightarrow H^2(U,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\longrightarrow\bigoplus_{I\in\mathcal{S}_{m,1}}H^3_{V_I}(V,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\longrightarrow H^3(V,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\longrightarrow\cdots$$

から

$$H^2(\mathrm{Spec}\,R_m^{(\delta)}[\varpi^{-1}],\overline{\mathbb{Q}}_\ell)=H^2(U,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)=\mathrm{Ker}\Bigl(\bigoplus_{I\in\mathcal{S}_{m,1}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell(-2)\xrightarrow{\Sigma}\overline{\mathbb{Q}}_\ell(-2)\Bigr)$$

となる．

$I_0 \in \mathcal{S}_{m,1}$ を $\{(a,0) \mid a \in \mathcal{O}_F/\varpi^m\} \subset (\mathcal{O}_F/\varpi^m)^2$ という直和因子とすると，$[g]$ に $g^{-1}I_0$ を対応させることで，全単射 $B(\mathcal{O}_F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)/K_m \cong \mathcal{S}_{m,1}$ が得られる．これと注意 4.47 より，$\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F) \times W_F/I_F$ の表現として $\bigoplus_{I\in\mathcal{S}_{m,I}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-2) \cong (\mathrm{Ind}_{B(\mathcal{O}_F)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)} \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{K_m}(-2)$ である．さらに，岩澤分解 $\mathrm{GL}_2(F) = B(F)\,\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ に注意すると，これは $(\mathrm{Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)} \delta_B^{-1})^{K_m}(-2)$ とも同型であることが分かる（δ_B は $B(\mathcal{O}_F)$ 上自明であることに注意）．したがって，

$$H^2(\mathrm{Spec}\, R_m^{(\delta)}[\varpi^{-1}], \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong \mathrm{Ker}\big((\mathrm{Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)} \delta_B^{-1})^{K_m} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell\big)(-2) = \mathrm{St}_2^{K_m}(-2)$$

となり，$i = 2$ の場合の主張が従う．

同様の議論により，

$$H^1(\mathrm{Spec}\, R_m^{(\delta)}[\varpi^{-1}], \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = (\mathrm{Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)} \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{K_m}(-1), \quad H^0(\mathrm{Spec}\, R_m^{(\delta)}[\varpi^{-1}], \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

も容易に証明できる． ∎

上の命題では $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ の作用しか見ていないが，超尖点タイプに関する次の定理を使うことによって，$\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ の作用から $\mathrm{GL}_n(F)$ の表現に関する情報を引き出すことができる：

定理 4.50（Paskunas [Pas05]）

π を $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約超尖点表現とするとき，$\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ の既約スムーズ表現 ρ で以下の条件を満たすものが一意的に存在する：

> $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現 π' に対し，$\pi'|_{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}$ が ρ を含むことと π' が $\pi \otimes (\chi \circ \det)$（$\chi$ は $F^\times$ の不分岐指標）という形であることは同値である．

以下では $\pi \in \mathbf{Irr}^{\mathrm{sc}}(\mathrm{GL}_n(F))$ を固定し，ρ を上の定理のようにとる．$\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ のスムーズ表現 V に対し，$V[\rho] = \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}(\rho, V)$ とおく．$V \mapsto V[\rho]$ は完全関手である．また，V が $\mathrm{GL}_n(F)$ の長さ有限のスムーズ表現であり，超尖点表現を部分商に持たないならば，$V[\rho] = 0$ である．

系 4.51

$n \geq 2$ のとき，$i \geq 0, m \geq 0$ および $\delta \in \mathbb{Z}$ に対し次が成り立つ：

$$H^i\big(I_F, H^{n-1}(M_m^{(\delta)} \otimes_{\breve{F}} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)\big)[\rho] = 0.$$

証明　記号の簡略化のため，$\otimes_{\breve{F}} \mathbb{C}_p$ および係数 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ は省略する[注 23]．

注 23 $H^i(M_m^{(\delta)})$ という記号は，命題 4.49 の略証において考えた $M_m^{(\delta)}$ 自身のコホモロジー $H^i(M_m^{(\delta)}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$

$i \geq 2$ のとき $H^i(I_F, H^j(M_m^{(\delta)})) = 0$ であるから（後述の補題 4.52 i) 参照），次の完全系列がある：

$$0 \longrightarrow H^1(I_F, H^{i-1}(M_m^{(\delta)})) \longrightarrow H^i(I_F, R\Gamma(M_m^{(\delta)})) \longrightarrow H^0(I_F, H^i(M_m^{(\delta)})) \longrightarrow 0.$$

よって，任意の i に対し $H^i(I_F, R\Gamma(M_m^{(\delta)}))[\rho] = 0$ を示せば十分である．命題 4.49 より，これは $(\mathrm{Ind}_{P_i(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\mathrm{St}_i \boxtimes \mathbf{1}))^{K_m}[\rho] = 0$ と同値である．$\mathrm{Ind}_{P_i(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\mathrm{St}_i \boxtimes \mathbf{1})$ は $\mathrm{GL}_n(F)$ の長さ有限のスムーズ表現であり，超尖点表現を部分商に持たないので，$(\mathrm{Ind}_{P_i(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\mathrm{St}_i \boxtimes \mathbf{1}))[\rho] = 0$ である．これより主張は直ちに従う． ∎

この系と，Galois コホモロジーに関する次の補題を組み合わせることで定理 4.4 は証明される：

補題 4.52

W_F の有限次元 ℓ 進表現 V に対し，次が成り立つ：

i) 任意の i に対し $H^i(I_F, V)$ は有限次元 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ベクトル空間であり，$i \geq 2$ のとき $H^i(I_F, V) = 0$ である．

ii) 整数 r に対し次が成り立つ：

$$(1 - q^r)\,\mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}_q^r; (V^{\mathrm{ss}})^{I_F}\bigr) = \sum_{i=0}^{1} (-1)^i\,\mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}_q^r; H^i(I_F, V)\bigr).$$

特に，$H^0(I_F, V) = H^1(I_F, V) = 0$ ならば $(V^{\mathrm{ss}})^{I_F} = 0$ である．

証明　まず V が W_F のスムーズ表現の場合を考える．よく知られているように

$$H^i(I_F, V) = \begin{cases} V^{I_F} & (i = 0) \\ V_{I_F}(-1) & (i = 1) \\ 0 & (i \geq 2) \end{cases}$$

となるので，i) が従う．V への I_F の作用がスムーズであることから $V_{I_F} \cong V^{I_F}$ となるので，

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{1} (-1)^i\,\mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}_q^r; H^i(I_F, V)\bigr) &= \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_q^r; V^{I_F}) - q^r\,\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_q^r; V^{I_F}) \\ &= (1 - q^r)\,\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_q^r; V^{I_F}) = (1 - q^r)\,\mathrm{Tr}\bigl(\mathrm{Frob}_q^r; (V^{\mathrm{ss}})^{I_F}\bigr) \end{aligned}$$

となり ii) が得られる（I_F はコンパクトなので，I_F のスムーズ表現の圏からの関手 $(-)^{I_F}$ は完全であることに注意）．

とたいへん紛らわしいが，今後後者が出てくることはないのでご了承いただきたい．

V が一般の有限次元 ℓ 進表現の場合は，W_F 部分空間の列 $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k = V$ で V_{i+1}/V_i がスムーズになるようなものがとれる．これを使うとまず i) がスムーズの場合に帰着できる．さらに ii) の両辺が V に関し加法的であることに注意すると，こちらもスムーズの場合に帰着できる． ∎

定理 4.4 の証明　$(\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi)^{I_F})^\vee = (\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi)_{I_F})^\vee = (\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi)^\vee)^{I_F} = ((\mathrm{rec}_F(\pi)^\vee)^{\mathrm{ss}})^{I_F}$ であるから，補題 4.52 ii) より，$\mathrm{rec}_F^{\mathrm{ss}}(\pi)^{I_F} = 0$ を証明するためには $H^0(I_F, \mathrm{rec}_F(\pi)^\vee) = H^1(I_F, \mathrm{rec}_F(\pi)^\vee) = 0$ を示せば十分である．

π の中心指標を χ とすると，命題 4.40 iv) より，$\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times \times W_F$ の表現 $\pi^\vee \boxtimes \mathrm{LJ}(\pi) \boxtimes \mathrm{rec}_F(\pi)(-\frac{n-1}{2})$ は $H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi}$ の直和因子である．よって，$\mathrm{GL}_n(F) \times I_F$ の表現として $\pi^\vee \boxtimes \mathrm{rec}_F(\pi)$ は $H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi}$ の直和因子である．ρ は $\pi|_{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}$ の直和因子であるから，$\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F) \times I_F$ の表現として $\rho^\vee \boxtimes \mathrm{rec}_F(\pi)$ は $H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi}$ の直和因子である．これと命題 4.40 i) より，ある $c \geq 1$ に対して $\rho^\vee \boxtimes \mathrm{rec}_F(\pi)$ は $\bigoplus_{0\leq\delta\leq cn-1} H^{n-1}_{\mathrm{LT},\delta}$ の直和因子となる．

整数 $m \geq 0$ を K_m が ρ に自明に作用するようにとる．このとき，$\rho^\vee \boxtimes \mathrm{rec}_F(\pi)$ は $\bigoplus_{0\leq\delta\leq cn-1} (H^{n-1}_{\mathrm{LT},\delta})^{K_m} = \bigoplus_{0\leq\delta\leq cn-1} H^{n-1}_c(M_m^{(\delta)})$ の直和因子となる（系 4.51 の証明中と同様の記号の略記をしている）．Poincaré 双対定理より，$\rho \boxtimes \mathrm{rec}_F(\pi)^\vee$ は $\bigoplus_{0\leq\delta\leq cn-1} H^{n-1}(M_m^{(\delta)})$ の直和因子である．したがって，$i \geq 0$ に対し $\rho \boxtimes H^i(I_F, \mathrm{rec}_F(\pi)^\vee)$ は $\bigoplus_{0\leq\delta\leq cn-1} H^i(I_F, H^{n-1}(M_m^{(\delta)}))$ の直和因子となる．よって系 4.51 より

$$H^i\bigl(I_F, \mathrm{rec}_F(\pi)^\vee\bigr) = \bigl(\rho \boxtimes H^i(I_F, \mathrm{rec}_F(\pi)^\vee)\bigr)[\rho] = 0$$

となり，$H^i(I_F, \mathrm{rec}_F(\pi)^\vee) = 0$ が得られる． ∎

4.3 Global geometry — モジュラー曲線の場合

ここでは，保型表現に伴う Galois 表現の局所成分と前小節で定義した rec_F をどのようにして結び付けるかを，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の場合に説明する．Eichler-Shimura, Deligne らの研究により，この場合にはモジュラー曲線の ℓ 進エタールコホモロジーを用いて保型表現に対応する Galois 表現を構成できることが知られている．まずはモジュラー曲線について簡単に思い出しておこう．

$N \geq 1$ を整数とする．レベル N のモジュラー曲線 Sh_N とは，楕円曲線 E とそのレベル構造 $\eta\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{\cong} E[N]$ の組 (E, η) を分類する $\mathbb{Q}$ 上のモジュライ空間である．$N \geq 3$ のとき，Sh_N は $\mathbb{Q}$ 上滑らかなスキームとなる．また，$\mathfrak{H}^\pm = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ とすると，$\mathrm{Sh}_N(\mathbb{C})$ は以下のような一意化を持つ：

$$\mathrm{Sh}_N(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\infty) \times \mathfrak{H}^\pm / K(N).$$

ここで，$K(N)$ は $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \;\middle|\; a, d \equiv 1,\ b, c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$ で与えられ

る $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty_\mathbb{Q})$ のコンパクト開部分群である．

N を動かすと $\{\mathrm{Sh}_N\}$ は自然に射影系をなす．また，$\{\mathrm{Sh}_N\}$ を pro-object と見ると，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty_\mathbb{Q})$ が右から作用する（Hecke 作用）．したがって，ℓ 進エタールコホモロジー $H^1_c(\mathrm{Sh}_\infty) = \varinjlim_N H^1_c(\mathrm{Sh}_N \otimes_\mathbb{Q} \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty_\mathbb{Q}) \times \Gamma_\mathbb{Q}$ の表現になる．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty_\mathbb{Q})$ の作用はスムーズ，$\Gamma_\mathbb{Q}$ の作用は連続である．

注意 4.53

i) モジュラー曲線は $\mathbb{Q}$ 上固有ではないため，考えるコホモロジーにいくつか選択肢がある．候補としては，上記のコンパクト台コホモロジーの他，通常のコホモロジー $H^1(\mathrm{Sh}_N \otimes_\mathbb{Q} \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$，放物型コホモロジー $H^1_!(\mathrm{Sh}_N \otimes_\mathbb{Q} \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \mathrm{Im}(H^1_c \to H^1)$，（自然なコンパクト化 $\mathrm{Sh}_N \longhookrightarrow \mathrm{Sh}^{\min}_N$ に関する）交叉コホモロジー $IH^1(\mathrm{Sh}_N \otimes_\mathbb{Q} \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ などがある．この場合，$H^1_c \cong (H^1)^\vee$, $H^1_! \cong IH^1$ である [注 24] から，本質的には二通りの選択肢があることになる．H^1_c は $H^1_!$ に比べて少し大きいので，通常後者の方が扱いやすいとされているが，ここでは話の都合上前者を考える．なお，定理 4.5 の証明の際に実際に使われる志村多様体はコンパクトであるから，このような問題は起こらない．

ii) すぐ後にも述べるが，コホモロジー $H^1_c(\mathrm{Sh}_\infty)$ と関係するのは重さ 2 の尖点形式である．より重さが大きい尖点形式を扱うためには，定数層ではない層を係数に持つエタールコホモロジーを考える必要があるが，ここでは説明しない．

定義 4.54

G を局所副有限群とする．G の既約許容表現全体の同型類を $\mathbf{Irr}(G)$ と書き，許容表現の Grothendieck 群 $\mathrm{Groth}(G)$ を以下のように定める：

> $\mathrm{Groth}(G)$ の元は形式和 $\sum_{\pi\in\mathbf{Irr}(G)} m_\pi[\pi]$ で，G の任意のコンパクト開部分群 K に対し $\{\pi \in \mathbf{Irr}(G) \mid \pi^K \neq 0, m_\pi \neq 0\}$ が有限集合となるもの．

G の許容表現 π に対し，$[\pi] \in \mathrm{Groth}(G)$ が自然に定まる．実際，$\pi_0 \in \mathbf{Irr}(G)$ に対し $\pi_0^K \neq 0$ となる G のコンパクト開部分群 K をとり，有限次元 $\mathcal{H}(G,K)$ 加群 π^K における π_0^K の重複度を m_{π,π_0} とおき，$[\pi] = \sum_{\pi_0\in\mathbf{Irr}(G)} m_{\pi,\pi_0}[\pi_0]$ とすればよい．

