局所・大域整合性

九州大学大学院数理学研究院　三枝 洋一 (Yoichi Mieda)
Graduate School of Mathematics,
Kyushu University

0　はじめに

本稿は「$R=T$ の最近の発展についての勉強会」の報告書であり，Carayol および斎藤毅氏により得られた，Hilbert モジュラー形式に伴う Galois 表現について局所・大域整合性が成立するという結果の解説を行う．

まずはじめに，局所・大域整合性とは何かを簡単に紹介しておく．一般に代数体 F に対し，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 Π と F の絶対 Galois 群 G_F の n 次元 ℓ 進表現 ρ が Langlands の意味で対応するとは，ほとんど全ての有限素点 v に対し，不分岐主系列表現 Π_v の佐武パラメータと不分岐表現 ρ_v の Frobenius 固有値が（あらかじめ固定した同型 $\mathbb{C}\cong\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ のもとで）一致していることをいう．Π が与えられたとき，それに Langlands の意味で対応する G_F の n 次元 ℓ 進表現 $\rho(\Pi)$ を構成する問題を「Galois 表現の構成問題」と呼ぶ．この問題が解決されている例として，Eichler-Shimura, Deligne による，楕円モジュラー形式に伴う Galois 表現の構成が挙げられる．

保型表現 Π に対して Galois 表現の構成問題が解けていたとしても，有限個の素点 v においては $\rho(\Pi)_v$ がどのようになっているかは明らかではない．Π_v が超尖点表現である場合など特に興味深そうな場合には，$\rho(\Pi)_v$ の様子は $\rho(\Pi)$ の定義からは全く分からないのである．これが局所 Langlands 対応によって記述できることを主張するのが，局所・大域整合性である（局所 Langlands 対応については第 1 節参照）．より正確に述べると次のようになる：対応 $\Pi\longmapsto\rho(\Pi)$ が局所・大域整合性を満たすとは，任意の有限素点 v に対し，Π_v と $\rho(\Pi)_v$ が F_v の局所 Langlands 対応によって対応することをいう（v が ℓ を割り切る場合は修正が必要である）．

本稿の主定理は，Hilbert モジュラー形式に伴う保型表現 Π に対して Galois 表現の構成問題が解決でき，さらにそれについて局所・大域整合性が成り立つというものである．実際に主定理を述べる際（定理 3.1）にはこれら 2 つの主張をまとめて書いている（それを見ても何が整合的なのかよく分からないかと思いここで説明しておいた次第である）．Carayol の結果は Galois 表現の構成および ℓ を割らない素点 v における局所・大域整合性の部分であり，ℓ を割る素点 v における局所・大域整合性は斎藤毅氏による．なお，Galois 表現の構成だけなら Carayol よりも以前に太田雅巳氏 ([Oh]) によって得られていたことを補足しておく．

Carayol の論文が出版されたのはもう 20 年以上も前である．この論文は Deligne の「Piatetski-Shapiro への手紙」の内容を受けた先駆的かつ重要なものであり，その後の志村多様体の研究の進展に大きな影響を与えてきたと推察される．特に志村多様体の悪い

還元については，Carayol の手法を一般化した Harris-Taylor や Mantovan らの研究により，ここ 10 年くらいの間にかなり理解が進んだ．筆者は本稿を担当するにあたり，こうした発展を踏まえた現代的な視点に立って「原典」たる Carayol の結果を解説してみようという目標を立てたのである．

しかしこの目標の高さに比べ筆者の能力も執筆時間もなかったようで，当初思い描いていたものよりも随分と中途半端なものができあがってしまった．特に，志村曲線の還元のうち通常部分（超特異点を除いた部分）の扱いに不満が残っている．しかし，超特異点の部分（[Ca1] の §7 から §10）に関してはある程度簡略化することができた（注意 5.24 参照）ので，ひとまずこれで提出することとしたい．志村曲線の整モデルに関しても記述をいろいろ準備していたのであるが，ほとんど割愛し，最小限の説明にとどめた．それを含めると量がかなり増えてしまう上，[Ca2] は十分良く書かれておりこれ以上解説が必要であるとも感じられなかったためである．

本稿の構成は次の通りである．まず第 1 節では，p 進体上の GL_2 の表現論と ℓ 進 Galois 表現について簡単にまとめ，GL_2 の局所 Langlands 対応の主張を紹介した．主な参考文献は [BH] である．証明はついていたりついていなかったりと気まぐれであるが，証明がないものは基本的には [BH] に書かれているはずである（局所 Langlands 対応も含めて！）．第 2 節では，代数体に関していくつか記号の準備を行った．第 3 節では主定理を定式化している．第 4 節では，主定理のうち Carayol の結果にあたる部分を，四元数環の乗法群の保型形式に伴う Galois 表現の構成および（少し弱い）局所・大域整合性（定理 4.1）に帰着している．帰着した先の定理 4.1 は次の第 5 節で証明される．この節が最も長いが，Carayol の証明の本質的な部分はほとんどここに含まれているので致し方ないところである．第 6 節では，斎藤毅氏の結果について扱っている．志村曲線の幾何学については詳細を書かないことにしたため，概略しか述べることができなかったが，なるべく雰囲気が出るように努めたつもりである．

本稿の執筆は存外に時間がかかり，提出が大幅に遅れてしまった．編集者の方々にこの場を借りてお詫びしたい．また，本稿の執筆を通して講演者のご苦労の一端を実感することができた．素晴らしい勉強会を開いてくださった安田正大氏，山下剛氏のお二人に改めて感謝の意を表したい．

記号・約束

- 体 F に対し，その代数閉包を $\overline{F}$ で表す．また，分離閉包を F^{sep} で表す．これらを明示せずに固定する場合も多いが，それによって問題が起こらない場合に限っているはずである．

- 体 F に対し，その絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F)$ を G_F と書く．

- しばしば同型と等号 $=$ を区別しないことがあるが，それによって問題が起こらない場合に限っているはずである．

- 断りのない限りコホモロジーはエタールサイトでとる．

1 GL_2 の局所 Langlands 対応

局所・大域整合性の主定理を述べる前に，GL_2 の局所 Langlands 対応について復習しておこう．

本節では F を p 進体（$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大）とする．F に関連する記号をまとめておく．κ を F の剰余体とし，その元の個数を q とおく．付値 $F^\times \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ を v_F と書き，$a \in F$ に対し $|a| = q^{-v_F(a)}$ とおく．

自然な全射 $G_F \longrightarrow G_\kappa$ の核 I_F を F の**惰性群**という．κ は有限体であるから，幾何的 Frobenius 元 $(x \longmapsto x^{1/q}) \in G_\kappa$ と $1 \in \widehat{\mathbb{Z}}$ を対応させる同型 $G_\kappa \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ がある．$G_F \longrightarrow G_\kappa$ とこの同型を合成して得られる群準同型 $G_F \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$ を n と書き，G_F の部分群 $W_F = \{\sigma \in G_F \mid n(\sigma) \in \mathbb{Z}\}$ を F の **Weil 群**という．W_F には次を満たす位相が一意的に定まり，W_F は局所コンパクト群となる：

> $I_F \subset W_F$ は開集合であり，その位相は G_F からの相対位相と一致する（特に I_F はコンパクト群である）．

局所 Langlands 対応とは，大雑把に言えば，素数 $\ell \neq p$ に対し，

(a) $\mathrm{GL}_2(F)$ の既約スムーズ表現の同型類

(b) W_F の 2 次元 ℓ 進表現の同型類

の間によい一対一対応があることを主張するものである．まず，(a) の方から説明する．

1.1 $\mathrm{GL}_2(F)$ のスムーズ表現

定義 1.1
Ω を体とする．位相群 G の Ω 上の表現 V が**スムーズ**であるとは，任意の $x \in V$ に対し x の安定化群 $\mathrm{Stab}_G(x)$ が G の開部分群であることをいう．

スムーズ表現の定義は表現空間 V に関しては完全に代数的なものである（Ω の位相などは用いない）．したがって，2 つの体 Ω_1 と Ω_2 が同型ならば，Ω_1 上のスムーズ表現と Ω_2 上のスムーズ表現は同型 $\Omega_1 \cong \Omega_2$ を固定するごとに自然に同一視できる．Ω_1 上のスムーズ表現 ρ に $\iota\colon \Omega_1 \xrightarrow{\cong} \Omega_2$ によって対応する Ω_2 上のスムーズ表現を $\iota(\rho)$ と書くことにする．

以下では主に $\mathbb{C}$ 上のスムーズ表現を考えるので，単に「スムーズ表現」と言ったら $\mathbb{C}$ 上の表現のことを指すと約束することにする．

注意 1.2
$\mathrm{GL}_2(F)$ のスムーズ表現 (π, V) が**認容的** (admissible) であるとは，$\mathrm{GL}_2(F)$ の任意のコンパクト開部分群 K に対しその固定部分 V^K が有限次元ベクトル空間となることをいう．本稿で「既約スムーズ表現」と書いてある部分が文献によっては「既約認容表現」となっ

ていることがあるが，$\mathrm{GL}_2(F)$ の既約スムーズ表現は必ず認容的であるから，これら 2 つは同じものを指していることになる．

例 1.3

B を上半三角行列全体からなる $\mathrm{GL}_2(F)$ の部分群とする．B のスムーズ表現 (π, V) が与えられたとき，その $\mathrm{GL}_2(F)$ への代数的な誘導表現 $\{\varphi\colon \mathrm{GL}_2(F) \longrightarrow V \mid \varphi(bg) = \pi(b)\varphi(g)\ (b \in B)\}$（$\mathrm{GL}_2(F)$ の作用は $(g\varphi)(g') = \varphi(g'g)$ で定義する）のうちスムーズな元（安定化群が開になるような元），すなわち $\mathrm{GL}_2(F)$ のある開部分群 U に対し $\varphi(gu) = \varphi(g)$ $(g \in \mathrm{GL}_2(F), u \in U)$ となるような φ 全体のなす部分表現を $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(F)} \pi$ と書き，単に B から $\mathrm{GL}_2(F)$ への**誘導表現**という．これは明らかに $\mathrm{GL}_2(F)$ のスムーズ表現である．π が認容表現ならば $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(F)} \pi$ も認容表現となる．

χ_1, χ_2 を $F^\times$ の指標（スムーズな 1 次元表現）とするとき，B の指標 (χ_1, χ_2) が $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto \chi_1(a)\chi_2(d)$ によって定まる．これに上の構成を適用することで，$\mathrm{GL}_2(F)$ の認容表現 $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(F)}(\chi_1, \chi_2)$ が得られる．これが既約であることは，$\chi_1\chi_2^{-1} \neq 1, |\ |^2$ と同値であることが知られている．このとき $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(F)}(\chi_1, \chi_2)$ を $\mathrm{GL}_2(F)$ の**主系列表現**という．特に χ_1, χ_2 が $v_F\colon F^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$ を経由するとき，**不分岐主系列表現**という．

注意 1.4

$\delta_B\colon B \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto |a^{-1}d|$ によって定める．B のスムーズ表現 π に対し $\text{n-Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(F)} \pi = \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(F)}(\delta_B^{-1/2} \otimes \pi)$ とおき，これを π の**正規化された誘導表現**という．n-Ind はユニタリ表現を保ち，双対と可換であるなど Ind と比べ表現論的によい特徴を持っている．明らかに $\text{n-Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(F)}(\chi_1, \chi_2) = \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(F)}(|\ |^{1/2}\chi_1, |\ |^{-1/2}\chi_2)$ である．したがって，$\text{n-Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(F)}(\chi_1, \chi_2)$ が既約であることは $\chi_1\chi_2^{-1} \neq |\ |^{\pm 1}$ と同値である．

例 1.5

B の自明な指標からの誘導表現 $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(F)}(1, 1)$ は自明表現 $\mathbf{1}$ を部分表現として持ち，$\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(F)}(1, 1)/\mathbf{1}$ は既約になる．これを $\mathbf{St}$ と書き，**Steinberg 表現**という．$0 \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow \mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(F)}(1, 1) \longrightarrow \mathbf{St} \longrightarrow 0$ は分裂しない完全系列である．

$\mathbf{St}$ は（$\mathbb{P}^1(F)$ 上の $\mathbb{C}$ 値局所定数関数）/（$\mathbb{P}^1(F)$ 上の $\mathbb{C}$ 値定数関数）と実現することもできる（$\mathrm{GL}_2(F)$ は $\mathbb{P}^1(F)$ に一次分数変換で作用する）．

注意 1.6

$\mathrm{GL}_2(F)$ の既約スムーズ表現は次のように分類することができる：

i) 1 次元表現 $\chi \circ \det$（χ は $F^\times$ の指標）

ii) 主系列表現 $\text{n-Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(F)}(\chi_1, \chi_2)$（$\chi_1$，$\chi_2$ は $F^\times$ の指標）．$\text{n-Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(F)}(\chi_1, \chi_2) \cong \text{n-Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(F)}(\chi_1', \chi_2')$ は「$\chi_1 = \chi_1'$，$\chi_2 = \chi_2'$」または「$\chi_1 = \chi_2'$，$\chi_2 = \chi_1'$」と同値である．

iii) **スペシャル表現** $(\chi\circ\det)\otimes\mathbf{St}$（$\chi$ は $F^\times$ の指標）.

iv) それ以外.

iv) の「それ以外」の表現は**超尖点表現**と呼ばれ，全ての行列要素の台が $\mathrm{GL}_2(F)$ の中心 $F^\times$ を法としてコンパクトであるという特徴付けを持つ.

iii), iv) を合わせて**離散系列表現**または**本質的二乗可積分表現**と呼ぶ．これらは，全ての行列要素が中心を法として二乗可積分であるという特徴付けを持つ.

$\mathrm{GL}_2(F)$ の既約スムーズ表現 π に対する重要な不変量として，L 因子，ε 因子というものがある．π の L 因子 $L(\pi,s)$ は q^{-s} の $\mathbb{C}$ 係数多項式の逆数であり，ε 因子 $\varepsilon(\pi,s,\psi)$（ψ は F の非自明な加法的指標）は q^{-s} の $\mathbb{C}$ 係数単項式である．これらは GL_1 の場合に Tate によって考察された L 因子，ε 因子の GL_2 版であり，GL_1 のときと同様，保型形式・保型表現に伴う L 関数と関係する．ここでは局所 Langlands 対応の定式化に用いるだけなので，これ以上深入りはしないことにする．例えば [BH] の Chapter 6 などを参照されたい.

1.2　W_F の ℓ 進表現

次に (b)，すなわち ℓ 進表現の方について説明する．素数 $\ell\neq p=\operatorname{char}\kappa$ を固定する．W_F の ℓ 進表現の定義は簡単である.

定義 1.7

W_F の **ℓ 進表現**とは，有限次元 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ベクトル空間 V への連続表現 $\rho\colon W_F\longrightarrow\mathrm{GL}(V)$ のことである（V には ℓ 進位相を入れる）．1 次元 ℓ 進表現のことを **ℓ 進指標**と呼ぶ.

同様に，G_F の ℓ 進表現も定義することができる.

この定義では，$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ の ℓ 進位相を用いていることに注意したい．したがって，例えば $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ をそれと同型な体 $\mathbb{C}$ に置き換えると状況が大きく変化してしまう．また，ℓ 進表現の同型類が素数 $\ell\neq p$ に依存しない集合であるかどうかも定義からは全く明らかではない.

例 1.8

$c\in\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ とするとき，$W_F\longrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ を $\sigma\longmapsto c^{n(\sigma)}$ で定めると W_F の 1 次元 ℓ 進表現が得られる．W_F の不分岐 ℓ 進指標，すなわち I_F 上自明な ℓ 進指標はこのようなもので尽くされる．特に整数 m に対し $c=q^{-m}$ であるとき，この ℓ 進指標の表現空間は $\overline{\mathbb{Q}}_\ell(m)$ と表されることが多い（いわゆる **Tate 捻り**）．さらに $m=1$ のとき，この ℓ 進指標は ℓ 進円分指標と一致することが容易に分かる.

より代数的に ℓ 進表現を捉える方法が次に紹介する Weil-Deligne 表現である.

定義 1.9

標数 0 の体 Ω 上の **Weil-Deligne 表現**とは，W_F の Ω 上の有限次元スムーズ表現 (r,V)

と冪零な線型写像 $N\colon V\longrightarrow V$（**モノドロミー作用素**と呼ばれる）の組で, 任意の $\sigma\in W_F$ に対し $Nr(\sigma)=q^{n(\sigma)}r(\sigma)N$ を満たすもののことである.

この定義は Ω に関して代数的であることが直ちに分かる．特に，同型な体（$\mathbb{C}$ と $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ など）上の Weil-Deligne 表現は（体の同型を固定するごとに）同一視することができる．

$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の Weil-Deligne 表現からは次のようにして ℓ 進表現を構成することができる：

定義 1.10

$n(\varphi)=1$ となる $\varphi\in W_F$ および同型 $\mathbb{Z}_\ell(1)\cong\mathbb{Z}_\ell$ を一つ固定する．(r,N) を $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の Weil-Deligne 表現とするとき，$\sigma\in W_F$ に対し

$$\rho(\sigma)=r(\sigma)\exp\bigl(t_\ell(\varphi^{-n(\sigma)}\sigma)N\bigr)$$

とすることで W_F の ℓ 進表現 ρ が定まる．ここで，$t_\ell\colon I_F\longrightarrow\mathbb{Z}_\ell(1)$ は ℓ 進馴分岐指標であり，同型 $\mathbb{Z}_\ell(1)\cong\mathbb{Z}_\ell$ によって $I_F\longrightarrow\mathbb{Z}_\ell$ と見ている（F の素元の ℓ 冪乗根の系 $\underline{\xi}=(\xi_n)_n$ を一つとると，t_ℓ は $\sigma(\underline{\xi})=t_\ell(\sigma)\underline{\xi}$ $(\sigma\in I_K)$ によって特徴付けられる）.

注意 1.11

関手 $(r,N)\longmapsto\rho$ は φ および同型 $\mathbb{Z}_\ell(1)\cong\mathbb{Z}_\ell$ に依存するが, 同型類の対応 $(r,N)\longmapsto\rho$ は依存しない．実際，φ を $\varphi'=\varphi\sigma$ $(\sigma\in I_F)$ に置き換えたときに (r,N) に対応する ℓ 進表現を ρ' と書くと，ρ と ρ' は $x\longmapsto\exp((q-1)^{-1}t_\ell(\sigma)N)x$ によって同型である．また, 同型 $\mathbb{Z}_\ell(1)\cong\mathbb{Z}_\ell$ をその $a\in\mathbb{Z}_\ell^\times$ 倍で置き換えたときに (r,N) に対応する ℓ 進表現を ρ'' と書くと，ρ と ρ'' は $\alpha N\alpha^{-1}=aN$ となる $\alpha\in\mathrm{Aut}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(V)$ によって同型である.

W_F の全ての ℓ 進表現が Weil-Deligne 表現から上記の方法で得られることを主張するのが Grothendieck のモノドロミー定理である.

定理 1.12（Grothendieck のモノドロミー定理）

定義 1.10 における $(r,N)\longmapsto\rho$ は（$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の）Weil-Deligne 表現の圏と ℓ 進表現の圏との圏同値を誘導する.

証明は例えば [BH, 32.5] 参照．特に，ℓ 進表現の圏は（$\ell\neq p$ である限り）素数 ℓ に依存しないことが分かる.

定義 1.13

W_F の ℓ 進表現 ρ に対し，それに対応する $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の Weil-Deligne 表現を $\mathrm{WD}(\rho)$ と書く．同型 $\iota\colon\overline{\mathbb{Q}}_\ell\cong\mathbb{C}$ が固定されているとき，$\mathrm{WD}(\rho)$ に対応する $\mathbb{C}$ 上の Weil-Deligne 表現 $\iota(\mathrm{WD}(\rho))$ もしばしば $\mathrm{WD}(\rho)$ と書く.

また，G_F の ℓ 進表現 ρ に対し，$\mathrm{WD}(\rho|_{W_F})$ のことも単に $\mathrm{WD}(\rho)$ と書く.