Γ を位相群（例えば Galois 群や Weil 群）とするとき，$G \times \Gamma$ の表現で G の表現として許容的かつ Γ の表現として連続なものを**許容／連続表現**と呼ぶ．上と同様の方法で，許容／連続表現の Grothendieck 群 $\mathrm{Groth}(G \times \Gamma)$ を定義することができる．

V を $G \times \Gamma$ の許容／連続表現とし，その $\mathrm{Groth}(G \times \Gamma)$ における像を $[V] = \sum_{\pi,R} m_{\pi,R}[\pi \boxtimes R]$ と書く．G の既約許容表現 π_0 に対し，Γ の半単純連続表現 $V[\pi_0]$ を $V[\pi_0] = \bigoplus_R R^{\oplus m_{\pi_0,R}}$ で定める．

[注 24] 高次元志村多様体に対しては，$H^i_!$ と IH^i は一般に同型ではない．

定理 4.5 の類似である次の定理について解説するのが本小節の目標である：

定理 4.55

Π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の尖点的保型表現とし，以下を仮定する：

- $\Pi_\infty \cong D_{1,0}$.
- ある素数 p_0 に対し，Π_{p_0} は超尖点表現である．

$R_\Pi = H^1_c(\mathrm{Sh}_\infty)[\Pi^\infty]$ とおく．このとき，R_Π は $\Gamma_\mathbb{Q}$ の 2 次元半単純 ℓ 進表現であり，任意の素数 $p \neq \ell$ に対して $(R_\Pi)^{\mathrm{ss}}_p = \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{\mathbb{Q}_p}(\Pi_p)^\vee(-\frac{1}{2})$ となる．特に，$R_\Pi^\vee$ は定義 3.7 の意味で $\Pi \otimes |\det|^{1/2}$ に対応する．

注意 4.56

f を重さ 2 の正規化された Hecke 固有新形式とし，Π_f をそれに伴う $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現とすると，$\Pi = \Pi_f \otimes |\det|$ は $\Pi_\infty \cong D_{1,0}$ を満たす（注意 3.20 ii) 参照）．

$H^1_c(\mathrm{Sh}_\infty)$ への $\Gamma_\mathbb{Q}$ の作用を調べるには，モジュラー曲線の整モデルを利用する．次にこれを導入しよう．以下では ℓ と異なる素数 p を固定し，$N \geq 3$ を p と互いに素な整数とする．整数 $m \geq 0$ に対し，以下のような 3 つ組 (E, η_N, η_p) を分類する $\mathbb{Z}_p$ 上のモジュライ空間を $\mathrm{Sh}_{m,N}$ と書く：

- E は楕円曲線.
- $\eta_N\colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{\cong} E[N]$ はレベル構造.
- $\eta_p\colon (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^2 \longrightarrow E[p^m]$ は Drinfeld レベル構造（定義 4.43 を参照）.

この $\mathrm{Sh}_{m,N}$ は Sh_{p^mN} の整モデルを与える．すなわち，以下が成り立つ：

$$\mathrm{Sh}_{m,N} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \cong \mathrm{Sh}_{p^mN} \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}_p.$$

定理 4.44 と同様，$\{\mathrm{Sh}_{m,N}\}$ は射影系をなす．また，$\{\mathrm{Sh}_{m,N}\}$ には $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty_\mathbb{Q})$ の右作用が定まり，上の同型はこの作用と両立する．

$\mathrm{Sh}_{m,N}$ は $m = 0$ のときには $\mathbb{Z}_p$ 上滑らかであるが，$m > 0$ のときはそうではない．このような悪い還元を調べる際には，隣接輪体を考えるのが有効である．$\overline{\mathrm{Sh}}_{m,N} = \mathrm{Sh}_{m,N} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$ とおき，次の図式を考える：

$$\overline{\mathrm{Sh}}_{m,N} \xhookrightarrow{i} \mathrm{Sh}_{m,N} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^{\mathrm{ur}} \xleftarrow{\bar{\jmath}} \mathrm{Sh}_{m,N} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{Q}}_p.$$

隣接輪体とは，$R\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell = i^* R\bar{\jmath}_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ によって定まる $\overline{\mathrm{Sh}}_{m,N}$ 上の ℓ 進層の複体であった．そのコホモロジー

$$H^1_c(\overline{\mathrm{Sh}}_\infty, R\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \varinjlim_{m,N} H^1_c(\overline{\mathrm{Sh}}_{m,N}, R\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

には $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty_\mathbb{Q}) \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ が自然に作用する．

注意 4.57

コホモロジー $H_c^1(\overline{\mathrm{Sh}}_{m,N}, R\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ はリジッド幾何を使うと次のように解釈できる．$\mathrm{Sh}^{\mathrm{good}}_{p^mN,\mathbb{Q}_p} \subset \mathrm{Sh}_{p^mN} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ を，対応する楕円曲線がよい還元を持つような部分集合とすると，これは $\mathrm{Sh}_{p^mN} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ の準コンパクト開部分リジッド空間であり，

$$H_c^1(\overline{\mathrm{Sh}}_{m,N}, R\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong H_c^1(\mathrm{Sh}^{\mathrm{good}}_{p^mN,\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

が成り立つ．

次の命題より，$H_c^1(\overline{\mathrm{Sh}}_\infty, R\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を用いて R_Π を調べることが可能になる．

命題 4.58

自然な射 $H_c^1(\overline{\mathrm{Sh}}_{m,N}, R\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow H_c^1(\mathrm{Sh}_{m,N} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{Q}}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ は同型である．特に，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty_{\mathbb{Q}}) \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ の作用と可換な同型 $H_c^1(\overline{\mathrm{Sh}}_\infty, R\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong H_c^1(\mathrm{Sh}_\infty)|_{\Gamma_{\mathbb{Q}_p}}$ が存在する．

略証　Weil ペアリングを用いて $\mathrm{Sh}_{m,N}$ を $\mathbb{Z}_p[\mu_{p^m}]$ 上のスキームとみなす．$\mathrm{Sh}_{m,N}$ は $\mathbb{Z}_p[\mu_{p^m}]$ 上固有なスキーム $\mathrm{Sh}^{\min}_{m,N}$ にコンパクト化できる．コンパクト化の境界 $\mathrm{Sh}^{\min}_{m,N} \setminus \mathrm{Sh}_{m,N}$ は $\mathbb{Z}_p[\mu_{p^m}]$ 上エタールであり，$\mathrm{Sh}^{\min}_{m,N}$ は境界の近傍で $\mathbb{Z}_p[\mu_{p^m}]$ 上スムーズであることが知られている．よって [SGA7, Exposé XIII, Proposition 2.1.9] より，$\mathrm{Sh}_{m,N}$ を $\mathbb{Z}_p[\mu_{p^m}]$ 上のスキームと見て命題中の射を考えると同型になる．もともとの射はこの同型の直和で書けるので，やはり同型である． ∎

$\overline{\mathrm{Sh}}_{m,N}$ は $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の（レベル付き）楕円曲線を分類する空間であった．$\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の楕円曲線には通常なものと超特異なものの 2 種類があるので，それに応じて $\overline{\mathrm{Sh}}_{m,N}$ を 2 つの部分に分けることができる：

定義 4.59

i) $\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_{m,N} \subset \overline{\mathrm{Sh}}_{m,N}$ を超特異楕円曲線に対応する被約部分スキームとする．これは有限個の点からなる閉部分スキームとなる．$\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ord}}_{m,N} = \overline{\mathrm{Sh}}_{m,N} \setminus \overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_{m,N}$ とおく．

ii) $H^i_{\mathrm{ss}} = \varinjlim_{m,N} H^i(\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_{m,N}, R\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_{m,N}})$ とおく．これには自然に $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty_{\mathbb{Q}}) \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ が作用する．同様に，$H^i_{\mathrm{ord}} = \varinjlim_{m,N} H^i_c(\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ord}}_{m,N}, R\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ord}}_{m,N}})$ と定める．こちらも $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty_{\mathbb{Q}}) \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ の表現となる．

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty_{\mathbb{Q}}) \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ 表現の長完全系列

$$\cdots \longrightarrow H^0_{\mathrm{ss}} \longrightarrow H^1_{\mathrm{ord}} \longrightarrow H^1_c(\overline{\mathrm{Sh}}_\infty, R\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow H^1_{\mathrm{ss}} \longrightarrow H^2_{\mathrm{ord}} \longrightarrow \cdots$$

が存在するので，$H_c^1(\overline{\mathrm{Sh}}_\infty, R\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を調べるには H^i_{ss} と H^i_{ord} を調べればよい．

■ H^i_{ss} **について**

$\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_{m,N}$ は有限個の点からなるので，

$$H^i(\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_{m,N}, R\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_{m,N}}) = \bigoplus_{x\in\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_{m,N}(\overline{\mathbb{F}}_p)} (R^i\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x$$

である．$(R^i\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x$ は $\mathrm{Sh}_{m,N}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p^{\mathrm{ur}}$ の x における完備化のみに依存することが分かっているので，まずこの完備化を調べることにする．

命題 4.60
$x\in\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_{m,N}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ とし，$\mathrm{Sh}_{m,N}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p^{\mathrm{ur}}$ の x における完備化を $(\mathrm{Sh}_{m,N})^\wedge_x$ と書くことにする．このとき，$\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}$ 上の同型 $\mathcal{M}^{(0)}_m\cong(\mathrm{Sh}_{m,N})^\wedge_x$ が存在する．

証明　まず $m=0$ の場合を考える．このとき，x は $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の楕円曲線 E とレベル構造 $\eta_N\colon(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2\xrightarrow{\cong}E[N]$ の組 (E,η) と対応する．E は超特異であるから，$E[p^\infty]$ は命題 4.20 の p 可除群 $\mathbb{X}$ と同型である．この同型 $E[p^\infty]\cong\mathbb{X}$ を固定する．

注意 4.24 より，$\mathcal{M}^{(0)}$ は $\mathbb{X}$ の普遍変形空間である．一方，$(\mathrm{Sh}_{0,N})^\wedge_x$ は (E,η_N) の普遍変形空間である．η_N は有限エタール群スキームの間の同型なので，E の変形を与えると η_N の変形は一意的に決まってしまう．したがって $(\mathrm{Sh}_{0,N})^\wedge_x$ は E の普遍変形空間となる．Serre-Tate の定理（証明は [Mes72] や [Dri76, Appendix] を参照）により，E の変形と $E[p^\infty]\cong\mathbb{X}$ の変形は圏同値になるので，同型 $\mathcal{M}^{(0)}\cong(\mathrm{Sh}_{0,N})^\wedge_x$ が得られた．

次に，一般の場合を考える．x の $\mathrm{Sh}_{0,N}$ における像を y とすると，自然な同型 $\mathcal{M}^{(0)}_m\cong(\mathrm{Sh}_{0,N})^\wedge_y\times_{\mathrm{Sh}_{0,N}}\mathrm{Sh}_{m,N}$ がある（両辺とも $\mathcal{M}^{(0)}\cong(\mathrm{Sh}_{0,N})^\wedge_y$ 上の普遍 p 可除群の Drinfeld レベル構造を分類する空間であるため）．$\mathrm{Sh}_{m,N}\longrightarrow\mathrm{Sh}_{0,N}$ は有限射であるから，右辺は $\coprod_{x'\mapsto y}(\mathrm{Sh}_{m,N})^\wedge_{x'}$ と一致する．一方，定理 4.44 iv) より左辺の底空間は 1 点であるから，y にうつる $x'\in\mathrm{Sh}_{m,N}$ は x のみであることが分かる．したがって $(\mathrm{Sh}_{0,N})^\wedge_y\times_{\mathrm{Sh}_{0,N}}\mathrm{Sh}_{m,N}=(\mathrm{Sh}_{m,N})^\wedge_x$ となり，$\mathcal{M}^{(0)}_m\cong(\mathrm{Sh}_{m,N})^\wedge_x$ が得られる． ■

上の定理の証明において，以下の系も得られている．

系 4.61
$\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_{m,N}(\overline{\mathbb{F}}_p)\longrightarrow\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_{0,N}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ は全単射である．

命題 4.60 を用いて $(R^i\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x$ を計算することができる：

系 4.62
$x\in\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_{m,N}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ に対し，$(R^i\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x\cong H^i(M^{(0)}_m\otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}}\mathbb{C}_p,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ が成り立つ．

証明　[Ber96, Theorem 3.1] と命題 4.60 の帰結である．∎

次に $\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_{m,N}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ を記述しよう．系 4.61 より，$m = 0$ の場合を考えれば十分である．

命題 4.63
$\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の超特異楕円曲線 E_0 を固定し，$B = \mathrm{End}(E_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とおく．$\mathbb{Q}$ 上の代数群 I を，$\mathbb{Q}$ 代数 R に対し $I(R) = (B \otimes_{\mathbb{Q}} R)^{\times}$ とおくことにより定める．

i) 同型 $\mathbb{X} \cong E_0[p^\infty]$ および $(\widehat{\mathbb{Z}}^p)^2 \cong T^p E_0 = \prod_{\ell \neq p} T_\ell E_0$ を固定する．このとき，$B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \cong D$, $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \cong M_2(\mathbb{Q}_\ell)$ $(\ell \neq p)$ が定まる．特に，B は ∞, p でのみ分岐する $\mathbb{Q}$ 上の四元数体である．これらの同型から，群準同型 $j_p \colon I(\mathbb{Q}) \hookrightarrow I(\mathbb{Q}_p) \cong D^{\times}$ および $j^{\infty,p} \colon I(\mathbb{Q}) \hookrightarrow I(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}}) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})$ が定まる．

ii) i) の状況において，次の同型がある：

$$\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_{0,N}(\overline{\mathbb{F}}_p) \cong I(\mathbb{Q}) \backslash \mathbb{Z} \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}}) / K^p(N).$$

ただし，$K^p(N) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})$ は $K(N) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \cdot K^p(N)$ を満たすコンパクト開部分群である．また，$I(\mathbb{Q})$ の $\mathbb{Z} \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})$ への作用は以下で与えられるものとする：

- $h \in I(\mathbb{Q})$ は $\mathbb{Z}$ に $\delta \mapsto \delta - v_p(\mathrm{Nrd}\, j_p(h))$ で作用する．
- $h \in I(\mathbb{Q})$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})$ に $g \mapsto j^{\infty,p}(h) g$ で作用する．

証明の準備として，まず次の補題を証明する．この補題は，有限体上のアーベル多様体の同種類を分類する理論である**本田・Tate 理論** ([Hon68], [Tat71]) の特別な場合と見ることができる．