注意 1.14

ρ を既約な ℓ 進表現とし $\mathrm{WD}(\rho)=(r,V,N)$ とおくと，$\mathrm{WD}(\rho)$ は既約な Weil-Deligne 表現であるから $N=0$ となる（$(r|_{\mathrm{Ker}\,N},\mathrm{Ker}\,N,0)$ が (r,V,N) の部分対象であることに注意）．したがって $\rho=r$ となるので，ρ はスムーズ表現であることが従う．つまり，既約な ℓ 進表現はスムーズ表現である．特に任意の ℓ 進指標はスムーズである．

一方，後に紹介するように $N\neq 0$ となる Weil-Deligne 表現も存在する（例 1.16）．そのような Weil-Deligne 表現に対応する ℓ 進表現はスムーズではない（t_ℓ の核が I_F の開部分群ではないことに注意）．

以下では主に $\mathbb{C}$ 上の Weil-Deligne 表現について考えるので，断りなく Weil-Deligne 表現と言ったら $\mathbb{C}$ 上のものを指すことにする．ℓ 進表現に対応して，Weil-Deligne 表現のテンソル積や双対が自然に定義できる（[BH, 31.2] 参照）．また，L を F の有限次拡大とするとき，W_F の Weil-Deligne 表現 (r,N) に対しその W_L への制限 $(r,N)|_{W_L}$ も自然に定義できる（r を W_L に制限するだけでよい）．

半単純性についての次の条件も重要である：

定義 1.15

W_F の Weil-Deligne 表現 (r,N) に対し次は同値である（[BH, 28.7] 参照）：

- r は半単純表現，すなわち既約表現の直和である．
- $n(\varphi)=1$ となるある $\varphi\in W_F$ に対し，$r(\varphi)$ は半単純（対角化可能）な線型写像である．
- $n(\varphi)=1$ となる任意の $\varphi\in W_F$ に対し，$r(\varphi)$ は半単純な線型写像である．

(r,N) がこの同値な 3 条件を満たすとき，**Frobenius 半単純**な Weil-Deligne 表現であるという．

一般の Weil-Deligne 表現 (r,N) が与えられたとき，それから Frobenius 半単純な Weil-Deligne 表現 (r^{ss},N) を次のようにして得ることができる：$n(\varphi)=1$ となる $\varphi\in W_F$ を固定し，$r(\varphi)=su=us$ を $r(\varphi)$ の Jordan 分解とし（s は半単純，u は冪単），$r^{\mathrm{ss}}(\varphi^n\sigma)=s^n r(\sigma)$ $(\sigma\in I_K)$ とおく（r^{ss} の同型類は φ のとり方によらない）．(r^{ss},N) を (r,N) の **Frobenius 半単純化**といい，$(r,N)^{F\text{-ss}}$ と書く．また，Weil-Deligne 表現 $(r^{\mathrm{ss}},0)$ を $(r,N)^{\mathrm{ss}}$ で表し，(r,N) の**半単純化**という．

例 1.16

2 次元 Frobenius 半単純 Weil-Deligne 表現 (r,V,N) を分類してみよう．r が既約かどうかにまず注目し，その後 N が 0 かどうかに注目する．

i) r が既約ならば $N=0$ である．実際，$\mathrm{Ker}\,N\subset V$ は部分 W_F 加群であり，N は冪零なので $\mathrm{Ker}\,N\neq 0$ となる．このとき，$(r,V,0)$ は既約な Weil-Deligne 表現である．

W_F の既約 2 次元スムーズ表現 r を構成する方法の一つとして，誘導表現を用いるというものがある．L を F の 2 次拡大とし，χ を W_L の指標とするとき，$\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_F}\chi$ は W_F の 2 次元表現である．これはしばしば既約表現になる．このようにして得られる既約表現を**単項的**であるという．

ii) r が可約（したがって 2 つの指標の直和）であるとする．

(a) $N = 0$ であるとき，W_F の指標 χ_1, χ_2 が存在して $(r, N) \cong (\chi_1 \oplus \chi_2, 0) = (\chi_1, 0) \oplus (\chi_2, 0)$ となる．つまり，(r, V, N) は 2 つの 0 でない Weil-Deligne 表現の直和となる．

(b) $N \neq 0$ であるとき，$\mathrm{Ker}\, N$ は V の 1 次元部分表現であり，$N\colon V/\mathrm{Ker}\, N \longrightarrow (\mathrm{Ker}\, N)(-1)$ は W_F の作用と可換な同型である（W_F のスムーズ表現 (r, V) および整数 m に対し, W_F の V への作用を $(\sigma, x) \longmapsto q^{-m\cdot n(\sigma)}r(\sigma)x$ で定めたものを $V(m)$ あるいは $r(m)$ と書く．Tate 捻りの類似）．したがって，$\mathrm{Ker}\, N$ への作用より定まる W_F の指標を χ とおくと, $N\colon V/\mathrm{Ker}\, N \xrightarrow{\cong} (\mathrm{Ker}\, N)(-1) = \chi(-1)$ であるから，次のような同型がある：

$$(r, V, N) \cong \left(\chi \oplus \chi(-1), \mathbb{C}^2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

特に χ が $\sigma \longmapsto q^{-n(\sigma)/2}$ である場合に右辺を $\mathbf{Sp}$ と書く．上の考察より, $N \neq 0$ となる Weil-Deligne 表現は W_F の指標 χ を用いて $\chi \otimes \mathbf{Sp}$ と表すことができることが分かる．$\chi \otimes \mathbf{Sp}$ は直既約だが既約ではない.

注意 1.17

上の例より次のことが分かる：半単純化が一致する 2 つの 2 次元 Frobenius 半単純 Weil-Deligne 表現 (r, N), (r, N') が同型であるためには，N と N' の階数が一致することが必要十分である．

GL_2 の既約スムーズ表現のときと同様に，Weil-Deligne 表現 (r, N) に対しても L 因子 $L((r, N), s)$ と ε 因子 $\varepsilon((r, N), s, \psi)$（$\psi$ は F の非自明な加法的指標）が定義できる．L 因子の定義は簡単である：$r' = \mathrm{Ker}\, N \subset r$ とし，$\varphi \in W_F$ を $n(\varphi) = 1$ となる元とすると，$L((r, N), s) = \det(1 - r'(\varphi)q^{-s})^{-1}$．しかし，$\varepsilon$ 因子の定義は容易に述べることができない（大域的な手法を用いた構成がよく知られている）．例えば [BH] の Chapter 7 を参照されたい.

1.3　GL_2 の局所 Langlands 対応

GL_2 の場合を考える前に，GL_1 の局所 Langlands 対応，すなわち $F^\times$ の指標と W_F の指標の対応を構成しておく．

定義 1.18

$\mathrm{Art}_F\colon F^\times \xrightarrow{\cong} W_F$ を局所類体論の同型とする（F の素元 ϖ に対し $n(\mathrm{Art}_F(\varpi)) = 1$ となるように正規化する）．$F^\times$ の指標 χ に対し，$\mathrm{rec}_F\,\chi = \chi \circ \mathrm{Art}_F^{-1}$ とおく．これは W_F の指標である．

rec_F は L 因子，ε 因子を保つ，すなわち $F^\times$ の指標 χ に対し $L(\chi, s) = L(\mathrm{rec}_F\,\chi, s)$, $\varepsilon(\chi, s, \psi) = \varepsilon(\mathrm{rec}_F\,\chi, s, \psi)$ が成り立つことが知られている（ε 因子に関しては，むしろこの等式が成立するように構成すると言ったほうが正しい）．

例 1.19

$\mathrm{rec}_F(|\ |)$ は W_F の円分指標 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell(1)$ と一致する．

これで GL_2 の局所 Langlands 対応の主張を述べることができる．

定理 1.20（GL_2 の局所 Langlands 対応）

F の非自明な加法的指標 ψ を一つ固定する．

$\mathrm{GL}_2(F)$ の既約スムーズ表現 π に対し，次の条件を満たす Frobenius 半単純な 2 次元 Weil-Deligne 表現 $\mathrm{rec}_F(\pi)$ が同型を除いて唯一存在する：$F^\times$ の任意の指標 χ に対し，

$$L\bigl((\chi \circ \det) \otimes \pi, s\bigr) = L\bigl(\mathrm{rec}_F(\chi) \otimes \mathrm{rec}_F(\pi), s\bigr),$$
$$\varepsilon\bigl((\chi \circ \det) \otimes \pi, s, \psi\bigr) = \varepsilon\bigl(\mathrm{rec}_F(\chi) \otimes \mathrm{rec}_F(\pi), s, \psi\bigr).$$

$\mathrm{rec}_F(\pi)$ は ψ のとり方によらない．すなわち，上の 2 つ目の等式は任意の非自明加法的指標に対し成立する．また，rec_F は指標による捻り，双対と両立する．すなわち，$F^\times$ の任意の指標 χ に対し $\mathrm{rec}_F((\chi \circ \det) \otimes \pi) = \mathrm{rec}_F(\chi) \otimes \mathrm{rec}_F(\pi)$ が成立し，また $\mathrm{rec}_F(\pi^\vee) = \mathrm{rec}_F(\pi)^\vee$ となる．π の中心指標を χ_π とおくと，$\det \mathrm{rec}_F(\pi) = \mathrm{rec}_F(\chi_\pi)$ となる．

$\pi \longmapsto \mathrm{rec}_F(\pi)$ は

(a) $\mathrm{GL}_2(F)$ の既約スムーズ表現の同型類

(b) 2 次元 Weil-Deligne 表現の同型類

の間の全単射を与える．

この定理を最初に完全に証明したのは Kutzko ([Ku]) である．現在では一般に GL_n の場合に Harris-Taylor ([HT]), Henniart ([He1]) によって志村多様体のコホモロジーを用いた証明が与えられている他，Bushnell-Henniart ([BH]) による純局所的な証明もある（後者は GL_2 に限る）．なお，GL_n の場合は局所 Langlands 対応を定理 1.20 中の条件だけで特徴付けることはできない．現在知られている特徴付けとして，対の L 因子および ε 因子というものを用いる方法がある ([He2]).

例 1.21
$\mathrm{rec}_F(\text{n-Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(F)}(\chi_1, \chi_2)) = \mathrm{rec}_F \chi_1 \oplus \mathrm{rec}_F \chi_2$, $\mathrm{rec}_F \mathbf{St} = \mathbf{Sp}$ である．したがって，

- 主系列表現と可約半単純 Weil-Deligne 表現
- スペシャル表現と直既約だが既約でない Weil-Deligne 表現
- 超尖点表現と既約 Weil-Deligne 表現

の間にそれぞれ一対一対応ができる．

1.4 p 進表現に対応する Weil-Deligne 表現

これまでは $\ell \neq p$ である場合を考えてきたが，$\ell = p$ の場合，つまり p 進体の p 進表現についても簡単に触れておく．p 進体の p 進表現は ℓ 進表現よりもはるかに複雑であり，定理 1.12 のように Weil-Deligne 表現と一対一に対応するわけではない．しかし，G_F の p 進表現 ρ から Weil-Deligne 表現 $\mathrm{WD}(\rho)$ を構成することは可能である．

$\mathrm{WD}(\rho)$ を定義するには，Fontaine により導入された p 進周期環 B_{st} を用いる．$\mathbb{Q}_p$ 上不分岐な F の部分体のうち最大のものを F_0 と書くと，B_{st} は次の付加構造を持った F_0 代数である：

- Galois 群 G_F の作用（F_0 線型）.
- Frobenius 作用 $\phi\colon B_{\mathrm{st}} \longrightarrow B_{\mathrm{st}}$ (G_F 線型, F_0 の算術的 Frobenius 同型に関し半線型).
- モノドロミー作用素 $N\colon B_{\mathrm{st}} \longrightarrow B_{\mathrm{st}}$ （G_F 線型，$N\phi = p\phi N$ を満たす）.

F の有限次拡大体 L に対し，$B_{\mathrm{st}}^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/L)} = L_0$ が成り立つ．

定義 1.22
$\mathbb{Q}_p$ 同型 $\overline{F} \cong \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定する．G_F の p 進表現 $\rho\colon G_F \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ に対し，$\overline{\mathbb{Q}}_p$ ベクトル空間 $D_{\mathrm{pst}}(V)$ を

$$D_{\mathrm{pst}}(V) = \bigcup_{F \subset L \subset \overline{F}} \Big((V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{st}})^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/L)} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes L_0} \overline{\mathbb{Q}}_p \Big)$$

で定める（L は F の有限次拡大を動く．$V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{st}}$ への $\mathrm{Gal}(\overline{F}/L)$ の作用は対角的に定める．テンソル積は $L_0 \hookrightarrow \overline{F} \cong \overline{\mathbb{Q}}_p$ の係数拡大によって得られる $\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes L_0 \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ に関してとる）.

$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_p} D_{\mathrm{pst}}(V) \leq \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_p} V$ であることが知られている．特に $D_{\mathrm{pst}}(V)$ は有限次元 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ ベクトル空間である．$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_p} D_{\mathrm{pst}}(V) = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_p} V$ であるとき，V は**潜在的半安定表現**であるといわれる．p 進表現が潜在的半安定であることは **de Rham 表現**（ここでは定義しない）であることと同値であることが知られているので，以下では潜在的半安定表現

のことを de Rham 表現ということにする．

$V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{st}}$ には $\sigma \in W_F$ の作用を $\sigma \otimes (\phi^{n(\sigma)[\kappa:\mathbb{F}_p]} \circ \sigma)$ で定めることができる．これは任意の L に対し $\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} L_0$ 線型であるから，$D_{\mathrm{pst}}(V)$ への W_F の作用を誘導する．こうして得られた表現を r と書く．$D_{\mathrm{pst}}(V)$ の定義より r はスムーズ表現となる．

一方, $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{st}}$ にはモノドロミー作用素を $\mathrm{id} \otimes N$ で定めることができ, これは $D_{\mathrm{pst}}(V)$ 上のモノドロミー作用素（これも N と書く）を誘導する．

$N\phi = p\phi N$ より，$\sigma \in W_F$ に対し $Nr(\sigma) = p^{n(\sigma)[\kappa:\mathbb{F}_p]}r(\sigma)N = q^{n(\sigma)}r(\sigma)N$ が従うので，$(r, D_{\mathrm{pst}}(V), N)$ は $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の Weil-Deligne 表現である．これを $\mathrm{WD}(\rho)$ と書く．

注意 1.23

ℓ 進表現のときと異なり，WD は充満忠実にはならない．実際，$D_{\mathrm{pst}}(V)$ には上で説明していない付加構造であるフィルトレーションがあり，V が de Rham 表現であるときは $D_{\mathrm{pst}}(V)$ への G_F の作用，Frobenius 作用 ϕ（$\mathrm{id} \otimes \phi$ から誘導されるもの），フィルトレーションという 3 つの付加構造から V がちょうど復元できる（de Rham 表現 V に対して 3 つの付加構造を持ったベクトル空間 $D_{\mathrm{pst}}(V)$ を対応させる関手は充満忠実である）ことが証明できる．WD をとるとフィルトレーションが忘却されるので，充満忠実性が崩れるのである．

1.5　補遺：Weil 群の表現についての補足

ここでは，p 進体の Weil 群のスムーズ表現に関する技術的な補題をいくつか準備する．これらは主に 4.3 節で用いられる．

補題 1.24

$r\colon W_F \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ を W_F の有限次元スムーズ表現とするとき，次が成り立つ：

i) $r(I_F)$ は有限群である．

ii) $\varphi \in W_F$ を $n(\varphi) = 1$ となる元とするとき，ある正整数 m に対し $r(\varphi^m)\colon V \longrightarrow V$ は W_F の作用と可換になる．

証明　V の基底 $x_1, \ldots, x_n \in V$ をとる．r はスムーズ表現であるから，$\mathrm{Stab}_{I_F}(x_i)$ は I_F の開部分群である．よって F の有限次拡大体 L が存在して $I_F \cap W_L \subset \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Stab}_{I_F}(x_i)$ となる．必要なら L を大きくして F の Galois 拡大とすることで，$H = I_F \cap W_L$ は W_F の正規部分群となるようにできる．H は I_F の指数有限な開部分群であり $\mathrm{Ker}\, r$ に含まれるので，まず $r(I_F)$ は有限群であることが分かる．一方，φ は共役によって I_F/H に作用するが，I_F/H は有限群なので，ある整数 $m > 0$ に対し φ^m は I_F/H に自明に作用する．この m に対し，$r(\varphi^m)\colon V \longrightarrow V$ は W_F の作用と可換であるのでよい（W_F は I_F と φ で生成されることに注意）．∎

系 1.25
$r\colon W_F \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ を W_F の有限次元既約スムーズ表現とするとき，W_F の不分岐指標 χ が存在して，$\chi \otimes r\colon W_F \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ の像は有限となる．

証明　補題 1.24 ii) の条件を満たす正整数 m をとると，r は既約なので Schur の補題により $r(\varphi^m)$ は定数である．$r(\varphi^m) = c$ とおき，不分岐指標 $\chi\colon W_F \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\varphi \longmapsto c^{-1/m}$ となるように定めれば，$\chi \otimes r$ の像は $r(I_F)$ および $\chi(\varphi^i)$ $(1 \leq i \leq m-1)$ で生成されるので有限群となる．■

この証明と同様の考え方によって，W_F の半単純スムーズ表現は指標によって区別できることが証明できる．これは第 6 節で用いられる．

命題 1.26　（[Sa2, Lemma 1 (1)]）
r, r' を W_F の半単純表現とし，任意の $\sigma \in W_F^+ := \{\sigma \in W_F \mid n(\sigma) \geq 0\}$ に対し $\mathrm{Tr}\, r(\sigma) = \mathrm{Tr}\, r'(\sigma)$ が成り立っているとする．このとき，$r \cong r'$ である．

証明　$\varphi \in W_F$ を $n(\varphi) = 1$ となる元とすると，補題 1.24 ii) より $r(\varphi^m)$, $r'(\varphi^m)$ がともに W_F の作用と可換であるような正整数 m がとれる．$r(\varphi^m)$ または $r'(\varphi^m)$ の固有値として現れる複素数を $a_1, \ldots, a_k$ とおき，r の $r(\varphi^m)$ に関する固有分解を $r = r_1 \oplus \cdots \oplus r_k$（$r_i$ に $r(\varphi^m)$ が a_i 倍で作用する），r' の $r'(\varphi^m)$ に関する固有分解を $r' = r'_1 \oplus \cdots \oplus r'_k$（$r'_i$ に $r'(\varphi^m)$ が a_i 倍で作用する）とおく．多項式 $Q_i(T)$, $P_i(T)$ を $Q_i(T) = (T-a_i)^{-1}\prod_{j=1}^{n}(T-a_j)$, $P_i(T) = Q_i(a_i)^{-1}Q_i(T)$ で定めると，$P_i(r(\varphi^m))$ は r から r_i への射影子であり，$P_i(r'(\varphi^m))$ は r' から r'_i への射影子であるから，任意の $\sigma \in W_F^+$ に対し

$$\mathrm{Tr}\, r_i(\sigma) = \mathrm{Tr}\Big(P_i\big(r(\varphi^m)\big)r(\sigma)\Big) = \mathrm{Tr}\Big(P_i\big(r'(\varphi^m)\big)r'(\sigma)\Big) = \mathrm{Tr}\, r'_i(\sigma)$$

となる．これより，一般の $\sigma \in W_F$ に対しても，$\varphi^{ml}\sigma \in W_F^+$ となる整数 l をとると $\mathrm{Tr}\, r_i(\sigma) = a_i^{-l}\,\mathrm{Tr}\, r_i(\varphi^{ml}\sigma) = a_i^{-l}\,\mathrm{Tr}\, r'_i(\varphi^{ml}\sigma) = \mathrm{Tr}\, r'_i(\sigma)$ となるので同様の等式が成り立つ．

さて，不分岐指標 $\chi_i\colon W_F \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\varphi \longmapsto a_i^{-1/m}$ で定めると，系 1.25 と同様にして $\chi_i \otimes r_i$, $\chi_i \otimes r'_i$ は W_F の有限商を経由することが分かる．上で示したことからこれらの指標は一致するので，有限群の表現論により $\chi_i \otimes r_i \cong \chi_i \otimes r'_i$ すなわち $r_i \cong r'_i$ が得られる．これよりよい．■

定義 1.27
W_F の有限次元スムーズ表現 $r\colon W_F \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ に対し，$\mathbb{P}r$ を $W_F \xrightarrow{r} \mathrm{GL}(V) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{PGL}(V)$ の合成として定める．

命題 1.28
W_F の 2 次元スムーズ表現 $r\colon W_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ に対し，$\mathrm{Im}\,\mathbb{P}r$ が有限群であると仮定する（系 1.25 より，r が既約ならばこの仮定は満たされる）．このとき，$\mathrm{Im}\,\mathbb{P}r$ は次のいずれかと同型である：

i) 巡回群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

ii) 二面体群 $D_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $(n \geq 3)$.

iii) 四面体群（交代群 A_4）.

iv) 八面体群（対称群 S_4）.

i) の場合 r は可約であり，ii), iii), iv) の場合 r は既約である．
ii) の場合は r は単項的となる．iii) の場合 r は**四面体型**であるといい，iv) の場合 r は**八面体型**であるという．

証明　まず，W_F は可解群であるから，$\mathrm{Im}\,\mathbb{P}r$ も可解群であることに注意する．
$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \cong \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ である．同型の構成方法のみ説明することにする．PGL_2 の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とおくと，$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ は随伴作用により $\mathfrak{g}$ に作用し，さらに $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を保つ．$\mathfrak{g}$ は 3 次元単純 Lie 環であるから，これにより準同型 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ が得られる．
よく知られているように，$\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ の有限部分群は巡回群，二面体群，四面体群，八面体群，二十面体群の 5 種類である．二十面体群は A_5 と同型なので可解でないから現れない．
あとは次を証明すれば十分である：

(a) r が可約かつ $\mathrm{Im}\,\mathbb{P}r$ が有限群ならば $\mathrm{Im}\,\mathbb{P}r$ は巡回群である．