補題 4.64
$\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の任意の超特異楕円曲線は互いに同種である．

証明　$\mathbb{F}_q$ を $\mathbb{F}_p$ の有限次拡大とし，E, E' を $\mathbb{F}_q$ 上の超特異楕円曲線とする．$E \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_p$ と $E' \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_p$ が同種であることを示せばよい．$\mathrm{End}(E \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_p) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $\mathrm{End}(E' \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_p) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}$ 上の四元数体であるから，$\mathbb{F}_q$ を有限次拡大にとりかえることで，$\mathrm{End}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $\mathrm{End}(E') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ も $\mathbb{Q}$ 上の四元数体であるとしてよい．

$\mathrm{Frob}_E \in \mathrm{End}(E)$ を E の q 乗 Frobenius 射とする．これは $\mathrm{End}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の中心 $\mathbb{Q}$ に属するので，$\mathrm{Frob}_E \in \mathbb{Z}$ となる．一方，ℓ を p と異なる素数とすると，Weil 予想より Frob_E の $T_\ell E$ への作用の固有値の複素絶対値は $\sqrt{q}$ である．これらを合わせると $\mathrm{Frob}_E = \pm\sqrt{q}$ が得られる．よって $E \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^2}$ の q^2 乗 Frobenius 射 $\mathrm{Frob}_{E \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^2}}$ は q^2 倍写像である．同様に $\mathrm{Frob}_{E' \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^2}}$ も q^2 倍写像である．特に，$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p / \mathbb{F}_{q^2})$

の表現として $T_\ell(E \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^2}) \cong T_\ell(E' \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^2})$ である．Tate の定理（有限体上のアーベル多様体に対する Tate 予想，[Tat66] 参照）から $E \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^2}$ と $E' \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^2}$ が同種であることが分かるので，$E \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_p$ と $E' \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_p$ も同種である． ∎

命題 4.63 の証明　i) を示す．まず，Tate の定理の p 進版 ([WM71]) より，$\mathrm{End}(E_0)\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p \cong \mathrm{End}(E_0[p^\infty]) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \cong \mathrm{End}(\mathbb{X}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$，すなわち $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \cong D$ が成り立つ．これより B は $\mathbb{Q}$ 上の四元数体であることも分かる．次に ℓ を p と異なる素数とすると，単射 $\mathrm{End}(E_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell E_0) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \cong M_2(\mathbb{Q}_\ell)$ が得られる．$\mathrm{End}(E_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell$ は $\mathbb{Q}_\ell$ 上 4 次元なのでこの単射は同型となり，$B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \cong M_2(\mathbb{Q}_\ell)$ が従う．特に B は p で分岐し，p 以外の素数 ℓ で分裂するので，∞ では分岐することも分かる．

ii) を示す．次のような 3 つ組 (E, ξ, η^p) の同型類の集合を $\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_\infty(\overline{\mathbb{F}}_p)$ と書く：

- E は $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の超特異楕円曲線.
- $\xi\colon \mathbb{X} \xrightarrow{\cong} E[p^\infty]$.
- $\eta^p\colon (\widehat{\mathbb{Z}}^p)^2 \xrightarrow{\cong} T^p E$.

これは，次のような 3 つ組 $(E, \xi_{\mathbb{Q}}, \eta^p_{\mathbb{Q}})$ の同種類の集合と同一視できる：

- E は $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の超特異楕円曲線.
- $\xi_{\mathbb{Q}}\colon \mathbb{X} \longrightarrow E[p^\infty]$ は準同種写像.
- $\eta^p_{\mathbb{Q}}\colon (\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})^2 \xrightarrow{\cong} V^p E (= T^p E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$.

この集合には $D^\times \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})$ の右作用を定めることができる：$(h,g) \in D^\times \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})$ の作用は $(E, \xi_{\mathbb{Q}}, \eta^p_{\mathbb{Q}}) \mapsto (E, \xi_{\mathbb{Q}} \circ h, \eta^p_{\mathbb{Q}} \circ g)$ とする．この作用が推移的であることを示そう．2 つの 3 つ組 $(E, \xi_{\mathbb{Q}}, \eta^p_{\mathbb{Q}})$, $(E', \xi'_{\mathbb{Q}}, \eta'^p_{\mathbb{Q}})$ をとると，補題 4.64 より同種写像 $\phi\colon E' \longrightarrow E$ が存在する．$h = \xi_{\mathbb{Q}}^{-1} \circ \phi[p^\infty] \circ \xi'_{\mathbb{Q}}$, $g = (\eta^p_{\mathbb{Q}})^{-1} \circ V^p\phi \circ \eta'^p_{\mathbb{Q}}$ とおくと

$$(E', \xi'_{\mathbb{Q}}, \eta'^p_{\mathbb{Q}}) \sim (E, \phi[p^\infty] \circ \xi'_{\mathbb{Q}}, V^p\phi \circ \eta'^p_{\mathbb{Q}}) = (E, \xi_{\mathbb{Q}} \circ h, \eta^p_{\mathbb{Q}} \circ g)$$

となるので，$(E, \xi_{\mathbb{Q}}, \eta^p_{\mathbb{Q}})$, $(E', \xi'_{\mathbb{Q}}, \eta'^p_{\mathbb{Q}})$ は $D^\times \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})$ の作用でうつりあう．

i) の設定においては 3 つ組 $x_0 = (E_0, \xi_{0,\mathbb{Q}}, \eta^p_{0,\mathbb{Q}})$ が定まっていた．これの安定化群を考えよう．$(E_0, \xi_{0,\mathbb{Q}}, \eta^p_{0,\mathbb{Q}})$ と $(E_0, \xi_{0,\mathbb{Q}} \circ h, \eta^p_{0,\mathbb{Q}} \circ g)$ が同種であったとすると，$\phi \in (\mathrm{End}(E_0)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})^\times = B^\times$ が存在して $\phi[p^\infty]\circ\xi_{0,\mathbb{Q}} = \xi_{0,\mathbb{Q}}\circ h$, $V^p(\phi)\circ\eta^p_{0,\mathbb{Q}} = \eta^p_{0,\mathbb{Q}}\circ g$ となる．このとき j_p, $j^{\infty,p}$ の定義より $j_p(\phi) = h$, $j^{\infty,p}(\phi) = g$ を得る．すなわち，x_0 の安定化群は $(j_p, j^{\infty,p})\colon I(\mathbb{Q}) \hookrightarrow D^\times \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})$ の像と一致する．

以上より，全単射 $\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_\infty(\overline{\mathbb{F}}_p) \cong I(\mathbb{Q})\backslash D^\times \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})$ がある．$\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_{0,N}(\overline{\mathbb{F}}_p) = \overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_\infty(\overline{\mathbb{F}}_p)/(\mathcal{O}_D^\times \times K^p(N))$ と $D^\times/\mathcal{O}_D^\times \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$; $h \mapsto -v_F(\mathrm{Nrd}\, h)$ に注意すると，ii) の同型

$$\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_{0,N}(\overline{\mathbb{F}}_p) = I(\mathbb{Q})\backslash \mathbb{Z} \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})/K^p(N)$$

が得られる． ∎

命題 4.60 と命題 4.63 をまとめたものが次の定理である．

定理 4.65（p 進一意化定理）
$\mathrm{Sh}_{m,N}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p^{\mathrm{ur}}$ の $\overline{\mathrm{Sh}}_{m,N}^{\mathrm{ss}}$ に沿った完備化を $(\mathrm{Sh}_{m,N})_{\mathrm{ss}}^{\wedge}$ と書く．命題 4.63 と同様，$\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の超特異楕円曲線 E_0 および同型 $\mathbb{X}\cong E_0[p^\infty]$, $(\widehat{\mathbb{Z}}^p)^2\cong T^pE_0$ を固定する．また，E_0 の $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}$ 上への持ち上げ $\widetilde{E}_0$ も固定する．

このとき，各 m, N に対し $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}$ 上の形式スキームの同型

$$I(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{M}_m\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p})/K^p(N)\cong(\mathrm{Sh}_{m,N})_{\mathrm{ss}}^{\wedge}$$

がある．ここで，$I(\mathbb{Q})$ の $\mathcal{M}_m\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p})$ への作用は以下で与えられる：

- $h\in I(\mathbb{Q})$ の $\mathcal{M}_m$ への作用は $j_p(h)^{-1}\in D^\times$ の $\mathcal{M}_m$ への右作用として定める．
- $h\in I(\mathbb{Q})$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p})$ への作用は命題 4.63 ii) と同様.

この同型は m, N の変更と両立する．また，両辺の Hecke 作用（$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty})$ の右作用）および Weil 降下データはこの同型で保たれる（右辺の Weil 降下データは $\mathrm{Sh}_{m,N}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Z}_p^{\mathrm{ur}}$ の自然な Weil 降下データから誘導されるものを考える）.

証明　まず $m=0$ の場合に考える．$S\in\mathbf{Nilp}$, $(X,\rho)\in\mathcal{M}(S)$, $g\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p})$ をとり，$((X,\rho),g)$ に対応する $\mathrm{Sh}_{0,N}(S)$ の元を構成する．同型 $\mathbb{X}\cong E_0[p^\infty]$ が固定されているので，ρ は準同種写像 $E_0[p^\infty]\times_{\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p}\overline{S}\longrightarrow X\times_S\overline{S}$ を誘導する．準同種写像の剛性より，これは準同種写像 $\widetilde{\rho}$: $\widetilde{E}_0[p^\infty]\times_{\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}}S\longrightarrow X$ に一意的に持ち上がる．このとき，S 上の楕円曲線の p 準同種写像（次数が p の冪であるような準同種写像）ϕ: $\widetilde{E}_0\otimes_{\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}}S\longrightarrow E_1$ で $\phi[p^\infty]$ が $\widetilde{\rho}$ と同一視できるようなものが（同型を除き）一意的に存在する．一方，p と素な整数 $N'\geq 3$ を一つとると，固定していた同型 $(\widehat{\mathbb{Z}}^p)^2\cong T^pE_0$ から E_0 のレベル構造 $(\mathbb{Z}/N'\mathbb{Z})^2\cong E_0[N']$ が定まる．これは同型 $(\mathbb{Z}/N'\mathbb{Z})^2\cong\widetilde{E}_0[N']$ に一意的に延長され，$\phi[N']$: $\widetilde{E}_0[N']\otimes_{\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}}S\longrightarrow E_1[N']$ が同型であることに注意すると，E_1 のレベル構造 $\eta_{1,N'}$: $(\mathbb{Z}/N'\mathbb{Z})^2\cong E_1[N']$ も定まることが分かる．特に N' を $g^{-1}K^p(N')g\subset K^p(N)$ を満たすようにとり，Hecke 作用素 $[g]$: $\mathrm{Sh}_{0,N'}(S)\longrightarrow\mathrm{Sh}_{0,N}(S)$ による $(E_1,\eta_{1,N'})\in\mathrm{Sh}_{0,N'}(S)$ の像を (E,η_N) と書く．$\mathcal{M}(S)\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p})\longrightarrow\mathrm{Sh}_{0,N}(S)$ を $((X,\rho),g)\mapsto(E,\eta_N)$ により定める．簡単な議論により，この写像は $I(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{M}(S)\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p})/K^p(N)\longrightarrow\mathrm{Sh}_{0,N}(S)$ を引き起こすことが分かる．また，$S=\overline{\mathbb{F}}_p$ のときに像が $\overline{\mathrm{Sh}}_{0,N}^{\mathrm{ss}}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ に含まれることも分かる．以上より，$\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}$ 上の形式スキームの射

$$I(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{M}\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p})/K^p(N)\longrightarrow(\mathrm{Sh}_{0,N})_{\mathrm{ss}}^{\wedge}$$

が得られた.

$m\geq 1$ の場合には上記の X に Drinfeld レベル構造がつくが，それに応じて E に

も Drinfeld レベル構造がつくことが構成から分かるので，形式スキームの射

$$I(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{M}_m \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p})/K^p(N) \longrightarrow (\mathrm{Sh}_{m,N})^{\wedge}_{\mathrm{ss}}$$

が得られる．これが底空間（有限集合！）に全単射を誘導することは命題 4.63 より従い，各点において局所的に同型となることは命題 4.60 より従うので，それ自身同型となる．

様々な構造との整合性は定義より容易に分かる． ∎

この命題を用いると，H^i_{ss} と H^i_{LT} を結び付けることができる．

系 4.66

命題 4.63 i) の同型 $I(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}}) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})$, $I(\mathbb{Q}_p) \cong D^\times$ によって $I(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})$ と $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})$, $I(\mathbb{Q}_p)$ と $D^\times$ を同一視する．このとき，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty}_{\mathbb{Q}}) \times W_{\mathbb{Q}_p}$ の表現としての同型

$$H^i_{\mathrm{ss}} \cong \bigoplus_{\Pi;\Pi_\infty=\mathbf{1}} \Pi^{\infty,p} \otimes \mathrm{Hom}_{D^\times}(H^{2-i}_{\mathrm{LT}}, \Pi_p)^{\mathrm{sm}}(-1)$$

がある．ここで，Π は $I(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の保型表現で $\Pi_\infty = \mathbf{1}$ となるもの全体を動く．

証明　命題 4.63 ii) より，$I(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})/K^p(N)$ は有限集合であった．これの完全代表系 $g^p_1,\ldots,g^p_k \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})$ をとり，$\Gamma_j = g^p_j K^p(N)(g^p_j)^{-1} \cap I(\mathbb{Q})$ とおく．これを $I(\mathbb{Q}) \hookrightarrow I(\mathbb{Q}_p) = D^\times$ によって $D^\times$ の部分群と見ると，離散的かつ余コンパクトな部分群となる．さらに，N を十分大きくとると，Γ_j は $\mathcal{M}_m$ の底空間に自由に作用する．

$$I(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{M}_m \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})/K^p(N) = \coprod_{j=1}^{k} \mathcal{M}_m/\Gamma_j$$

であるから，定理 4.65 の同型の両辺のリジッド一般ファイバーのコホモロジーをとることで，

$$H^i(\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_{m,N}, R\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ss}}_{m,N}}) = \bigoplus_{j=1}^{k} H^i(M_m/\Gamma_j)$$

を得る（記号の簡略化のため，$H^i((M_m/\Gamma_j) \otimes_{\widehat{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ur}}_p} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を単に $H^i(M_m/\Gamma_j)$ と書いている）．M_m/Γ_j は $M^{(\delta)}_m$ の有限個の直和と同型であるから，Poincaré 双対定理より

$$H^i(M_m/\Gamma_j) \cong \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\bigl(H^{2-i}_c(M_m/\Gamma_j), \overline{\mathbb{Q}}_\ell\bigr)(-1) = \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\bigl(H^{2-i}_c(M_m), \overline{\mathbb{Q}}_\ell\bigr)^{\Gamma_j}(-1)$$

となる．

$V_m = \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(H_c^{2-i}(M_m), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(-1)$ とおく．$a = (a_j) \in \bigoplus_{j=1}^k V_m^{\Gamma_j}$ に対し，写像

$$f_a\colon I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\infty)/K^p(N) \longrightarrow V_m$$

を $f(\gamma g_j^p g_p k) = g_p^{-1} a_j$ $(\gamma \in I(\mathbb{Q}), 1 \le j \le k, g_p \in D^\times, k \in K^p(N))$ によって定める．これは well-defined であり，$f_a(gg_p) = g_p^{-1} f_a(g)$ $(g \in I(\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\infty), g_p \in D^\times)$ を満たす．逆に, この条件を満たす写像 f に対し $a_j = f(g_j^p)$ とおくと $a = (a_j) \in \bigoplus_{j=1}^k V_m^{\Gamma_j}$ である．したがって

$$H^i(\overline{\mathrm{Sh}}_{m,N}^{\mathrm{ss}}, R\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\overline{\mathrm{Sh}}_{m,N}^{\mathrm{ss}}}) \cong \{f\colon I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\infty)/K^p(N) \longrightarrow V_m \mid f(gg_p) = g_p^{-1} f(g)\}$$

となる．

$I(\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\infty)$ 上の保型形式の空間 $\mathcal{A}$ を

$$\mathcal{A} = \{\varphi\colon I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\infty) \longrightarrow \mathbb{C} = \overline{\mathbb{Q}}_\ell \mid \varphi \text{ はスムーズ}\}$$

と定める．上の同型の右辺は $(\mathcal{A}^{K^p(N)} \otimes V_m)^{D^\times}$ と同一視できるので，N, m に関して極限をとることで次の同型が得られる：

$$H_{\mathrm{ss}}^i \cong \bigl(\mathcal{A} \otimes \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(H_{\mathrm{LT}}^{2-i}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{sm}}(-1)\bigr)^{D^\times}.$$

左辺には $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p}$ が作用する．一方，$\mathcal{A}$ には右移動によって $I(\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\infty) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}^{\infty,p}) \times D^\times$ が作用するので，右辺にも $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p}$ が作用することが分かる．上の同型はこれらの作用と可換であることが容易に確かめられる．

最後に直和分解 $\mathcal{A} = \bigoplus_{\Pi;\Pi_\infty=\mathbf{1}} \Pi^\infty$ を使うことで,

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{ss}}^i &\cong \bigoplus_{\Pi;\Pi_\infty=\mathbf{1}} \bigl(\Pi^\infty \otimes \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(H_{\mathrm{LT}}^{2-i}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{sm}}(-1)\bigr)^{D^\times} \\ &= \bigoplus_{\Pi;\Pi_\infty=\mathbf{1}} \Pi^{\infty,p} \otimes \mathrm{Hom}_{D^\times}(H_{\mathrm{LT}}^{2-i}, \Pi_p)^{\mathrm{sm}}(-1) \end{aligned}$$

となり結論を得る． ∎

系 4.67

Π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の尖点的保型表現とし，$\Pi_\infty \cong D_{1,0}$ と仮定する．このとき，次が成り立つ：

i) Π_p が超尖点表現ならば，$W_{\mathbb{Q}_p}$ 表現の同型 $H_{\mathrm{ss}}^1[\Pi^\infty] \cong \mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ss}}(\Pi_p)^\vee(-\frac{1}{2})$ がある（$\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ss}}(\Pi_p)$ は $\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\Pi_p)$ の半単純化を表すのであった）．

ii) $\Pi_p = \mathrm{St}_2 \otimes (\chi \circ \det)$（$\chi$ は $F^\times$ のスムーズ指標）ならば，$W_{\mathbb{Q}_p}$ 表現の同型 $H_{\mathrm{ss}}^1[\Pi^\infty] \cong \mathrm{Hom}_{D^\times}(H_{\mathrm{LT}}^1, \chi \circ \mathrm{Nrd})^{\mathrm{sm}}[\mathrm{St}_2 \otimes (\chi \circ \det)](-1)$ がある．

iii) Π_p が離散系列表現でないならば，$H_{\mathrm{ss}}^1[\Pi^\infty] = 0$ である．

証明　系 4.66 において両辺の Π^∞ 部分をとると，次の等式が得られる：

$$H^1_{\mathrm{ss}}[\Pi^\infty] \cong \bigoplus_{\substack{\Pi' \\ \Pi'_\infty = \mathbf{1}, \\ (\Pi')^{\infty,p}=\Pi^{\infty,p}}} \mathrm{Hom}_{D^\times}(H^1_{\mathrm{LT}}, \Pi'_p)^{\mathrm{sm}}[\Pi_p](-1). \qquad (*)$$

まず, Π_p が離散系列表現であると仮定する．このとき, 次を満たすような $I(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現 $\mathrm{LJ}(\Pi)$ が一意的に存在することが知られている (**大域 Jacquet-Langlands 対応**)：

- $\mathrm{LJ}(\Pi)^{\infty,p} = \Pi^{\infty,p}$.
- $\mathrm{LJ}(\Pi)_p = \mathrm{LJ}(\Pi_p)$.
- $\mathrm{LJ}(\Pi)_\infty = \mathbf{1} = \mathrm{LJ}(D_{1,0}) = \mathrm{LJ}(\Pi_\infty)$（注意 4.35 参照）.

さらに，$I(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現 Π' が $\Pi^{\infty,p} = (\Pi')^{\infty,p}$ を満たすならば $\Pi' = \mathrm{LJ}(\Pi)$ である．よって，$(*)$ の右辺は $\mathrm{Hom}_{D^\times}(H^1_{\mathrm{LT}}, \mathrm{LJ}(\Pi_p))^{\mathrm{sm}}[\Pi_p](-1)$ となる．Π_p が超尖点表現のときは，$\mathrm{Hom}_{D^\times}(H^1_{\mathrm{LT}}, \mathrm{LJ}(\Pi_p))^{\mathrm{sm}}$ が $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現として Π_p と同じ中心指標を持つことに注意すると，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{D^\times}\bigl(H^1_{\mathrm{LT}}, \mathrm{LJ}(\Pi_p)\bigr)^{\mathrm{sm}}[\Pi_p](-1) \\
&\quad = \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\bigl(\Pi_p, \mathrm{Hom}_{D^\times}(H^1_{\mathrm{LT}}, \mathrm{LJ}(\Pi_p))\bigr)^{\mathrm{ss}}(-1) = \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{\mathbb{Q}_p}(\Pi_p)^\vee(-\tfrac{1}{2})
\end{aligned}$$

となるので i) が従う．$\Pi_p = \mathrm{St}_2 \otimes (\chi \circ \det)$ のときは $\mathrm{LJ}(\Pi_p) = \chi \circ \mathrm{Nrd}$ であるから (例 4.34 参照)，ii) も示された．

Π_p が離散系列表現でないとき，$I(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現 Π' で $\Pi^{\infty,p} = (\Pi')^{\infty,p}$ を満たすものは存在しない．よって $(*)$ の右辺は 0 になり，$H^1_{\mathrm{ss}}[\Pi^\infty] = 0$ が得られる．■

系 4.67 ii) の右辺に出てきた $\mathrm{Hom}_{D^\times}(H^1_{\mathrm{LT}}, \chi \circ \mathrm{Nrd})^{\mathrm{sm}}[\mathrm{St}_2 \otimes (\chi \circ \det)]$ がどのような表現になるかはこれまでの議論からは分からない．これを決定する方法はいくつかあるが, 例えば

- Lubin-Tate 塔の連結成分の計算 ([Str08b], [Che12]),
- $\chi^{-1} \circ \det$ の属する Bernstein 成分を $\mathfrak{s}$ と書くとき, $H^2_{\mathrm{LT},\mathfrak{s}}$ と $H^1_{\mathrm{LT},\mathfrak{s}}$ が Zelevinsky 対合で結び付くという事実 ([Far06])

を組み合わせればよい．結果を以下に述べておく．

定理 4.68

ここでは F を一般の p 進体とし，$\mathrm{GL}_n(F)$ の Lubin-Tate 空間を考える．

i) ω を $F^\times$ のスムーズ指標とするとき，次が成り立つ：

$$H^{2(n-1)}_{\mathrm{LT},\omega} = \bigoplus_{\chi^n = \omega} (\chi^{-1} \circ \det) \boxtimes (\chi \circ \mathrm{Nrd}) \boxtimes \mathrm{rec}_F(\chi)(-n+1).$$

ここで χ は $\chi^n = \omega$ を満たす $F^\times$ のスムーズ指標を動く．

ii) χ を $F^\times$ のスムーズ指標とし，$\chi^{-1}\circ\det$, $\chi\circ\det$ の属する Bernstein 成分をそれぞれ $\mathfrak{s}, \mathfrak{s}^\vee$ と書く（Bernstein 分解については [Ber84] や [Ren10, Chapitre VI] を参照）．$\mathrm{Zel}_{\chi^{-1}}$ で中心指標 χ^{-1} を持つ $\mathrm{GL}_n(F)$ の表現に対する Zelevinsky 対合を表す（[Far06, §1] 参照）．このとき，次が成り立つ：

$$\begin{aligned} H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi\circ\mathrm{Nrd},\mathfrak{s}} &\cong \mathrm{Zel}_{\chi^{-1}}\big((H^{2(n-1)}_{\mathrm{LT},\chi^{-1}\circ\mathrm{Nrd},\mathfrak{s}^\vee})^\vee\big)(-n+1) \\ &= \mathrm{Zel}_{\chi^{-1}}\big(\mathrm{Hom}_{D^\times}(H^{2(n-1)}_{\mathrm{LT}}, \chi^{-1}\circ\mathrm{Nrd})^{\mathrm{sm}}_{\mathfrak{s}}\big)(-n+1). \end{aligned}$$

ここで，$H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi\circ\mathrm{Nrd},\mathfrak{s}}$ の定義は次の通りである：$\omega=\chi^n$ を $\chi\circ\mathrm{Nrd}$ の中心指標とすると，$H^{n-1}_{\mathrm{LT},\omega}$（定義 4.39）は $H^{n-1}_{\mathrm{LT},\omega}=\bigoplus_\rho H^{n-1}_{\mathrm{LT},\rho}\boxtimes\rho$ と直和分解する（ρ は中心指標 ω を持つ $D^\times$ の既約スムーズ表現を動き，$H^{n-1}_{\mathrm{LT},\rho}$ は $\mathrm{GL}_n(F)\times W_F$ の表現である）．$H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi\circ\mathrm{Nrd},\mathfrak{s}}$ は $H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi\circ\mathrm{Nrd}}$ の $\mathfrak{s}$ 部分として得られる $\mathrm{GL}_n(F)\times W_F$ の表現である．

iii) 次が成り立つ：

$$\mathrm{Hom}_{D^\times}(H^{n-1}_{\mathrm{LT}}, \chi\circ\mathrm{Nrd})^{\mathrm{sm}}[\mathrm{St}_n\otimes(\chi\circ\det)] = \mathrm{rec}_F(\chi)^{-1}.$$

iii) の証明　i), ii) より

$$H^{n-1}_{\mathrm{LT},\chi\circ\mathrm{Nrd},\mathfrak{s}} = \mathrm{Zel}_{\chi^{-1}}(\chi^{-1}\circ\det)\otimes\mathrm{rec}_F(\chi) = \big(\mathrm{St}_n\otimes(\chi^{-1}\circ\det)\big)\otimes\mathrm{rec}_F(\chi)$$

が成り立つ．iii) はこれと $\mathrm{St}_n^\vee=\mathrm{St}_n$ より直ちに従う．■

■ H^i_{ord} について

$\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ord}}_{m,N}$ は 0 次元ではないため，H^i_{ord} の分析は H^i_{ss} よりも困難である．まずはじめに，命題 4.49 と同様の方法を用いて，Π_p が超尖点表現であるときに $H^i_{\mathrm{ord}}[\Pi^\infty]=0$ であることを示そう．

命題 4.69
Π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現とし，Π_p は超尖点表現であると仮定する．このとき，$H^i_{\mathrm{ord}}[\Pi^\infty]=0$ となる．

略証　$\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ord}}_{m,N}$ の点は 3 つ組 (E,η_N,η_p)（E は $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の通常楕円曲線，η_N はレベル構造，η_p は Drinfeld レベル構造）で表されるのであった．E は通常楕円曲線であるから，$0\longrightarrow E[p^m]^0\longrightarrow E[p^m]\longrightarrow E[p^m]^{\text{ét}}\longrightarrow 0$ と連結部分，エタール部分に分解すると，$E[p^m]^0\cong\mu_{p^m}$, $E[p^m]^{\text{ét}}\cong\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ である．Drinfeld レベル構造の条件から，合成 $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^2\xrightarrow{\eta_p}E[p^m]\longrightarrow E[p^m]^{\text{ét}}\cong\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ は全射になる．したがって $\mathrm{Ker}\,\eta_p$ は $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^2$ の階数 1 の直和因子となる．

定義 4.46 と同様，$(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^2$ の階数 1 の直和因子 $I \in \mathcal{S}_{m,1}$ に対し，条件 $I \subset \operatorname{Ker}\eta_p$ で定まる $\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ord}}_{m,N}$ の閉部分スキームを $\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ord}}_{m,N,I}$ と書く．このとき，$\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ord}}_{m,N} = \coprod_I \overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ord}}_{m,N,I}$ である．$I_0 = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{Z}_p\}$ とおき，

$$H^i_{\mathrm{ord},I_0} = \varinjlim_{m,N} H^i_c(\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ord}}_{m,N,I \bmod p^m}, R\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

と定める．これは $B(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}}) \times \Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ の表現となる．

岩澤分解 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) = B(\mathbb{Q}_p)\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ より

$$B(\mathbb{Q}_p)\backslash\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/K_m \cong B(\mathbb{Z}_p)\backslash\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)/K_m \cong \mathcal{S}_{m,1}$$

が成り立つことに注意すると，

$$H^i_{\mathrm{ord}} \cong \mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}_{B(\mathbb{Z}_p)} H^i_{\mathrm{ord},I_0} \cong \mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}_{B(\mathbb{Q}_p)} H^i_{\mathrm{ord},I_0}$$

が得られる．これは $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ の表現としての同型であるが, Hecke 作用によって分割 $\overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ord}}_{m,N} = \coprod_I \overline{\mathrm{Sh}}^{\mathrm{ord}}_{m,N,I}$ がどのように動くかを見ることで，$H^i_{\mathrm{ord}} \cong \mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}_{B(\mathbb{Q}_p)} H^i_{\mathrm{ord},I_0}$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現としての同型であることが分かる．

H^i_{ord,I_0} は $B(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})$ の表現として許容的であることが容易に分かる．特に，コンパクト開部分群 $K^p \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}_{\mathbb{Q}})$ を固定すると，$(H^i_{\mathrm{ord},I_0})^{K^p}$ は $B(\mathbb{Q}_p)$ の許容表現である．したがって [Boy99, Lemme 13.2.3] より，$B(\mathbb{Q}_p)$ の冪単根基は $(H^i_{\mathrm{ord},I_0})^{K^p}$ に自明に作用する．すなわち，$(H^i_{\mathrm{ord}})^{K^p} = \mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}_{B(\mathbb{Q}_p)} (H^i_{\mathrm{ord},I_0})^{K^p}$ は放物型誘導表現であり，その部分商に $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の超尖点表現は現れない．一方 Π_p は超尖点表現であると仮定していたので，$H^i_{\mathrm{ord}}[\Pi^\infty] = 0$ となる． ∎

系 4.67 と命題 4.69 を合わせると，定理 4.55 のうち Π_p が超尖点表現となる場合の証明ができる．

系 4.70

Π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の保型表現とし，以下を仮定する：

- $\Pi_\infty \cong D_{1,0}$.
- Π_p は超尖点表現.