(b) $\mathrm{Im}\,\mathbb{P}r$ が巡回群ならば r は可約である．

(c) $\mathrm{Im}\,\mathbb{P}r$ が二面体群ならば r は単項的である．

まず (a) を示す．$\mathrm{Im}\,\mathbb{P}r$ が有限群であることから，$n(\varphi) = 1$ となる $\varphi \in W_F$ に対し $r(\varphi)^m = c$ となる整数 $m > 0$ および定数 $c \neq 0$ が存在する．これより $r(\varphi)$ は半単純であり，r は Frobenius 半単純表現であることが分かる．したがって r が可約ならば 1 次元表現の直和 $\chi_1 \oplus \chi_2$ と同型となるので，$\mathrm{Im}\,\mathbb{P}r$ は巡回群になる．
次に (b) を示す．$\mathrm{Im}\,\mathbb{P}r$ が位数 n の巡回群であるとし，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ で $\mathrm{Im}\,\mathbb{P}r$ の生成元にうつるような $\mathrm{Im}\,r$ の元 α をとる．α の固有ベクトルを一つとり，それで生成される $\mathbb{C}^2$ の 1 次元部分空間を V とおく．$\mathrm{Im}\,r$ の元は α^i の定数倍であるから V を保つので，V は W_F の作用により保たれる．よって r は可約である．
最後に (c) を示す．$\mathrm{Im}\,\mathbb{P}r$ が二面体群であるとし，その指数 2 の正規部分群を H とおく．H の $\mathbb{P}r$ による逆像に対応する F の 2 次拡大を L とする．このとき H は巡回群であるから，(b) より $r|_{W_L}$ は可約であり，したがって W_L の指標 χ で $\mathrm{Hom}_{W_L}(r|_{W_L}, \chi) \neq 0$

となるものが存在する．このとき $\mathrm{Hom}_{W_F}(r, \mathrm{Ind}_{W_L}^{W_F}\chi) \neq 0$ であるから，r の既約性と $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ind}_{W_L}^{W_F}\chi = 2$ より $r \cong \mathrm{Ind}_{W_L}^{W_F}\chi$ が従う．∎

補題 1.29 （[Ca1, 12.1.3 Lemme]）

W_F の 2 次元既約スムーズ表現 r が四面体型または八面体型であるとする．H を $\mathrm{Im}\,\mathbb{P}r$ の 2-Sylow 部分群とし（これは指数 3 の部分群である），H の W_F における逆像に対応する F の拡大体を L とおく（L は F の 3 次拡大である．r が四面体型のとき L は F の Galois 拡大であるが，r が八面体型のときはそうではない）．

W_F の（既約とは限らない）2 次元スムーズ表現 r' に対し $r|_{W_L} \cong r'|_{W_L}$ および $\det r = \det r'$ が成立するならば，$r \cong r'$ である．

証明　まず r が四面体型の場合を考える．この場合 H は $\mathrm{Im}\,\mathbb{P}r$ の正規部分群である．$W_F/W_L \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の非自明指標 χ を一つとると，

$$\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_F}(r|_{W_L}) \cong r \oplus \chi r \oplus \chi^2 r, \quad \mathrm{Ind}_{W_L}^{W_F}(r'|_{W_L}) \cong r' \oplus \chi r' \oplus \chi^2 r'$$

となる．条件よりこれらは同型なので，r' は既約であり，$r \cong \chi^i r'$ となる $0 \leq i \leq 2$ が存在することが分かる．両辺の det をとることで $\det r = \chi^{2i} \det r'$ が得られるから，χ^{2i} は自明指標である．χ^3 が自明であることと χ の非自明性から $i = 0$ が分かり，$r \cong r'$ が従う．

次に r が八面体型の場合を考える．G を $\mathrm{Im}\,\mathbb{P}r$ の指数 2 の正規部分群とし，対応する F の拡大体を M とおく．G は四面体群であるから，$r|_{W_M}$ は四面体型である．さらに，G の 2-Sylow 部分群 H' は H に含まれる（実際，H' は G の唯一の 2-Sylow 部分群なので $\mathrm{Im}\,\mathbb{P}r$ の正規部分群となる．Sylow の定理より $\mathrm{Im}\,\mathbb{P}r$ の 2-Sylow 部分群 H'' で H' を含むものが存在し，H は H'' と共役なので H' を含む）．このことから $r|_{W_M}, r'|_{W_M}$ はこの補題の条件を満たしていることが分かり，既に示した場合を用いることで $r|_{W_M} = r'|_{W_M}$ が得られる．

したがって, r と r' の指標は $W_L \cup W_M$ 上で一致する．一方, W_F の任意の元は $W_L \cup W_M$ の元と共役であることが容易に確かめられる（S_4 の 2-Sylow 部分群 H を 1 つとり，S_4 の任意の元が $H \cup A_4$ の元と共役であることを直接確かめればよい）．よって r と r' の指標は W_F 上で一致することが分かるので，命題 1.26 より r と r' の半単純化は同型である．これと r の既約性から $r \cong r'$ が従うのでよい．∎

注意 1.30

上の補題において，$r|_{W_L}$ は可約または単項的である．

2　代数体に関する記号・補足

ここでは，F を代数体とし，F に関連する記号をいくつか導入する．

2.1　アデール

F の素点 v に対し，F の v による完備化を F_v と書く．v が有限素点である場合には，F_v は完備離散付値体となるが，その整数環を $\mathcal{O}_v$ と書く．

$\mathbb{A}_F = \prod'_v F_v := \{(a_v)_v \in \prod_v F_v \mid$ 有限個の v を除いて $a_v \in \mathcal{O}_v\}$ で F のアデール環を表す．F の素点からなる有限集合 S に対し，$F_S = \prod_{v\in S} F_v$, $\mathbb{A}_F^S = \prod'_{v\notin S} F_v$ とおく．特に S が無限素点全体からなる集合の場合はそれぞれ F_∞, $\mathbb{A}_F^\infty$ と書く．また，$S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ である場合には F_S, $\mathbb{A}_F^S$ と書かずに単に $F_{v_1,\ldots,v_n}$, $\mathbb{A}_F^{v_1,\ldots,v_n}$ と書く．$F = \mathbb{Q}$ の場合は $\mathbb{A}$ の下添字 $\mathbb{Q}$ を省略する．

F 上の代数群 G に対し，$G(\mathbb{A}_F)$, $G(F_S)$, $G(\mathbb{A}_F^S)$ を定義することができる．例えば，

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F) = \prod_v{}' \mathrm{GL}_n(F_v) = \left\{(g_v)_v \in \prod_v \mathrm{GL}_n(F_v) \,\middle|\, \text{有限個の } v \text{ を除き } g_v \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_v)\right\}$$

である．特に $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)$ のことを $\mathbb{A}_F^\times$ と書き，イデール群と呼ぶ．$|\ |_F\colon \mathbb{A}_F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$; $(a_v)_v \longrightarrow \prod_v |a|_v$ をイデールノルムという（$|\ |_v$ は素点 v に対応する絶対値）．イデールノルムは $F^\times \subset \mathbb{A}_F^\times$ 上自明である．

上記で導入した上添字，下添字の記法は，アデールのみならず保型表現などの大域的な対象に対し適用される．例えば，保型表現 Π の有限部分は Π^∞ と書く．

2.2　大域類体論

群準同型 $\mathrm{Art}_F\colon \mathbb{A}_F^\times \longrightarrow G_F^{\mathrm{ab}}$ を局所類体論の準同型

- $\mathrm{Art}_{F_v}\colon F_v^\times \longrightarrow G_{F_v}^{\mathrm{ab}} \subset G_F^{\mathrm{ab}}$（$v$ が有限素点のとき），
- $\mathrm{Art}_{F_v}\colon \mathbb{R}^\times \twoheadrightarrow \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\cong} G_{F_v}^{\mathrm{ab}} \subset G_F^{\mathrm{ab}}$（$v$ が実素点のとき），
- $\mathrm{Art}_{F_v}\colon \mathbb{C}^\times \longrightarrow \{1\} = G_{F_v}^{\mathrm{ab}} \subset G_F^{\mathrm{ab}}$（$v$ が複素素点のとき）

の積として定める．これは同型 $\mathbb{A}_F^\times/(F^\times(F_\infty^\times)^0)^\wedge \xrightarrow{\cong} G_F^{\mathrm{ab}}$ を誘導する（$(F_\infty^\times)^0$ は $F_\infty^\times$ の単位元を含む連結成分，$(F^\times(F_\infty^\times)^0)^\wedge$ は $F^\times(F_\infty^\times)^0$ の $\mathbb{A}_F^\times$ における閉包）．

定義 2.1

$\chi\colon \mathbb{A}_F^\times/F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を連続指標とする．各埋め込み $\sigma\colon F \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対し整数 n_σ が存在して次の条件を満たすとき，χ は**代数的 Hecke 指標**であるといわれる：

合成 $((F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^\times)^0 \subset (F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R})^\times \xrightarrow{\cong} F_\infty^\times \xrightarrow{\chi_\infty} \mathbb{C}^\times$ は $\prod_\sigma(\sigma\otimes 1)^{n_\sigma}$ に一致する．

例 2.2
例えば，各無限素点 τ に対し χ_τ が次のような形（k, l は整数）ならば χ は代数的 Hecke 指標である：

$$F_v = \mathbb{R} \text{ ならば } z \longmapsto z^k,\ \ F_v = \mathbb{C} \text{ ならば } z \longmapsto z^k \overline{z}^l.$$

命題 2.3（GL_1 **の大域 Langlands 対応**）
素数 ℓ および同型 $\iota\colon \mathbb{C} \cong \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を固定する．このとき，任意の代数的 Hecke 指標 χ に対し，G_F の ℓ 進指標 $R_\ell(\chi)\colon G_F \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ で次を満たすものが一意的に存在する：

$$\ell \text{ を割らない } F \text{ の任意の有限素点 } v \text{ に対し，} \iota^{-1}\,\mathrm{WD}(R_\ell(\chi)|_{W_{F_v}}) = \mathrm{rec}_{F_v}\,\chi_v.$$

さらに，この対応により代数的 Hecke 指標は G_F の ℓ 進指標 ξ で次を満たすものと一対一に対応する：

$$\ell \text{ を割る } F \text{ の任意の素点 } \lambda \text{ に対し，} \xi|_{G_{F_\lambda}} \text{ は de Rham 表現である．}$$

略証　$R_\ell(\chi)$ を構成するには，次で定まる $\chi'\colon \mathbb{A}_F^\times/(F^\times(F_\infty^\times)^0)^\wedge \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ を考え，$R_\ell(\chi) = \chi' \circ \mathrm{Art}_F^{-1}$ とすればよい：

$$\chi'(a) = \iota\Bigl(\chi(a)\prod_\sigma(\sigma\otimes 1)(a_\infty)^{-n_\sigma}\Bigr)\prod_\sigma\bigl((\iota\circ\sigma)\otimes 1\bigr)(a_\ell)^{n_\sigma} \quad (a \in \mathbb{A}_F^\times).$$

$R_\ell(\chi)$ の一意性は Chebotarev 密度定理より従う．■

注意 2.4
G_F の ℓ 進指標 ξ が位数有限であるとする．このとき明らかに $\xi|_{G_{F_\lambda}}$ は de Rham 表現なので，$R_\ell(\chi) = \xi$ となる代数的 Hecke 指標 χ が存在する．明らかに R_ℓ はテンソル積と交換し，自明な指標を自明な ℓ 進指標にうつすので，χ も位数有限である．よって χ に関する n_σ は全て 0 であることが分かる．

3　局所・大域整合性の主定理

$k \geq 2$ と w を $k - w \in 2\mathbb{Z}$ となる整数とする．$\mathbb{R}^\times$ の指標 μ, ν を

$$\mu(t) = |t|^{\frac{1}{2}(k-1-w)}\,\mathrm{sgn}(t)^k, \quad \nu(t) = |t|^{\frac{1}{2}(-k+1-w)}$$

によって定めると，誘導表現 $\text{n-Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}(\mu,\nu)$（定義は省略する）は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の認容表現となり，本質的二乗可積分な既約認容商表現を唯一持つ．これを $D_{k,w}$ と書く．

F を総実代数体とし，$d=[F:\mathbb{Q}]$ とおく．以下では簡単のため，$d>1$ と仮定する．$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F,\mathbb{R})=\{\tau_1,\ldots,\tau_d\}$ とおく．

$\underline{k}=(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{Z}^d$ および $w\in\mathbb{Z}$ を，$k_i\geq 2$ かつ $k_i-w\in 2\mathbb{Z}$ を満たすように固定し，次の条件を満たす $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 Π を考える：

(CH)　Π は尖点的かつ $\Pi_{\tau_i}\cong D_{k_i,w}$ を満たす．

このような Π は尖点的な正則 Hilbert モジュラー形式と対応する（(CH) は Cuspidal Hilbert の頭文字をとった）．

また，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 Π に対し，Π_v が離散系列表現となるような F の有限素点 v の集合を $\mathrm{DS}(\Pi)$ と書くことにし，次の条件を考える：

(DS)　$d=[F:\mathbb{Q}]$ が偶数ならば $\#\,\mathrm{DS}(\Pi)\geq 1$ である．

こちらは技術的な仮定であり，[BR1], [BR2] や [Ta1] に見られるように外すことが可能である．後者については山上氏による解説 [Ya] をご覧いただきたい．

本稿の主定理は次の通りである：

定理 3.1（Carayol, T. Saito）

ℓ を素数とし，体の同型 $\iota\colon\mathbb{C}\xrightarrow{\cong}\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を固定する．Π を (CH) および (DS) を満たす $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現とするとき，G_F の 2 次元既約 ℓ 進表現 $R_\ell(\Pi)$ で次を満たすものが存在する：

$$F\text{ の任意の有限素点 }\mathfrak{p}\text{ に対し, }\mathrm{WD}\bigl(R_\ell(\Pi)|_{G_{F_\mathfrak{p}}}\bigr)^{F\text{-ss}}=\mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}}\bigl(|\det|^{-1/2}\otimes\Pi_\mathfrak{p}^\vee\bigr).$$

ここで $|\det|$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\mathfrak{p})\xrightarrow{\det}F_\mathfrak{p}^\times\xrightarrow{|\ |_\mathfrak{p}}\mathbb{C}^\times$ の合成である．また，$\iota^{-1}\,\mathrm{WD}$ を単に WD と書いている．$R_\ell(\Pi)$ および WD は ι の取り方に依存することに注意せよ．

この定理は，$\mathfrak{p}$ が ℓ を割らないときは Carayol によって，$\mathfrak{p}$ が ℓ を割るときは斎藤毅氏によって証明された．

注意 3.2

R_ℓ の既約性は，R_ℓ がほとんどすべての $\mathfrak{p}$ に対して定理中の条件を満たすことから自動的に従う（Ribet による．[Ta2, Proposition 3.1] 参照）．この既約性と Chebotarev 密度定理により，定理 3.1 の R_ℓ は存在すれば（同型を除き）一意的であることが分かる．

注意 3.3

$R_\ell(\Pi)$ を定理 3.1 の条件を満たす G_F の 2 次元既約 ℓ 進表現とすると，特に ℓ を割る E の素点 λ に対し $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{WD}(R_\ell(\Pi)|_{G_{F_\lambda}})=2$ であるから，$R_\ell(\Pi)|_{G_{F_\lambda}}$ は de Rham 表現である．

注意 3.4

実際は表現 R_ℓ の定義体に関してより強い次の結果を証明することができる：$\mathbb{Q}$ のある有限次拡大 E が存在して，E の任意の有限素点 λ に対し G_F の E_λ 上の 2 次元表現 $R_\lambda(\Pi)$ で定理 3.1 の条件を満たすものが存在する．

これを証明しようとしても証明は大きくは変化しないが，いくつかの部分で議論が煩雑になるので本稿では定理 3.1 の形で紹介することにする．

4 主定理の証明 (1)

F 上の四元数環（F 上階数 2 の中心的可除代数）B を，分岐する素点（$B\otimes_F F_v \cong \mathrm{M}_2(F_v)$ とならない素点 v）の集合 $\mathrm{ram}(B)$ が次のようになるようにとる：

- $d=[F:\mathbb{Q}]$ が奇数のとき，$\{\tau_2,\dots,\tau_d\}$．
- $d=[F:\mathbb{Q}]$ が偶数のとき，$\{\tau_2,\dots,\tau_d,v\}$（$v$ は有限素点を一つとる）．

$i\geq 2$ に対し，$B_{\tau_i}=\mathbb{H}$（$\mathbb{R}$ 上の四元数環）である．整数 $k\geq 2$ および w が $k-w\in 2\mathbb{Z}$ を満たすとき，$\mathbb{H}^\times$ の有限次元表現 $\overline{D}_{k,w}$ を次で定める：$\overline{D}_{k,w}=|\mathrm{Nrd}|^{(-w-k+2)/2}\otimes\mathrm{Sym}^{k-2}\,\mathrm{Std}$（$|\mathrm{Nrd}|$ は被約ノルムと絶対値の合成．Std は $\mathbb{H}^\times\longrightarrow(\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})^\times\cong\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の合成）．

$G=\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}B^\times$ とおき，$G(\mathbb{A})$ の保型表現 Π に対して次の条件 $(\mathrm{CH})_B$（$\underline{k}$ および w を明示する場合は $(\mathrm{CH})_{B,\underline{k},w}$ と書く）を考える：

$(\mathrm{CH})_B$ Π は尖点的かつ $\Pi_{\tau_1}\cong D_{k_i,w}$, $\Pi_{\tau_i}\cong\overline{D}_{k_i,w}$ $(i\geq 2)$ を満たす．

本節では，主定理のうち $\mathfrak{p}$ が ℓ を割らない場合が次の定理 4.1 に帰着されることを説明する（定理 4.1 の証明は次節で述べる）：

定理 4.1

ℓ を素数とする．Π を $(\mathrm{CH})_B$ を満たす $G(\mathbb{A})$ の保型表現とするとき，G_F の 2 次元 ℓ 進表現 $R'_\ell(\Pi)$ で次を満たすものが（同型を除き）一意的に存在する：

F の有限素点 $\mathfrak{p}$ が ℓ を割らず，B が $\mathfrak{p}$ で分岐せず，かつ $\Pi_\mathfrak{p}$ が超尖点表現でないならば，$\mathrm{WD}(R'_\ell(\Pi)|_{W_{F_\mathfrak{p}}})^{F\text{-ss}}=\mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}}(|\det|^{-1/2}\otimes\Pi_\mathfrak{p}^\vee)$ となる．

さらに $R'_\ell(\Pi)$ について次が成り立つ：

- $\mathrm{WD}(\det R'_\ell(\Pi)|_{W_{F_\mathfrak{p}}})=\mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}}(\chi_{\Pi_\mathfrak{p}}^{-1}|\ |_\mathfrak{p}^{-1})$（$\chi_{\Pi_\mathfrak{p}}$ は $\Pi_\mathfrak{p}$ の中心指標）．
- F の有限素点 $\mathfrak{p}$ が ℓ を割らず，かつ B が $\mathfrak{p}$ で分岐しないとき，$R'_\ell(\Pi)|_{W_{F_\mathfrak{p}}}$ は $\Pi_\mathfrak{p}$ のみに依存する．すなわち，Π,Π' を $G(\mathbb{A})$ の保型表現で条件 $(\mathrm{CH})_B$ を満たすものとし，$\Pi_\mathfrak{p}=\Pi'_\mathfrak{p}$ とすると，$R'_\ell(\Pi)|_{W_{F_\mathfrak{p}}}=R'_\ell(\Pi')|_{W_{F_\mathfrak{p}}}$ である．

本節の残りの部分では，定理 4.1 が証明されたと仮定して議論を進める．

4.1 Jacquet-Langlands 対応と $R_\ell(\Pi)$ の構成

$R_\ell(\Pi)$ を構成するには，大域 Jacquet-Langlands 対応を用いる．これを復習しておこう．まず局所 Jacquet-Langlands 対応から始めよう．

定理 4.2（局所 Jacquet-Langlands 対応）
ここでは F を p 進体とし，D を F 上の四元数環とする．このとき，$\mathrm{GL}_2(F)$ の離散系列表現の同型類と $D^\times$ の既約認容表現の同型類の間に次で特徴付けられる一対一対応が存在する：π と π' が対応するとき，任意の楕円正則元 $g \in \mathrm{GL}_2(F)$ に対し $\Theta_\pi(g) = -\Theta_{\pi'}(g')$．ここで g' は g と同じ固有多項式を持つ $D^\times$ の元である（$g \longmapsto g'$ によって $\mathrm{GL}_2(F)$ の楕円共役類と $D^\times$ の（楕円）共役類は一対一に対応していたことを思い出せ）．Θ_π, $\Theta_{\pi'}$ は指標超関数（正則元の集合上では関数）である．
写像 $\pi' \longmapsto \pi$ を JL で表し，写像 $\pi \longmapsto \pi'$ を LJ で表す．

例 4.3
定理中の記号のもとで，$D^\times$ の指標 $\chi\circ\mathrm{Nrd}$ に対応する $\mathrm{GL}_2(F)$ の離散系列表現 $\mathrm{JL}(\chi\circ\mathrm{Nrd})$ は $(\chi \circ \det) \otimes \mathbf{St}$ である（$\mathbf{St}$ は Steinberg 表現）．

詳細は省略するが，$F = \mathbb{R}$ の場合にも局所 Jacquet-Langlands 対応は存在する．この場合，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の離散系列表現と $\mathbb{H}^\times$ の既約認容表現が対応する．既に定義した表現 $D_{k,w}$ と $\overline{D}_{k,w}$ の間には $\mathrm{JL}(\overline{D}_{k,w}) = D_{k,w}$ という関係がある．
次に大域 Jacquet-Langlands 対応を紹介する．