このとき，$(R_\Pi)_p = \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{\mathbb{Q}_p}(\Pi_p)^\vee(-\frac{1}{2})$ が成り立つ.

証明　完全系列 $H^1_{\mathrm{ord}} \longrightarrow H^1_c(\overline{\mathrm{Sh}}_\infty, R\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow H^1_{\mathrm{ss}} \longrightarrow H^2_{\mathrm{ord}}$ と命題 4.58，命題 4.69，系 4.67 i) より，

$$(R_\Pi)_p = H^1_c(\overline{\mathrm{Sh}}_\infty, R\psi\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[\Pi^\infty] = H^1_{\mathrm{ss}}[\Pi^\infty] = \mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{\mathbb{Q}_p}(\Pi_p^\vee)(-\tfrac{1}{2})$$

となるのでよい． ∎

ここまでの議論で，Lubin-Tate 塔のコホモロジー H^1_{LT} とモジュラー曲線のコホモロジー $H^1_c(\mathrm{Sh}_\infty)$ がどのようにして繋がっているかを理解していただけたと思う．本稿の残りの部分では，Π_p が超尖点的でない場合に $H^i_{\mathrm{ord}}[\Pi^\infty]$ を調べる技術を紹介する．これはなかなか込み入っているので，正確な定式化や証明を与えることは断念し，概略を述べるに留めた部分も多い．ご了承いただければ幸いである．

まず，命題 4.60 の類似を考える．E を $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の通常楕円曲線とすると $E[p^\infty] \cong \mu_{p^\infty} \oplus (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ であるから，$\mathcal{M}_m$ の定義における $\mathbb{X}$ を $\mu_{p^\infty} \oplus (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ に置き換えて得られる Lubin-Tate 空間の類似 $\mathcal{N}_m$ を考えるのが自然であろう．$\mathbf{QIsog}(\mu_{p^\infty} \oplus (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)) \cong \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$ に注意すると，$\{\mathcal{N}_m\}$ のリジッド一般ファイバー $\{N_m\}$ のコホモロジー

$$H^i_c(N_\infty) = \varinjlim_m H^i_c(N_m \otimes_{\breve{F}} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

には $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times (\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times) \times W_{\mathbb{Q}_p}$ が作用する．$\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ の Lubin-Tate 塔と $\{N_m\}$ を比較することで，$H^i_c(N_\infty)$ は以下のように局所類体論を用いて記述できることが分かる：

命題 4.71

χ_1, χ_2 を $\mathbb{Q}_p^\times$ のスムーズ指標とするとき，次が成り立つ：

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times}\bigl(H^2_c(N_\infty), \chi_1 \boxtimes \chi_2\bigr)^{\mathrm{sm}} = \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\chi_1 \boxtimes \chi_2) \otimes \mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1)^{-1}(1).$$

また，$i \neq 2$ のとき $H^i_c(N_\infty) = 0$ である．

略証　まず $i \neq 2$ のときに $H^i_c(N_\infty) = 0$ を示す．このためには，$\mu_{p^\infty} \oplus (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ のレベル m 付き普遍変形空間 $\mathcal{N}_m^{(0,0)}$ のリジッド一般ファイバー $N_m^{(0,0)}$ のコホモロジーについて同様のことを考えればよい．μ_{p^∞} のレベル m 付き普遍変形空間を $\mathrm{Spf}\, R'_m$ とおくと，$\mathcal{N}_m^{(0,0)}$ は $\mathrm{Spf}\, R'_m[[T]]$ の有限個の直和と同型であることが証明できる（[HT01, p. 80–81] 参照）．例 4.45 より $R'_m \cong \widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}[\mu_{p^m}]$ なので，$\mathrm{Spf}\, R'_m[[T]]$ のリジッド一般ファイバーは $\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}(\mu_{p^m})$ 上の開円盤であるから，そのコンパクト台コホモロジーは $i \neq 2$ のとき 0 になる．以上で $H^i_c(N_\infty) = 0$ $(i \neq 2)$ が示された．

前半部分も同様の観察によって証明することができるが，ここではより一般の結果 [Man08] を使う方法を説明する．Lubin-Tate 塔 $\{M_m\}$ の定義において $\mathbb{X}$ を μ_{p^∞}, $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ に置き換えて得られるリジッド空間の塔をそれぞれ $\{M'_m\}$, $\{N'_m\}$ と書く．これらのコホモロジー

$$H^i_c(M'_\infty) = \varinjlim_m H^i_c(M'_m \otimes_{\breve{F}} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \quad H^i_c(N'_\infty) = \varinjlim_m H^i_c(N'_m \otimes_{\breve{F}} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

には $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p) \times \mathbb{Q}_p^\times \times W_{\mathbb{Q}_p}$ が作用する．M'_m, N'_m はいずれも 0 次元であるから，$i > 0$ のとき $H^i_c(M'_\infty) = H^i_c(N'_\infty) = 0$ である．また，χ を $\mathbb{Q}_p^\times$ のスムーズ指標とす

ると，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p^\times}\bigl(H_c^0(M'_\infty),\chi\bigr)=\chi\otimes\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\chi)^{-1},\quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p^\times}\bigl(H_c^0(N'_\infty),\chi\bigr)=\chi\otimes\mathbf{1}$$

が成り立つ（前者は定理 4.42 より従う．後者は [Far04, Exemple 4.4.8] 参照）．よって [Man08, Theorem 39] より，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p^\times\times\mathbb{Q}_p^\times}\bigl(H_c^2(N_\infty)(1),\chi_1\boxtimes\chi_2\bigr)^{\mathrm{sm}}\\
&\quad=\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\bigl(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p^\times\times\mathbb{Q}_p^\times}(H_c^0(M'_\infty)\boxtimes H_c^0(N'_\infty),\chi_1\boxtimes\chi_2)^{\mathrm{sm}}\bigr)\\
&\quad=\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\bigl((\chi_1\otimes\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1)^{-1})\boxtimes(\chi_2\otimes\mathbf{1})\bigr)\\
&\quad=\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\chi_1\boxtimes\chi_2)\otimes\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1)^{-1}
\end{aligned}$$

となるので前半の主張が従う（[Man08, Theorem 39] の両辺には Tate 捻りが含まれていることに注意）． ∎

さて，定理 4.65 においては，$\overline{\mathrm{Sh}}_{0,N}^{\mathrm{ss}}$ の点およびその点に対応する楕円曲線 E_0 に対する同型 $E_0[p^\infty]\cong\mathbb{X}$ を固定していた．このように一点における同型を固定すれば十分であることの背景には，補題 4.64 により $\overline{\mathrm{Sh}}_{0,N}^{\mathrm{ss}}$ の全ての点が Hecke 作用でうつりあうという事情があった．$\overline{\mathrm{Sh}}_{0,N}^{\mathrm{ord}}$ の場合は同様のことは成り立たないため，$\overline{\mathrm{Sh}}_{0,N}^{\mathrm{ord}}$ の各点 (E,η_N) に対して同型 $E[p^\infty]\cong\mu_{p^\infty}\oplus(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ を考える必要がある．つまり，$\overline{\mathrm{Sh}}_{0,N}^{\mathrm{ord}}$ 上の普遍楕円曲線 $\mathcal{E}$ に対し，同型 $\mathcal{E}[p^\infty]\cong\mu_{p^\infty}\oplus(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ を分類する空間を考えることになる．このような空間は，$\nu\geq 0$ に対して同型 $\mathcal{E}[p^\nu]^0\cong\mu_{p^\nu}$, $\mathcal{E}[p^\nu]^{\text{ét}}\cong(p^{-\nu}\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p)$ を分類する空間 $\mathrm{Ig}_{N,\nu}$ の射影系 $\{\mathrm{Ig}_{N,\nu}\}$ として実現される（$\mathcal{E}[p^\nu]^0$ および $\mathcal{E}[p^\nu]^{\text{ét}}$ は，$0\longrightarrow\mathcal{E}[p^\nu]^0\longrightarrow\mathcal{E}[p^\nu]\longrightarrow\mathcal{E}[p^\nu]^{\text{ét}}\longrightarrow 0$ を完全系列とするような連結群スキームおよびエタール群スキームである）．$\mathrm{Ig}_{N,\nu}$ を**井草多様体**（井草曲線）と呼び，$\{\mathrm{Ig}_{N,\nu}\}$ を**井草塔**と呼ぶ [注 25]．$\{\mathrm{Ig}_{N,\nu}\}$ には $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p})$ および $\mathbb{Q}_p^\times\times\mathbb{Q}_p^\times$ の部分モノイド $S=\{(a_1,a_2)\in\mathbb{Q}_p^\times\times\mathbb{Q}_p^\times\mid v_p(a_1)\leq v_p(a_2)\leq 0\}$ が作用する．したがって，コホモロジー

$$H_c^i(\mathrm{Ig}_\infty)=\varinjlim_{N,\nu}H_c^i(\mathrm{Ig}_{N,\nu},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

にも $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p})$ および S が作用するが，S の作用は可逆であることが証明できる．S が群 $\mathbb{Q}_p^\times\times\mathbb{Q}_p^\times$ を生成することに注意すると，$H_c^i(\mathrm{Ig}_\infty)$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p})\times(\mathbb{Q}_p^\times\times\mathbb{Q}_p^\times)$ の表現となることが分かる．一方，$\mathrm{Ig}_{N,\nu}$ は $\mathbb{F}_p$ 上定義されるので，$H_c^i(\mathrm{Ig}_\infty)$ には $\Gamma_{\mathbb{F}_p}$ も作用するが，$\mathrm{Frob}_p\in\Gamma_{\mathbb{F}_p}$ の $H_c^i(\mathrm{Ig}_\infty)$ への作用は $(p,1)\in\mathbb{Q}_p^\times\times\mathbb{Q}_p^\times$ の作用と一致する．

[注 25] これらは $\overline{\mathrm{Sh}}_{0,N}^{\mathrm{ord}}$ 上のスキームであるため，古典的な井草曲線とは少し異なる．

H^i_{ord} は $H^2_c(N_\infty)$ と $H^i_c(\mathrm{Ig}_\infty)$ を組み合わせて表すことができる．これは p 進一意化定理（定理 4.65）の変種であるとみなすことができる：

定理 4.72

$\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$ の既約スムーズ表現 $\chi_1 \boxtimes \chi_2$ に対し，

$$\begin{aligned}\mathrm{Mant}_{\mathrm{ord}}([\chi_1 \boxtimes \chi_2]) &= \bigl[\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times}\bigl(H^2_c(N_\infty)(1), \chi_1 \boxtimes \chi_2\bigr)^{\mathrm{sm}}\bigr] \\ &= [\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\chi_1 \boxtimes \chi_2) \otimes \mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1)^{-1}]\end{aligned}$$

（2 つ目の等号は命題 4.71 より従う）と定めることで，Grothendieck 群の間の準同型

$$\mathrm{Mant}_{\mathrm{ord}} \colon \mathrm{Groth}(\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times) \longrightarrow \mathrm{Groth}\bigl(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times W_{\mathbb{Q}_p}\bigr)$$

が得られる．これから誘導される準同型

$$\mathrm{Groth}\bigl(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p}) \times (\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times)\bigr) \longrightarrow \mathrm{Groth}\bigl(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty}) \times W_{\mathbb{Q}_p}\bigr)$$

も $\mathrm{Mant}_{\mathrm{ord}}$ と書く．

また，$H^*_{\mathrm{ord}} \in \mathrm{Groth}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p})$ を $H^*_{\mathrm{ord}} = \sum_i (-1)^i [H^i_{\mathrm{ord}}]$ で定める．同様に $H^*_c(\mathrm{Ig}_\infty) \in \mathrm{Groth}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times (\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times))$ も定義する．

このとき，$\mathrm{Groth}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty) \times W_{\mathbb{Q}_p})$ における次の等式が成り立つ：

$$H^*_{\mathrm{ord}} = \mathrm{Mant}_{\mathrm{ord}}\bigl(H^*_c(\mathrm{Ig}_\infty)\bigr).$$

この定理は [HT01, Theorem IV.2.9] においては第一基本等式と呼ばれている．その後 Mantovan [Man05] によって不分岐志村多様体に一般化されたので，現在では Mantovan 公式という名前がついている．

定理 4.72 から，H^*_{ord} を調べるためには $H^*_c(\mathrm{Ig}_\infty)$ を調べればよいことが分かる．井草多様体は有限体上定義される代数多様体であり，それに $\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$ の部分モノイド S は代数的対応によって作用している．このような状況でエタールコホモロジーを調べるには，藤原の跡公式 [Fuj97] が有効である．この公式は，代数的対応を Frobenius 射の十分高い冪で捻っておくと，そのコホモロジーへの作用の跡の交代和が固定点の個数と等しくなるということを主張するものである．詳しい解説は [三枝, §3.3] を参照していただきたい．ここで一時的な定義を行う：

定義 4.73

$\varphi \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p}) \times (\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times))$ が**よいテスト関数**であるとは，次を満たすことをいう：

- $S_+ = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times \mid v_p(a_1) < v_p(a_2) \leq 0\}$ とおくと，φ の台は

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p}) \times S_+$ に含まれる．

- φ が $K^p(N)$ 不変となるような十分大きい整数 $N \geq 0$ に対し，

$$\mathrm{Tr}\bigl(\varphi; H_c^*(\mathrm{Ig}_{N,\nu}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)\bigr) = \#\,\mathrm{Fix}(\varphi)$$

が成り立つ．

一般の $\varphi \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p}) \times (\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times))$ および整数 m, k に対し $\varphi^{(m,k)}$ を $g \mapsto \varphi(g(p^{2m+k}, p^m))$（$(p^{2m+k}, p^m)$ は $\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$ の元）で定めると，まず十分大きい m に対し $\varphi^{(m,0)}$ の台は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p}) \times S$ に含まれ，さらに藤原の跡公式より，m に応じて決まる整数 $N_m \geq 0$ が存在して，$k \geq N_m$ のとき $\varphi^{(m,k)}$ はよいテスト関数となる．このことから，$\mathrm{Groth}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p}) \times (\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times))$ の元はよいテスト関数の跡で区別できることが分かる．すなわち，$A \in \mathrm{Groth}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p}) \times (\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times))$ が任意のよいテスト関数 φ に対し $\mathrm{Tr}(\varphi; A) = 0$ を満たすならば $A = 0$ となる．

よって，$H_c^*(\mathrm{Ig}_\infty)$ を調べるには，よいテスト関数 φ に対し $\#\,\mathrm{Fix}(\varphi)$ を計算すればよい．このために，集合 $\mathrm{Ig}_\infty(\overline{\mathbb{F}}_p) = \varprojlim_{N,\nu} \mathrm{Ig}_{N,\nu}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ およびそれへの Hecke 作用を代数的な言葉で記述する．これは命題 4.63 の類似とみなすことができ，証明も同じようにして行われる．つまり，まず通常楕円曲線の同種類を分類し（本田・Tate 理論），次に Tate 加群および p 可除群を見ることで固定した同種類に属する楕円曲線を記述するという方針をとる．結果は以下の通りである：

命題 4.74

i) $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の通常楕円曲線の同種類は，p 上分解する虚二次体と一対一に対応する．対応は $E \mapsto \mathrm{End}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ によって与えられる．

ii) M を p 上分解する虚二次体とし，$\mathrm{Ig}_\infty(\overline{\mathbb{F}}_p)$ の元のうち M と対応する同種類に属するもの全体を $\mathrm{Ig}_\infty(\overline{\mathbb{F}}_p)_M$ とおくと，全単射

$$\mathrm{Ig}_\infty(\overline{\mathbb{F}}_p)_M \cong M^\times \backslash \bigl(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p}) \times (\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times)\bigr)$$

が存在する．ここで，$M^\times$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p}) \times (\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times)$ への作用は以下のようにして定めたものである：

- M の $\mathbb{Q}$ 上の基底をとることで $M \longrightarrow M_2(\mathbb{Q})$ が定まるので，埋め込み $M^\times \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p})$ が定まる．これによって $M^\times$ を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p})$ に作用させる．
- $M \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \cong \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$ を固定すると，埋め込み $M^\times \hookrightarrow (M \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)^\times \cong \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$ が定まる．これによって $M^\times$ を $\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$ に作用させる．

また，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p}) \times S$ の $\mathrm{Ig}_\infty(\overline{\mathbb{F}}_p)_M$ への Hecke 作用は右辺への自然な右作用と対応する（$\overline{\mathbb{F}}_p$ 値点への S の作用は $\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$ へと延長できることも分かる）．

この命題より容易に $\#\mathrm{Fix}(\varphi)$ が計算できる．結果はよくあるように軌道積分で書かれるが，Frobenius による捻りが出てこないのがこの方法の長所である．以上の議論をまとめることで，次の定理を得る：

定理 4.75

$\varphi \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p}) \times (\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times))$ をよいテスト関数とするとき，次が成り立つ：

$$\mathrm{Tr}\bigl(\varphi; H_c^*(\mathrm{Ig}_\infty)\bigr) = \sum_{[\gamma_0]} O_{(\gamma,\delta)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p}) \times (\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times)}(\varphi).$$

ここで，$[\gamma_0]$ は以下の条件を満たす $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ の元 γ_0 の共役類を動く：

- γ_0 は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ の元として正則半単純である．
- γ_0 の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ における像は楕円的である（特に $\gamma_0 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ も楕円的である）．
- $v_p(\delta_1) < v_p(\delta_2)$ を満たす $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{Q}_p^\times$ が存在して，γ_0 の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ における像は $\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$ と $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 内で共役である．

γ は γ_0 の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p})$ における像である．また，$\delta = (\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$ とおく（$\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{Q}_p^\times$ は上の条件の 3 つ目に出てくるものである）．$O_{(\gamma,\delta)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p}) \times (\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times)}(\varphi)$ は軌道積分

$$\int_{(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p}) \times (\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times))/Z(\gamma,\delta)} \varphi\bigl(g(\gamma,\delta)g^{-1}\bigr)dg$$

を表す（$Z(\gamma,\delta)$ は (γ,δ) の中心化群）．ただし，$Z(\gamma,\delta)$ の Haar 測度は以下のように定める：$Z(\gamma,\delta) = Z(\gamma_0)(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty) = Z(\gamma_0)(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^1 / Z(\gamma_0)(\mathbb{R})^1$（$Z(\gamma_0)$ は γ_0 の GL_2 における中心化群）であるから，$Z(\gamma_0)(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^1$ には玉河測度を，$Z(\gamma_0)(\mathbb{R})^1 \cong U(1)$ には全測度が 1 になるような測度を定め，それらの商測度をとる．

なお，命題 4.74 の M と定理 4.75 の γ_0 は，$M = \mathbb{Q}(\gamma_0)$ という関係によって結び付いている．

右辺の軌道積分についてもう少し考えよう．テスト関数 φ が $\varphi = \varphi^p \otimes \varphi_p$ ($\varphi^p \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p}))$, $\varphi_p \in \mathcal{H}(\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times)$) とテンソル積に分解しているとき，軌道積分は

$$O_{(\gamma,\delta)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p}) \times (\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times)}(\varphi) = O_\gamma^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\infty,p})}(\varphi^p) O_\delta^{\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times}(\varphi_p)$$

と積に分解する．p における軌道積分 $O_\delta^{\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times}(\varphi_p)$ を扱うために，Jacquet 関手 $\mathrm{Jac}_{\overline{B}}$ およびその変種 $\mathrm{Red}_{\overline{B}}$ を導入する．

定義 4.76

$\overline{B}$ を下三角行列からなる GL_2 の Borel 部分群とし，その冪単根基を $\overline{N}$ と書

く．$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ のスムーズ表現 π に対し，$\overline{N}(\mathbb{Q}_p)$ が自明に作用するような π の商のうち最大のものを $\mathrm{Jac}_{\overline{B}}(\pi)$ と表す（$\overline{B}$ に関する非正規化 Jacquet 加群）．これは $\mathbb{Q}_p^\times\times\mathbb{Q}_p^\times=\overline{B}(\mathbb{Q}_p)/\overline{N}(\mathbb{Q}_p)$ のスムーズ表現である．$\pi\mapsto\mathrm{Jac}_{\overline{B}}(\pi)$ は完全関手になる．$\mathrm{Red}_{\overline{B}}(\pi)=\mathrm{Jac}_{\overline{B}}(\pi)\otimes\delta_{\overline{B}}^{1/2}\otimes\delta_{B}^{-1/2}=\mathrm{Jac}_{\overline{B}}(\pi)\otimes(|{-}|\boxtimes|{-}|^{-1})$ とおく．

補題 4.77

$\varphi_p\in\mathcal{H}(\mathbb{Q}_p^\times\times\mathbb{Q}_p^\times)$ の台が S_+ に含まれるとする．

i) $\widetilde{\varphi}_p\in\mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$ で以下の条件を満たすものが存在する：
   - $\delta\in S_+\subset\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ に対し，$O_\delta^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\widetilde{\varphi}_p)=O_\delta^{\mathbb{Q}_p^\times\times\mathbb{Q}_p^\times}(\varphi_p)$ となる．
   - $g\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ が S_+ の元と共役でないならば，$\widetilde{\varphi}_p(g)=0$ となる．

ii) i) の $\widetilde{\varphi}_p$ は次を満たす：$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の任意の既約スムーズ表現 π に対し，$\mathrm{Tr}(\mathrm{Red}_{\overline{B}}(\pi)(\varphi_p))=\mathrm{Tr}\,\pi(\widetilde{\varphi}_p)$.

証明　$T\subset\mathrm{GL}_2$ を対角成分からなる極大トーラスとし，$\mathbb{Q}_p^\times\times\mathbb{Q}_p^\times$ と $T(\mathbb{Q}_p)$ を同一視する．T の元で対角成分が異なるもの全体を T^{reg} と書く．$f\colon\mathrm{GL}_2/T\times T^{\mathrm{reg}}\longrightarrow\mathrm{GL}_2;\ (\overline{g},t)\mapsto gtg^{-1}$ はエタール射である．一方，Hilbert の定理 90 より $(\mathrm{GL}_2/T)(\mathbb{Q}_p)=\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/T(\mathbb{Q}_p)$ である．よって $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/T(\mathbb{Q}_p)\times T^{\mathrm{reg}}(\mathbb{Q}_p)\longrightarrow\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ は開写像である．これによる $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/T(\mathbb{Q}_p)\times S_+$ の像を U_+ とおく．U_+ は S_+ の元と共役な元全体からなる $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の開集合である．また，S_+ の定義より，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/T(\mathbb{Q}_p)\times S_+\longrightarrow U_+$ が全単射となることが容易に分かる．したがって $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/T(\mathbb{Q}_p)\times S_+$ と U_+ は同相である．

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/T(\mathbb{Q}_p)$ 上のコンパクト台局所定数関数 ψ で $\int_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/T(\mathbb{Q}_p)}\psi(g)dg=1$ となるものを固定し，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/T(\mathbb{Q}_p)\times S_+$ 上の関数 $\psi\otimes\varphi_p\colon(\overline{g},t)\mapsto\psi(\overline{g})\varphi_p(t)$ を考える．この関数を U_+ 上の関数と見て，U_+ の外に 0 で延長して得られる $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 上の関数を $\widetilde{\varphi}_p$ とおく．これが i) の条件を満たすことは構成から容易に分かる．以上で i) が示された．

次に ii) を示す．Weyl の積分公式より，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,\pi(\widetilde{\varphi}_p)&=\int_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\widetilde{\varphi}_p(g)\theta_\pi(g)dg=\frac{1}{\#W_T}\int_{T^{\mathrm{reg}}(\mathbb{Q}_p)}D(t)O_t^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\widetilde{\varphi}_p)\theta_\pi(t)dt\\&=\int_{S_+}D(t)O_t^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\widetilde{\varphi}_p)\theta_\pi(t)dt=\int_{S_+}D(t)O_t^{T(\mathbb{Q}_p)}(\varphi_p)\theta_\pi(t)dt\\&=\int_{S_+}D(t)\varphi_p(t)\theta_\pi(t)dt\end{aligned}$$

である．ここで，$W_T\cong\mathfrak{S}_2$ は T の Weyl 群であり，$D(t)=|\det(\mathrm{Ad}(t)-1;\mathfrak{gl}_2/\mathrm{Lie}\,T)|$ は Weyl 判別式である．

[Cas77, Theorem 5.2] より，$t \in S_+$ に対し $\theta_\pi(t) = \theta_{\mathrm{Jac}_{\overline{B}}(\pi)}(t)$ である（この場合，[Cas77, Theorem 5.2] の記号で $P_t = \overline{B}$ となることに注意）．また，定義より $D(t) = \delta_B^{-1/2}(t)\delta_{\overline{B}}^{1/2}(t)$ である．したがって，

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\pi(\widetilde{\varphi}_p) &= \int_{S_+} \delta_B^{-1/2}(t)\delta_{\overline{B}}^{1/2}(t)\varphi_p(t)\theta_{\mathrm{Jac}_{\overline{B}}(\pi)}(t)dt = \int_{\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times} \varphi_p(t)\theta_{\mathrm{Red}_{\overline{B}}(\pi)}(t)dt \\ &= \operatorname{Tr}\bigl(\mathrm{Red}_{\overline{B}}(\pi)(\varphi_p)\bigr)\end{aligned}$$

となり主張が従う．■

一方，「γ_0 の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ における像は楕円的である」という条件は，$D_{1,0}$ の擬係数 (pseudo-coefficient) の軌道積分を用いて表すことができる：

補題 4.78
以下を満たすような $\varphi_\infty \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0})$ が存在する：
i) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}$ の既約緩増加表現 π に対し，

$$\operatorname{Tr}\pi(\varphi_\infty) = \begin{cases} -1 & (\pi \cong D_{1,0}), \\ 0 & (\pi \not\cong D_{1,0}). \end{cases}$$

ii) $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ に対し次が成り立つ：
- γ が楕円正則半単純元であるとき，$O_\gamma(\varphi_\infty) = 1$.
- γ が楕円半単純元でないとき (すなわち，中心を法としてコンパクトな極大トーラスに含まれないとき)，$O_\gamma(\varphi_\infty) = 0$.

証明　[Art89, Lemma 3.1] を $\mu = \mathbf{1}$ として適用することで，i) を満たす $\varphi_\infty = f_{\mathbf{1}} \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0})$ が構成できる．これは [Art89, §4] の意味で安定尖点的であるから，[Art89, Theorem 5.1] を $M = G = \mathrm{GL}_2$ として適用することで，

$$O_\gamma(\varphi_\infty) = \Phi_{\mathrm{GL}_2}(\gamma, \mathbf{1})$$

が得られる（右辺の定義は [Art89, §4] を参照）．γ が楕円正則半単純元である場合には，[Art89, (4.4)] より $\Phi_{\mathrm{GL}_2}(\gamma, \mathbf{1}) = -\theta_{D_{1,0}}(\gamma) = 1$ である（2 つ目の等号については注意 4.35 を参照）．また，γ が楕円半単純元でないときには，定義より $\Phi_{\mathrm{GL}_2}(\gamma, \mathbf{1}) = 0$ である（[Art89, §4] の最後の部分を参照）．■

定理 4.75，補題 4.77，補題 4.78 を合わせると次のようになる：

系 4.79
$\varphi = \varphi^p \otimes \varphi_p \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}^{\infty,p}) \times (\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times))$ をよいテスト関数とし，$\psi =$

$\varphi^p \otimes \widetilde{\varphi}_p \otimes \varphi_\infty \in \mathcal{H}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/\mathbb{R}_{>0})$ とおく．このとき，次が成り立つ：

$$\mathrm{Tr}\big(\varphi; H_c^*(\mathrm{Ig}_\infty)\big) = \sum_{[\gamma_0]} O_{\gamma_0}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}(\psi).$$

ここで $[\gamma_0]$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ の楕円正則半単純元の共役類を動く．

p と異なる素数 p' を固定し，φ^p が $\varphi^{p,p'} \otimes \varphi_{p'}$ と分解する場合を考える．$\varphi_{p'}$ として超尖点表現の行列係数（をコンパクト台になるよう修正したもの）をとると，補題 4.78 ii) と [Art88b, Corollary 7.3, Corollary 7.4] より，ψ に対して単純跡公式

$$\sum_{\Pi} \mathrm{Tr}\,\Pi(\psi) = \sum_{[\gamma_0]} O_{\gamma_0}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})}(\psi)$$

が成り立つ [注 26]．ここで，Π は $L^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\mathbb{R}_{>0}\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$ の離散部分に現れる保型表現を動く．$\varphi_\infty, \varphi_{p'}$ のとり方から，$\mathrm{Tr}\,\Pi(\psi) \neq 0$ となるのは以下を満たすような Π に限られる：

- $\Pi_\infty \cong D_{1,0}$.
- $\Pi_{p'}$ は超尖点表現.