定理 4.4（大域 Jacquet-Langlands 対応）
ここでは F を代数体とし，B を F 上の四元数環とする．$G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} B^\times$ とおき，$G(\mathbb{A})$ の既約認容表現 Π に対し $\mathrm{JL}(\Pi) = \Pi^{\mathrm{ram}(B)} \otimes \bigotimes_{v\in\mathrm{ram}(B)} \mathrm{JL}_v(\Pi_v)$ と定める（JL_v は F_v 上の局所 Jacquet-Langlands 対応）．これは $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の既約認容表現である．同様に，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の既約認容表現 Π で $\mathrm{ram}(B) \subset \mathrm{DS}(\Pi)$ となるものに対し，$G(\mathbb{A})$ の既約認容表現 $\mathrm{LJ}(\Pi)$ が定義できる．
このとき，JL, LJ は保型性を保つ．したがって，$G(\mathbb{A})$ の保型表現と，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現で $\mathrm{ram}(B) \subset \mathrm{DS}(\Pi)$ となるものは一対一に対応する．

さて，以下 F を以前の通り総実代数体とする．条件 (CH), (DS) を満たす $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 Π に対し，$R_\ell(\Pi)$ を構成しよう．d が偶数のときは $v \in \mathrm{DS}(\Pi)$ を固定し，本節冒頭で述べたように B をとる．このとき，大域 Jacquet-Langlands 対応により，

- 条件 (CH) を満たす $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 Π で，$v \in \mathrm{DS}(\Pi)$ となるもの
- 条件 $(\mathrm{CH})_B$ を満たす $G(\mathbb{A})$ の保型表現

の間には一対一対応がある．これで Π に対応する $G(\mathbb{A})$ の保型表現を $\mathrm{LJ}_B(\Pi)$ と書き，$R_\ell(\Pi) = R'_\ell(\mathrm{LJ}_B(\Pi))$ とおく．定理 4.1 から導かれる $R_\ell(\Pi)$ の性質を列挙しよう．$\mathfrak{p}$ を F の有限素点で ℓ を割らないものとする．

i) $\Pi_\mathfrak{p}$ が主系列表現ならば，$\mathrm{WD}(R_\ell(\Pi)|_{W_{F_\mathfrak{p}}})^{F\text{-ss}} = \mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}}(|\det|^{-1/2} \otimes \Pi_\mathfrak{p}^\vee)$ となる．特に，$d = [F:\mathbb{Q}]$ が偶数のときは，$R_\ell(\Pi)$ は B の取り方，すなわち Π_v が離散系列表現となるような有限素点 v の取り方によらない（注意 3.2）．

ii) $\Pi_\mathfrak{p}$ がスペシャル表現であるとし，さらに d が偶数のときは $\#\,\mathrm{DS}(\Pi) \geq 2$ と仮定する（$\mathfrak{p} \in \mathrm{DS}(\Pi)$ に注意）．このとき，$\mathrm{WD}(R_\ell(\Pi)|_{W_{F_\mathfrak{p}}})^{F\text{-ss}} = \mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}}(|\det|^{-1/2} \otimes \Pi_\mathfrak{p}^\vee)$ が成り立つ．

iii) Π' を条件 (CH) を満たす $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現とし，$\Pi_\mathfrak{p} = \Pi'_\mathfrak{p}$ が成立するとする．さらに d が偶数のときは $(\mathrm{DS}(\Pi) \cap \mathrm{DS}(\Pi')) \setminus \{\mathfrak{p}\} \neq \varnothing$ と仮定する．このとき，$R_\ell(\Pi)|_{W_{F_\mathfrak{p}}} = R_\ell(\Pi')|_{W_{F_\mathfrak{p}}}$ である．

iv) $\mathrm{WD}(\det R_\ell(\Pi)|_{W_{F_\mathfrak{p}}}) = \mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}}(\chi_{\Pi_\mathfrak{p}}^{-1} |\ |_\mathfrak{p}^{-1})$（$\chi_{\Pi_\mathfrak{p}}$ は $\Pi_\mathfrak{p}$ の中心指標）．

これら i)〜iv) より次を導きたい：

定理 4.5
ℓ を割らない F の任意の有限素点 $\mathfrak{p}$ に対し，$\mathrm{WD}(R_\ell(\Pi)|_{W_{F_\mathfrak{p}}})^{F\text{-ss}} = \mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}}(|\det|^{-1/2} \otimes \Pi_\mathfrak{p}^\vee)$ となる．

この定理は次の順序で証明される：

(a) $\mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}} \Pi_\mathfrak{p}$ が単項的かつ，d が偶数ならば $\mathrm{DS}(\Pi) \setminus \{\mathfrak{p}\} \neq \varnothing$ である場合に成り立つ．

(b) d が奇数のとき，および d が偶数かつ $\mathrm{DS}(\Pi) \setminus \{\mathfrak{p}\} \neq \varnothing$ である場合に成り立つ．

(c) d が偶数かつ $\mathrm{DS}(\Pi) = \{\mathfrak{p}\}$ である場合に成り立つ．

4.2 (a) の証明について

(a) の証明では，性質 i), iii) に加え，**保型誘導**という保型表現の技術を用いる．d が偶数のときは $v \in \mathrm{DS}(\Pi) \setminus \{\mathfrak{p}\}$ を固定しておく．$\mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}} \Pi_\mathfrak{p}$ が単項的であるという条件から，F の 2 次拡大 E および $\mathbb{A}_E^\times / E^\times$ の代数的 Hecke 指標 χ を次を満たすようにとることができる：

(∗) $\mathfrak{p}$ は E において分解しない．$\mathfrak{p}$ を割る E の唯一の素点を $\mathfrak{q}$ とおくと $\mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}} \Pi_\mathfrak{p} = \mathrm{Ind}_{W_{E_\mathfrak{q}}}^{W_{F_\mathfrak{p}}} \mathrm{rec}_{E_\mathfrak{q}} \chi_\mathfrak{q}$ となる．

このとき，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 $AI_{E/F}(\chi)$ で，F の任意の素点 w に対し

$$\mathrm{rec}_{F_w}\big(AI_{E/F}(\chi)_w\big) = \bigoplus_{w'|w} \mathrm{Ind}_{W_{E_{w'}}}^{W_{F_w}} \mathrm{rec}_{E_{w'}} \chi_{w'}$$

を満たすものが構成できる（[JL] 参照．Weil 表現と逆定理を用いる）．これを χ の E/F に関する保型誘導と呼ぶ．条件 $(*)$ に加え，

- （無限素点における条件）E は F の総虚拡大であり，F の無限素点 τ_i を割る E の唯一の素点を w_i とおくと，$\chi_{w_i}(z) = |z|^{-w-k_i+1} z^{k_i-1}$ となる
- （d が偶数のときの v における条件）v は E において分解せず，v を割る E の唯一の素点を w とおくと，χ_w はノルム $N_{E_w/F_v} \colon E_w^\times \longrightarrow F_v^\times$ を経由しない

という条件を要請することで，$AI_{E/F}(\chi)$ が条件 (CH) を満たし，d が偶数ならば $v \in \mathrm{DS}(AI_{E/F}(\chi))$ となるようにすることができる．

$\xi = |\ |_E^{-1/2}\chi^{-1}$ ($|\ |_E$ は E のイデールノルム) とおくと, 性質 i) と R_ℓ の既約性, Chebotarev 密度定理を用いることで，$R_\ell(AI_{E/F}(\chi)) = \mathrm{Ind}_{G_E}^{G_F} R_\ell(\xi)$ となることが分かる．一方条件 $(*)$ より $\Pi_\mathfrak{p} = AI_{E/F}(\chi)_\mathfrak{p}$ なので，性質 iii) より $R_\ell(\Pi)|_{W_{F_\mathfrak{p}}} = R_\ell(AI_{E/F}(\chi))|_{W_{F_\mathfrak{p}}} = (\mathrm{Ind}_{G_E}^{G_F} R_\ell(\xi))|_{W_{F_\mathfrak{p}}} = \mathrm{Ind}_{W_{E_\mathfrak{q}}}^{W_{F_\mathfrak{p}}} R_\ell(\xi)_\mathfrak{q}$ が得られる．これの両辺の WD をとり, 右辺をちょっと変形すればよい.

4.3 (b) の証明について

(b) を証明するには，性質 i), iv) に加え**底変換**と呼ばれる保型表現の技術を用いることで (a) に帰着させる．$\mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}} \Pi_\mathfrak{p}$ が単項的でない既約表現の場合を考察することになるが，$F_\mathfrak{p}$ のある 3 次拡大に $\mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}} \Pi_\mathfrak{p}$ を制限すると可約あるいは単項的になること（補題 1.29, 注意 1.30）がポイントである．このことから，F の総実 3 次拡大 E で次を満たすものがとれる：

> $\mathfrak{p}$ を割り切る E の素点は唯一である．それを $\mathfrak{q}$ とすると，$(\mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}} \Pi_\mathfrak{p})|_{W_{E_\mathfrak{q}}}$ は可約または単項的である．

さらに d が偶数の場合は $v \in \mathrm{DS}(\Pi) \setminus \{\mathfrak{p}\}$ を固定し，v が E で完全分解するという仮定も加えておく．このとき，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_E)$ の保型表現 $BC_{E/F}(\Pi)$ で次を満たすものが構成できる ([La], [JPSS])：F の任意の素点 w およびそれを割る E の素点 w' に対し，

$$\mathrm{rec}_{E_{w'}}\big(BC_{E/F}(\Pi)_{w'}\big) = (\mathrm{rec}_{F_w} \Pi_w)|_{W_{E_{w'}}}.$$

これを Π の E/F に関する底変換という．$BC_{E/F}(\Pi)$ は条件 (CH) を満たす．仮定より $\mathrm{rec}_{E_\mathfrak{q}}(BC_{E/F}(\Pi)_\mathfrak{q})$ は可約または単項的である．また d が偶数のときは，v を割る E の素

点 v' をとると $BC_{E/F}(\Pi)_{v'} = \Pi_v$ なので $v' \in \mathrm{DS}(BC_{E/F}(\Pi)) \setminus \{\mathfrak{q}\}$ である．したがって，$BC_{E/F}(\Pi)$ および $\mathfrak{q}$ は (a) の仮定を満たすので，

$$\begin{aligned}\mathrm{WD}\bigl(R_\ell(BC_{E/F}(\Pi))|_{W_{E_\mathfrak{q}}}\bigr)^{F\text{-ss}} &= \mathrm{rec}_{E_\mathfrak{q}}\bigl(|\det|^{-1/2} \otimes BC_{E/F}(\Pi)^\vee_\mathfrak{q}\bigr)\\ &= \mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}}\bigl(|\det|^{-1/2} \otimes \Pi^\vee_\mathfrak{p}\bigr)\big|_{W_{E_\mathfrak{q}}}\end{aligned}$$