さらにこのとき，補題 4.77 と補題 4.78 から

$$\mathrm{Tr}\,\Pi(\psi) = -\mathrm{Tr}\,\Pi^{\infty,p}(\varphi^p) \cdot \mathrm{Tr}(\mathrm{Red}_{\overline{B}}(\Pi_p)(\varphi_p))$$

が成り立つ．これを用いることで，次の定理が導かれる：

定理 4.80

Π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の尖点的保型表現とし，以下が成り立つと仮定する：

- $\Pi_\infty \cong D_{1,0}$.
- $\Pi_{p'}$ が超尖点表現となるような素数 $p' \neq p$ が存在する.

このとき，$\mathrm{Groth}(\mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times)$ における等式

$$H_c^*(\mathrm{Ig}_\infty)[\Pi^{\infty,p}] = -[\mathrm{Red}_{\overline{B}}(\Pi_p)]$$

が成り立つ.

定理 4.72 と定理 4.80 から直ちに $H^*_{\mathrm{ord}}[\Pi^{\infty,p}]$ が求まる：

系 4.81

Π を定理 4.80 の通りとするとき，$H^*_{\mathrm{ord}}[\Pi^{\infty,p}] = -\mathrm{Mant}_{\mathrm{ord}}\big([\mathrm{Red}_{\overline{B}}(\Pi_p)]\big)$ が成り立つ.

[注 26] 一般に右辺の $[\gamma_0]$ は楕円半単純元の共役類を動かす必要があるが，$\widetilde{\varphi}_p$ の台が正則半単純元全体の集合に含まれることから，この場合は楕円正則半単純元の共役類を動かせばよい.

一方，$\mathrm{Jac}_{\overline{B}}$ は以下のように計算できる（[BH06, §9] 等を参照）：

命題 4.82

π を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約スムーズ表現とする．

i) $\pi = \text{n-Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\chi_1 \boxtimes \chi_2) = \mathrm{Ind}_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}((\chi_2|-|^{-1/2}) \boxtimes (\chi_1|-|^{1/2}))$（$\chi_1, \chi_2$ は $\mathbb{Q}_p^\times$ のスムーズ指標）のとき，次の完全系列がある：

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow (\chi_1|-|^{-1/2}) \boxtimes (\chi_2|-|^{1/2}) \longrightarrow \mathrm{Jac}_{\overline{B}}(\pi)&\\ \longrightarrow (\chi_2|-|^{-1/2}) \boxtimes (\chi_1|-|^{1/2}) \longrightarrow 0.&\end{aligned}$$

ii) $\pi = \chi \circ \det$（χ は $\mathbb{Q}_p^\times$ のスムーズ指標）のとき，次が成り立つ：

$$\mathrm{Jac}_{\overline{B}}(\pi) = \chi \boxtimes \chi.$$

iii) $\pi = \mathrm{St}_2 \otimes (\chi \circ \det)$（$\chi$ は $\mathbb{Q}_p^\times$ のスムーズ指標）のとき，次が成り立つ：

$$\mathrm{Jac}_{\overline{B}}(\pi) = (\chi|-|^{-1}) \boxtimes (\chi|-|).$$

iv) π が超尖点表現のとき，$\mathrm{Jac}_{\overline{B}}(\pi) = 0$ である．

以上をまとめると，Π_p が超尖点表現でない場合の定理 4.55 が得られる：

系 4.83

Π を定理 4.80 の通りとする．

i) $\Pi_p = \chi_1 \boxplus \chi_2$（$\chi_1, \chi_2$ は $\mathbb{Q}_p^\times$ のスムーズ指標）のとき，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}H_c^1(\mathrm{Sh}_\infty)[\Pi^\infty] &= -H_{\mathrm{ord}}^*[\Pi^\infty] = [\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1)^{-1}(-\tfrac{1}{2})] + [\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2)^{-1}(-\tfrac{1}{2})]\\ &= [\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ss}}(\Pi_p)^\vee(-\tfrac{1}{2})].\end{aligned}$$

ii) $\Pi_p = \mathrm{St}_2 \otimes (\chi \circ \det)$（$\chi$ は $\mathbb{Q}_p^\times$ のスムーズ指標）のとき，次が成り立つ：

$$H_{\mathrm{ord}}^*[\Pi^\infty] = -[\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\chi)^{-1}], \quad H_c^1(\mathrm{Sh}_\infty)[\Pi^\infty] = [\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ss}}(\Pi_p)^\vee(-\tfrac{1}{2})].$$

証明　$H_c^*(\mathrm{Sh}_\infty)[\Pi^\infty] = H_{\mathrm{ss}}^*[\Pi^\infty] + H_{\mathrm{ord}}^*[\Pi^\infty]$ である．一方，$H_c^2(\mathrm{Sh}_\infty)$ および H_{ss}^0 への $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の作用は det を経由する．実際，$H_c^2(\mathrm{Sh}_\infty)$ についてはモジュラー曲線の $\mathbb{C}$ 値点を見ることで分かり，H_{ss}^0 については系 4.66 と定理 4.68 i) より従う．特に $H_c^2(\mathrm{Sh}_\infty)[\Pi^\infty] = H_{\mathrm{ss}}^0[\Pi^\infty] = 0$ であるから，$H_c^1(\mathrm{Sh}_\infty)[\Pi^\infty] = H_{\mathrm{ss}}^1[\Pi^\infty] - H_{\mathrm{ord}}^*[\Pi^\infty]$ となる．

i) の設定において，Π_p は無限次元表現であるから，$\Pi_p = \text{n-Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\chi_1 \boxtimes \chi_2)$

である．よって，系 4.81 および命題 4.82 i) より，

$$
\begin{aligned}
&H^*_{\mathrm{ord}}[\Pi^{\infty,p}] \\
&= -\mathrm{Mant}_{\mathrm{ord}}\bigl([(\chi_1|-|^{1/2})\boxtimes(\chi_2|-|^{-1/2})]+[(\chi_2|-|^{1/2})\boxtimes(\chi_1|-|^{-1/2})]\bigr) \\
&= -[\Pi_p\otimes \mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1)^{-1}(-\tfrac{1}{2})]-[\Pi_p\otimes \mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2)^{-1}(-\tfrac{1}{2})]
\end{aligned}
$$

を得る．したがって

$$
H^*_{\mathrm{ord}}[\Pi^\infty]=-[\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1)^{-1}(-\tfrac{1}{2})]-[\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2)^{-1}(-\tfrac{1}{2})]=-[\mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{\mathbb{Q}_p}(\Pi_p)^\vee(-\tfrac{1}{2})]
$$

となる．一方, 系 4.67 iii) より $H^1_{\mathrm{ss}}[\Pi^\infty]=0$ であるから, $H^1_c(\mathrm{Sh}_\infty)[\Pi^\infty]=-H^*_{\mathrm{ord}}[\Pi^\infty]$ である．以上で i) が示された．

ii) を示す．系 4.81 と命題 4.82 iii) を用いて同様の計算を行うと，

$$
\begin{aligned}
H^*_{\mathrm{ord}}[\Pi^{\infty,p}] &= -[\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\chi\boxtimes\chi)\otimes \mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\chi)^{-1}] \\
&= -[\Pi_p\otimes \mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\chi)^{-1}]-[(\chi\circ\det)\otimes \mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\chi)^{-1}]
\end{aligned}
$$

となるので，$H^*_{\mathrm{ord}}[\Pi^\infty]=-[\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\chi)^{-1}]$ であることが分かる．これと系 4.67 ii), 定理 4.68 iii) より，

$$
\begin{aligned}
H^1_c(\mathrm{Sh}_\infty)[\Pi^\infty] &= H^1_{\mathrm{ss}}[\Pi^\infty]-H^*_{\mathrm{ord}}[\Pi^\infty]=[\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\chi)^{-1}(-1)]+[\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(\chi)^{-1}] \\
&= [\mathrm{rec}^{\mathrm{ss}}_{\mathbb{Q}_p}(\Pi_p)^\vee(-\tfrac{1}{2})]
\end{aligned}
$$

となるので主張が証明された． ∎

最後に，定理 4.5 を証明する際にここで述べた議論を変更する必要がある部分を列挙する．

- ここではモジュラー曲線の 1 次コホモロジーのみに注目したが，GL_n の場合には志村多様体のコホモロジーの交代和をとって議論を進める．このようにすると，コホモロジーの交代和の Π^∞ 部分として得られる仮想 Galois 表現が表現になることを確かめる必要がある．この場合はコンパクトなユニタリ志村多様体を考えているので，Weil 予想を使ってコホモロジーの次数を分離することによってその証明が行われる．
- GL_2 の場合にはモジュラー曲線のコホモロジーを使うことで欲しい次元の Galois 表現が直接得られたが，GL_n の場合には，構成したい Galois 表現が志村多様体のコホモロジーに重複度を持って現れる．そのため，p 進 Hodge 理論における Sen の微分作用素を用いて Galois 表現を切り出すという技術が用いられる．[HT01, Proposition VII.1.8] 参照．

- ここでは $\overline{\mathrm{Sh}}$ を通常部分と超尖点部分に分けたが，GL_n の場合には整数 $0 \leq h \leq n-1$ でパラメータ付けられた n 個の局所閉集合に分けることになる (Newton polygon stratification)．整数 h に対応する部分の隣接輪体コホモロジーは，$\mathrm{GL}_{n-h}(F)$ に対応する Lubin-Tate 塔のコホモロジーと井草塔のコホモロジーを組み合わせることによって記述される．それゆえ，定理 4.5 の証明には Lubin-Tate 塔のコホモロジーに関する帰納法が用いられる．
- モジュラー曲線の場合と異なり，ユニタリ志村多様体のモジュライ解釈にはアーベル多様体の偏極が現れるので，命題 4.74 の類似を証明するのに本田・Tate 理論だけでは不十分であり，[Kot92b] に出てくるような議論も行う必要がある．この部分はエンドスコピーの理論と直接関係するところでもあり，[Shi09] および [Shi10] において比較的一般の設定で議論が行われている．
- 系 4.83 ii) の証明において定理 4.68 を用いたが，GL_n の場合にはこれでは不十分であり，もう少し工夫が必要である．[HT01, Theorem VII.1.5] においては，GL_2 でいえば実解析的 Eisenstein 級数に対応するような（尖点的ではないが離散的な）保型表現の寄与も考えることで証明を行っている．

参考文献

[AC89] J. Arthur and L. Clozel, *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Mathematics Studies, vol. 120, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[Art81] J. Arthur, *The trace formula in invariant form*, Ann. of Math. (2) **114** (1981), no. 1, 1–74.

[Art88a] ———, *The invariant trace formula. I. Local theory*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 2, 323–383.

[Art88b] ———, *The invariant trace formula. II. Global theory*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 3, 501–554.

[Art89] ———, *The L^2-Lefschetz numbers of Hecke operators*, Invent. Math. **97** (1989), no. 2, 257–290.

[Art05] ———, *An introduction to the trace formula*, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, Clay Math. Proc., vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 1–263.

[Ber84] J. N. Bernstein, *Le "centre" de Bernstein*, Representations of reductive groups over a local field, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984, Edited by P. Deligne, pp. 1–32.

[Ber96] V. G. Berkovich, *Vanishing cycles for formal schemes. II*, Invent. Math. **125** (1996), no. 2, 367–390.

[BG14] K. Buzzard and T. Gee, *The conjectural connections between automorphic representations and Galois representations*, Automorphic Forms and Galois Representations. Volume 1, Cambridge University Press, Cambridge, 2014, pp. 135–187.

[BH05a] C. J. Bushnell and G. Henniart, *The essentially tame local Langlands correspondence. I*, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), no. 3, 685–710.

[BH05b] ———, *The essentially tame local Langlands correspondence. II. Totally ramified representations*, Compos. Math. **141** (2005), no. 4, 979–1011.

[BH06] ———, *The local Langlands conjecture for* $\mathrm{GL}(2)$, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 335, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[BH10] ———, *The essentially tame local Langlands correspondence, III: the general case*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **101** (2010), no. 2, 497–553.

[BH14] ———, *Langlands parameters for epipelagic representations of* GL_n, Math. Ann. **358** (2014), no. 1-2, 433–463.

[BK93] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko, *The admissible dual of* $\mathrm{GL}(N)$ *via compact open subgroups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 129, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[BLGGT12] T. Barnet-Lamb, T. Gee, D. Geraghty, and R. Taylor, *Local-global compatibility for* $l = p$*, I*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **21** (2012), no. 1, 57–92.

[BLGGT14a] ———, *Local-global compatibility for* $l = p$*, II*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **47** (2014), no. 1, 161–175.

[BLGGT14b] ———, *Potential automorphy and change of weight*, Ann. of Math. (2) **179** (2014), no. 2, 501–609.

[Bor97] A. Borel, *Automorphic forms on* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 130, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Boy99] P. Boyer, *Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale*, Invent. Math. **138** (1999), no. 3, 573–629.

[BZ77] I. N. Bernstein and A. V. Zelevinsky, *Induced representations of reductive* $\mathfrak{p}$*-adic groups. I*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10** (1977), no. 4, 441–472.

[Car79] P. Cartier, *Representations of p-adic groups: a survey*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 111–155.

[Car86] H. Carayol, *Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), no. 3, 409–468.

[Car12] A. Caraiani, *Local-global compatibility and the action of monodromy on nearby cycles*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 12, 2311–2413.

[Cas] W. Casselman, *Introduction to admissible representations of p-adic groups*, `http://www.math.ubc.ca/~cass/research/publications.html`.

[Cas73] ———, *On some results of Atkin and Lehner*, Math. Ann. **201** (1973), 301–314.

[Cas77] ———, *Characters and Jacquet modules*, Math. Ann. **230** (1977), no. 2, 101–105.

[CH13] G. Chenevier and M. Harris, *Construction of automorphic Galois representations, II*, Camb. J. Math. **1** (2013), no. 1, 53–73.

[Che12] M. Chen, *Composantes connexes géométriques d'espaces de modules de groupes p-divisibles*, preprint, `http://math.ecnu.edu.cn/~mfchen/intro.html`, 2012.

[Clo84] L. Clozel, *Théorème d'Atiyah-Bott pour les variétés $\mathfrak{p}$-adiques et caractères des groupes réductifs*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) (1984), no. 15, 39–64, Harmonic analysis on Lie groups and symmetric spaces (Kleebach, 1983).

[Clo90] ———, *Motifs et formes automorphes: applications du principe de fonctorialité*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math., vol. 10, Academic Press, Boston, MA, 1990, pp. 77–159.

[Clo91] ———, *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de* $\mathrm{GL}(n)$, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1991), no. 73, 97–145.

[Clo93] ———, *On the cohomology of Kottwitz's arithmetic varieties*, Duke Math. J. **72** (1993), no. 3, 757–795.

[Del76] P. Deligne, *Les constantes locales de l'équation fonctionnelle de la fonction L d'Artin d'une représentation orthogonale*, Invent. Math.

35 (1976), 299–316.

[DKV84] P. Deligne, D. Kazhdan, and M.-F. Vignéras, *Représentations des algèbres centrales simples p-adiques*, Representations of reductive groups over a local field, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984, pp. 33–117.

[DL76] P. Deligne and G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. (2) **103** (1976), no. 1, 103–161.

[Dri74] V. G. Drinfeld, *Elliptic modules*, Mat. Sb. (N.S.) **94(136)** (1974), 594–627, 656.

[Dri76] ______, *Coverings of p-adic symmetric domains*, Funkcional. Anal. i Priložen. **10** (1976), no. 2, 29–40.

[Far04] L. Fargues, *Cohomologie des espaces de modules de groupes p-divisibles et correspondances de Langlands locales*, Astérisque (2004), no. 291, 1–199, Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink et correspondances de Langlands locales.

[Far06] ______, *Dualité de Poincaré et involution de Zelevinsky dans la cohomologie étale équivariante des espaces analytiques rigides*, preprint, `http://www.math.jussieu.fr/~fargues/Prepublications.html`, 2006.

[FGL08] L. Fargues, A. Genestier, and V. Lafforgue, *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, Progress in Mathematics, vol. 262, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[Fuj95] K. Fujiwara, *Theory of tubular neighborhood in étale topology*, Duke Math. J. **80** (1995), no. 1, 15–57.

[Fuj97] ______, *Rigid geometry, Lefschetz-Verdier trace formula and Deligne's conjecture*, Invent. Math. **127** (1997), no. 3, 489–533.

[Fuj02] ______, *A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber)*, Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka), Adv. Stud. Pure Math., vol. 36, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002, pp. 153–183.

[GJ72] R. Godement and H. Jacquet, *Zeta functions of simple algebras*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 260, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[Gre55] J. A. Green, *The characters of the finite general linear groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 402–447.

[Har98] M. Harris, *The local Langlands conjecture for* $\mathrm{GL}(n)$ *over a p-adic field,* $n < p$, Invent. Math. **134** (1998), no. 1, 177–210.

[HC80] Harish-Chandra, *A submersion principle and its applications*, Geometry and analysis, Indian Acad. Sci., Bangalore, 1980, pp. 95–102.

[HC99] ———, *Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups*, University Lecture Series, vol. 16, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, Preface and notes by Stephen DeBacker and Paul J. Sally, Jr.

[Hen86] G. Henniart, *On the local Langlands conjecture for* $\mathrm{GL}(n)$*: the cyclic case*, Ann. of Math. (2) **123** (1986), no. 1, 145–203.

[Hen88] ———, *La conjecture de Langlands locale numérique pour* $\mathrm{GL}(n)$, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **21** (1988), no. 4, 497–544.

[Hen92] ———, *Correspondance de Langlands-Kazhdan explicite dans le cas non ramifié*, Math. Nachr. **158** (1992), 7–26.

[Hen93] ———, *Caractérisation de la correspondance de Langlands locale par les facteurs* ε *de paires*, Invent. Math. **113** (1993), no. 2, 339–350.

[Hen00] ———, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* $\mathrm{GL}(n)$ *sur un corps p-adique*, Invent. Math. **139** (2000), no. 2, 439–455.

[Hen02] ———, *Une caractérisation de la correspondance de Langlands locale pour* $\mathrm{GL}(n)$, Bull. Soc. Math. France **130** (2002), no. 4, 587–602.

[HH95] G. Henniart and R. Herb, *Automorphic induction for* $\mathrm{GL}(n)$ *(over local non-Archimedean fields)*, Duke Math. J. **78** (1995), no. 1, 131–192.

[HLTT13] M. Harris, K.-W. Lan, R. Taylor, and J. Thorne, *On the rigid cohomology of certain Shimura varieties*, preprint, `http://www.math.ias.edu/~rtaylor/`, 2013.

[Hon68] T. Honda, *Isogeny classes of abelian varieties over finite fields*, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 83–95.

[HT01] M. Harris and R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, With an appendix by Vladimir G. Berkovich.

[ILO14] L. Illusie, Y. Laszlo, and F. Orgogozo, *Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents. (Séminaire à l'École polytechnique 2006–2008)*, 2014, Astérisque, No. 363-364.

[Jac79] H. Jacquet, *Principal L-functions of the linear group*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 63–86.

[JPSS81] H. Jacquet, I. I. Piatetski-Shapiro, and J. A. Shalika, *Conducteur des représentations du groupe linéaire*, Math. Ann. **256** (1981), no. 2, 199–214.

[JPSS83] ———, *Rankin-Selberg convolutions*, Amer. J. Math. **105** (1983), no. 2, 367–464.

[JS81a] H. Jacquet and J. A. Shalika, *On Euler products and the classification of automorphic representations. I*, Amer. J. Math. **103** (1981), no. 3, 499–558.

[JS81b] ———, *On Euler products and the classification of automorphic forms. II*, Amer. J. Math. **103** (1981), no. 4, 777–815.

[Kaz84] D. Kazhdan, *On lifting*, Lie group representations, II (College Park, Md., 1982/1983), Lecture Notes in Math., vol. 1041, Springer, Berlin, 1984, pp. 209–249.

[KM85] N. M. Katz and B. Mazur, *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Annals of Mathematics Studies, vol. 108, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985.

[Kna94] A. W. Knapp, *Local Langlands correspondence: the Archimedean case*, Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 393–410.

[Kot92a] R. E. Kottwitz, *On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties*, Invent. Math. **108** (1992), no. 3, 653–665.

[Kot92b] ———, *Points on some Shimura varieties over finite fields*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 2, 373–444.

[Lab99] J.-P. Labesse, *Cohomologie, stabilisation et changement de base*, Astérisque (1999), no. 257, vi+161, Appendix A by Laurent Clozel and Labesse, and Appendix B by Lawrence Breen.

[Lan79] R. P. Langlands, *Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 205–246.

[Lau96] G. Laumon, *Cohomology of Drinfeld modular varieties. Part I*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 41, Cambridge University Press, Cambridge, 1996, Geometry, counting of points and local harmonic analysis.

[LRS93] G. Laumon, M. Rapoport, and U. Stuhler, *$\mathscr{D}$-elliptic sheaves and the Langlands correspondence*, Invent. Math. **113** (1993), no. 2, 217–338.

[LT66] J. Lubin and J. Tate, *Formal moduli for one-parameter formal Lie groups*, Bull. Soc. Math. France **94** (1966), 49–59.

[Man05] E. Mantovan, *On the cohomology of certain PEL-type Shimura varieties*, Duke Math. J. **129** (2005), no. 3, 573–610.

[Man08] ———, *On non-basic Rapoport-Zink spaces*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **41** (2008), no. 5, 671–716.

[Mes72] W. Messing, *The crystals associated to Barsotti-Tate groups: with applications to abelian schemes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 264, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[Mie10] Y. Mieda, *Non-cuspidality outside the middle degree of ℓ-adic cohomology of the Lubin-Tate tower*, Adv. Math. **225** (2010), no. 4, 2287–2297.

[Mie12] ———, *Lefschetz trace formula and ℓ-adic cohomology of Lubin-Tate tower*, Math. Res. Lett. **19** (2012), no. 1, 95–107.

[Miy89] T. Miyake, *Modular forms*, Springer-Verlag, Berlin, 1989, Translated from the Japanese by Yoshitaka Maeda.

[Mœg07] C. Mœglin, *Classification et changement de base pour les séries discrètes des groupes unitaires p-adiques*, Pacific J. Math. **233** (2007), no. 1, 159–204.

[MT02] C. Mœglin and M. Tadić, *Construction of discrete series for classical p-adic groups*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 3, 715–786 (electronic).

[Pas05] V. Paskunas, *Unicity of types for supercuspidal representations of* GL_N, Proc. London Math. Soc. (3) **91** (2005), no. 3, 623–654.

[Ren10] D. Renard, *Représentations des groupes réductifs p-adiques*, Cours Spécialisés, vol. 17, Société Mathématique de France, Paris, 2010.

[Roc09] A. Roche, *The Bernstein decomposition and the Bernstein centre*, Ottawa lectures on admissible representations of reductive p-adic groups, Fields Inst. Monogr., vol. 26, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 3–52.

[Rog83] J. D. Rogawski, *Representations of* $\mathrm{GL}(n)$ *and division algebras* *over a p-adic field*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 1, 161–196.

[RZ96] M. Rapoport and Th. Zink, *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 141, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[Sat63] I. Satake, *Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $\mathfrak{p}$-adic fields*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1963), no. 18, 5–69.

[Sch12] P. Scholze, *Perfectoid spaces*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **116** (2012), no. 1, 245–313.

[Sch13a] ———, *The Langlands-Kottwitz approach for some simple Shimura varieties*, Invent. Math. **192** (2013), no. 3, 627–661.

[Sch13b] ———, *The Local Langlands correspondence for* GL_n *over p-adic fields*, Invent. Math. **192** (2013), no. 3, 663–715.

[Sch13c] ———, *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*, preprint, `http://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/`, 2013.

[Sch13d] ———, *Perfectoid spaces: a survey*, Current developments in mathematics 2012, Int. Press, Somerville, MA, 2013, pp. 193–227.

[Shi09] S. W. Shin, *Counting points on Igusa varieties*, Duke Math. J. **146** (2009), no. 3, 509–568.

[Shi10] ———, *A stable trace formula for Igusa varieties*, J. Inst. Math. Jussieu **9** (2010), no. 4, 847–895.

[Shi11] ———, *Galois representations arising from some compact Shimura varieties*, Ann. of Math. (2) **173** (2011), no. 3, 1645–1741.

[Shi12] ———, *Automorphic Plancherel density theorem*, Israel J. Math. **192** (2012), no. 1, 83–120.

[ST68] J.-P. Serre and J. Tate, *Good reduction of abelian varieties*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 492–517.

[Str08a] M. Strauch, *Deformation spaces of one-dimensional formal modules and their cohomology*, Adv. Math. **217** (2008), no. 3, 889–951.

[Str08b] ———, *Geometrically connected components of Lubin-Tate deformation spaces with level structures*, Pure Appl. Math. Q. **4** (2008), no. 4, Special Issue: In honor of Jean-Pierre Serre. Part 1, 1215–1232.

[SW13] P. Scholze and J. Weinstein, *Moduli of p-divisible groups*, Camb. J. Math. **1** (2013), no. 2, 145–237.

[Tat66] J. Tate, *Endomorphisms of abelian varieties over finite fields*, Invent. Math. **2** (1966), 134–144.

[Tat71] ______, *Classes d'isogénie des variétés abéliennes sur un corps fini (d'après T. Honda)*, Séminaire Bourbaki. Vol. 1968/69: Exposés 347–363, Lecture Notes in Math., vol. 175, Springer, Berlin, 1971, pp. Exp. No. 352, 95–110.

[Tat79] ______, *Number theoretic background*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 3–26.

[Tay95] R. Taylor, *On Galois representations associated to Hilbert modular forms. II*, Elliptic curves, modular forms, & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), Ser. Number Theory, I, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, pp. 185–191.

[Tay04] ______, *Galois representations*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **13** (2004), no. 1, 73–119.

[TY07] R. Taylor and T. Yoshida, *Compatibility of local and global Langlands correspondences*, J. Amer. Math. Soc. **20** (2007), no. 2, 467–493.

[vD72] G. van Dijk, *Computation of certain induced characters of* $\mathfrak{p}$*-adic groups*, Math. Ann. **199** (1972), 229–240.

[Wan14] H. Wang, *L'espace symétrique de Drinfeld et correspondance de Langlands locale I*, preprint, arXiv:1401.0530, 2014.

[WM71] W. C. Waterhouse and J. S. Milne, *Abelian varieties over finite fields*, 1969 Number Theory Institute (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XX, State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1969), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971, pp. 53–64.

[Yos08] T. Yoshida, *Local class field theory via Lubin-Tate theory*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **17** (2008), no. 2, 411–438.

[Zel80] A. V. Zelevinsky, *Induced representations of reductive* $\mathfrak{p}$*-adic groups. II. On irreducible representations of* $\mathrm{GL}(n)$, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **13** (1980), no. 2, 165–210.

[SGA4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA4)*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, Berlin, 1972–1973.

[SGA7] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA7)*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 288, 340, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[池松] 池松泰彦，U(2)(F), U(3)(F) の既約表現の endoscopic description，第 21 回整数論サマースクール「p 進簡約群の表現論入門」報告集，2014.

[石井] 石井卓，$\mathrm{GL}_n(F)$ の既約表現の L 因子と ε 因子，第 21 回整数論サマースクール「p 進簡約群の表現論入門」報告集，2014.

[伊藤] 伊藤哲史，局所 Langlands 対応の幾何的構成，第 21 回整数論サマースクール「p 進簡約群の表現論入門」報告集，2014.

[近藤] 近藤智，セグメントによる $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約表現の構成，第 21 回整数論サマースクール「p 進簡約群の表現論入門」報告集，2014.

[庄司] 庄司俊明，ドリーニュ–ルスティック指標を訪ねて—有限シュバレー群の表現論—，代数学百科 I「群論の進化」，朝倉書店，2004.

[成田] 成田宏秋，絡作用素と p 進簡約群の既約表現の構成，第 21 回整数論サマースクール「p 進簡約群の表現論入門」報告集，2014.

[原下] 原下秀士，局所類体論と有限群の表現論，第 21 回整数論サマースクール「p 進簡約群の表現論入門」報告集，2014.

[三枝] 三枝洋一，エタールコホモロジーと ℓ 進表現，第 17 回整数論サマースクール「ℓ 進ガロア表現とガロア変形の整数論」報告集，2010.

[森山] 森山知則，p 進簡約群の調和解析の基礎 I：行列成分，二乗可積分表現，緩増加表現，第 21 回整数論サマースクール「p 進簡約群の表現論入門」報告集，2014.