が得られる．一方，性質 i) と R_ℓ の既約性，Chebotarev 密度定理より，$R_\ell(BC_{E/F}(\Pi)) = R_\ell(\Pi)|_{G_E}$ が証明できる．したがって上の等式の左辺は $\mathrm{WD}(R_\ell(\Pi)|_{W_{E_\mathfrak{q}}})^{F\text{-ss}}$ となる．これらのことと性質 iv) より，次が分かる：

> $\mathrm{WD}(R_\ell(\Pi)|_{W_{F_\mathfrak{p}}})^{F\text{-ss}}$ と $\mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}}(|\det|^{-1/2} \otimes \Pi^\vee_\mathfrak{p})$ は，$W_{E_\mathfrak{q}}$ に制限すると同型であり，かつ同じ行列式を持つ．

あとは補題 1.29 を用いれば，この条件から $\mathrm{WD}(R_\ell(\Pi)|_{W_{F_\mathfrak{p}}})^{F\text{-ss}} \cong \mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}}(|\det|^{-1/2} \otimes \Pi^\vee_\mathfrak{p})$ を導くことができる．

4.4　(c) の証明について

(c) は性質 i) と底変換を用いることで (b) に帰着する．F の総実 2 次拡大 E で $\mathfrak{p}$ において分解するものをとり，(b) と同様に底変換 $BC_{E/F}(\Pi)$（この場合は土井・長沼による．[La] でも証明されている）を考えると，これは条件 (CH) を満たす．また，$\mathfrak{p}$ を割る E の素点を w_1，w_2 とすると，$BC_{E/F}(\Pi)_{w_1} = BC_{E/F}(\Pi)_{w_2} = \Pi_\mathfrak{p}$ であるから $w_2 \in \mathrm{DS}(BC_{E/F}(\Pi)) \setminus \{w_1\}$ である．したがって $BC_{E/F}(\Pi)$ および w_1 は (b) の仮定を満たすので，

$$\begin{aligned}\mathrm{WD}\bigl(R_\ell(BC_{E/F}(\Pi))|_{W_{E_{w_1}}}\bigr)^{F\text{-ss}} &= \mathrm{rec}_{E_{w_1}}\bigl(|\det|^{-1/2} \otimes BC_{E/F}(\Pi)^\vee_{w_1}\bigr)\\ &= \mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}}\bigl(|\det|^{-1/2} \otimes \Pi^\vee_\mathfrak{p}\bigr)\end{aligned}$$

が得られる．一方，性質 i) と R_ℓ の既約性，Chebotarev 密度定理より $R_\ell(BC_{E/F}(\Pi)) = R_\ell(\Pi)|_{G_E}$ が証明できるので，左辺は $\mathrm{WD}(R_\ell(\Pi)|_{W_{F_\mathfrak{p}}})^{F\text{-ss}}$ となる．これよりよい．

以上で，定理 4.1 より定理 4.5 が導かれた．

5　主定理の証明 (2)—定理 4.1 の証明

本節では定理 4.1 の証明の概要について述べる．B を前節冒頭で定めた F 上の四元数環とし，$G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} B^\times$ とする．

5.1　Galois 表現 $R'_\ell(\Pi)$ の構成

$R'_\ell(\Pi)$ を構成するためには，志村曲線のエタールコホモロジーを用いる．簡単に志村曲線について復習しておこう．$\mathbb{R}$ 上の代数群の準同型 $h\colon \mathbb{S} := \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\, \mathbb{G}_m \longrightarrow G \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R}$ を，

$\mathbb{R}$ 値点に

$$\mathbb{C}^\times \longrightarrow G(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^\times \times \cdots \times \mathbb{H}^\times; \quad a+b\sqrt{-1} \longmapsto \left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, 1, \ldots, 1\right)$$

（この写像も h と書く）を誘導するように定める．$h\colon \mathbb{C}^\times \longrightarrow G(\mathbb{R})$ の $G(\mathbb{R})$ 共役類は $\mathfrak{H}^\pm := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ と $(g,1,\ldots,1)h(g,1,\ldots,1)^{-1} \longleftrightarrow g\sqrt{-1}$ $(g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ によって同一視できる．この対応によって定まる $\mathfrak{H}^\pm$ への $G(\mathbb{R})$ の作用は $G(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^\times \times \cdots \times \mathbb{H}^\times \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathfrak{H}^\pm$ である（最後の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathfrak{H}^\pm$ は通常の一次分数変換による作用）．

この (G,h) は Deligne の公理 ([De]) を満たすことが容易に分かるので，(G,h) から志村多様体を構成することができる：

定義 5.1

$G(\mathbb{A}^\infty)$ のコンパクト開部分群 K に対し, $\mathbb{C}$ 上の代数多様体 $\mathrm{Sh}_K(G,h)$ が定まる．これを B より定まる**志村曲線**という．その $\mathbb{C}$ 値点は $\mathrm{Sh}_K(G,h)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathfrak{H}^\pm \times (G(\mathbb{A}^\infty)/K)$ で与えられる．

$G(\mathbb{A}^\infty)$ のコンパクト開部分群 K, K' が $K \subset K'$ を満たすとき，自然な射 $\mathrm{Sh}_{K'}(G,h) \longrightarrow \mathrm{Sh}_K(G,h)$ がある．また，$g \in G(\mathbb{A}^\infty)$ に対し，射 $\mathrm{Sh}_K(G,h) \longrightarrow \mathrm{Sh}_{g^{-1}Kg}(G,h)$ が $[x,g'] \longmapsto [x,g'g]$ で定まる．これによって，射影的対象 (pro-object) $\{\mathrm{Sh}_K(G,h)\}_K$ への $G(\mathbb{A}^\infty)$ の右作用が定められる (**Hecke 作用**).

注意 5.2

$\mathfrak{H}^+ = \{z \in \mathfrak{H}^\pm \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$, $G(\mathbb{R})_+ = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ \times (\mathbb{H}^\times)^{d-1} \subset G(\mathbb{R})$, $G(\mathbb{Q})_+ = G(\mathbb{Q}) \cap G(\mathbb{R})_+$ とおく．$G(\mathbb{A}^\infty)$ のコンパクト開部分群 K に対し $\mathcal{C}_K = G(\mathbb{Q})_+\backslash G(\mathbb{A}^\infty)/K$ とおき，$[g] \in \mathcal{C}_K$ に対し，自然な準同型 $G(\mathbb{R})_+ \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})^+$ による $gKg^{-1} \cap G(\mathbb{Q})_+$ の像を $\Gamma_{[g]}$ と書く ($\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})^+$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ による $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ の像).

このとき，自然な同型 $\coprod_{[g]\in\mathcal{C}_K} \Gamma_{[g]}\backslash\mathfrak{H}^+ \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sh}_K(G,h)(\mathbb{C})$ がある（$[x] \in \Gamma_{[g]}\backslash\mathfrak{H}^+$ を $[x,g]$ にうつす）．$\Gamma_{[g]} \subset \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})^+$ は離散的かつ余コンパクトなので，$\mathrm{Sh}_K(G,h)(\mathbb{C})$ はコンパクト Riemann 面の構造を持つ．したがって $\mathrm{Sh}_K(G,h)$ は $\mathbb{C}$ 上固有かつ滑らかな 1 次元代数多様体（代数曲線）である．

$\mathrm{Sh}_K(G,h)$ の連結成分については次が成り立つ：

命題 5.3

$T = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_m$ とおき，$T(\mathbb{A}^\infty)$ のコンパクト開部分群 U に対し $\mathbb{C}$ 上の代数多様体 N_U を $N_U(\mathbb{C}) = T(\mathbb{Q})\backslash\pi_0(T(\mathbb{R})) \times (T(\mathbb{A}^\infty)/U)$ となるように定める（右辺は有限集合なので，それに自然な代数多様体の構造を定めればよい）．このとき，$\mathrm{Nrd}\colon G \longrightarrow T$ により射 $\nu\colon \mathrm{Sh}_K(G,h) \longrightarrow N_{\mathrm{Nrd}(K)}$ が誘導され，そのファイバーは連結である．

略証　射が誘導されることを見るには, $T(\mathbb{Q})^{(+)} \subset T(\mathbb{Q}) = F^\times$ を $\tau_2, \ldots, \tau_d$ に関して正である元の集合とするとき, $T(\mathbb{Q})\backslash\pi_0(T(\mathbb{R})) \times (T(\mathbb{A}^\infty)/U) = T(\mathbb{Q})^{(+)}\backslash\{\pm 1\} \times (T(\mathbb{A}^\infty)/U)$ であること, $\mathrm{Nrd}(G(\mathbb{Q})) \subset T(\mathbb{Q})^{(+)}$ となることに注意すればよい. ファイバーの連結性は [Mi2, Theorem 5.17] 等を参照. ■

次に $\{\mathrm{Sh}_K(G,h)\}_K$ 上の G 同変な局所定数層を定めたい. これを与えるためには, G の中心 $Z(G)$ の部分トーラスで $\mathbb{R}$ 上分解し, $\mathbb{Q}$ 上分解する部分トーラスを持たないもののなかで極大なものを $Z_s(G)$ とし, 代数群 $G^c = G/Z_s(G)$ の表現を与えればよい ([Mi1, Proposition II.3.3, Remark III.2.3]). この場合 $Z_s(G) = \mathrm{Ker}(N_{F/\mathbb{Q}}\colon F^\times \longrightarrow \mathbb{Q}^\times)$ であるから, G の表現で $\mathrm{Ker}(N_{F/\mathbb{Q}}\colon F^\times \longrightarrow \mathbb{Q}^\times)$ 上消えているものを与えればよい.

定義 5.4

$1 \le i \le d$ に対し, $\xi_i\colon G \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{C} \cong \prod_{\tau_i} \mathrm{GL}_{2,\mathbb{C}} \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} \mathrm{GL}_{2,\mathbb{C}}$ とおき,

$$\xi_\mathbb{C} = \bigotimes_i \left(\mathrm{Sym}^{k_i-2}\,\xi_i \otimes (\det \xi_i)^{(w-k_i+2)/2}\right)$$

と定める. $\xi_\mathbb{C}$ を $Z(G) = F^\times$ に制限すると $(N_{F/\mathbb{Q}})^w$ となるので, これは G^c の表現となる. $\xi_\mathbb{C}$ の表現空間を W と書き, 表現 $(\xi_\mathbb{C}, W_\mathbb{C})$ に伴う $\mathrm{Sh}_K(G,h)$ 上の $\mathbb{C}$ 局所系 $G(\mathbb{Q})\backslash\mathfrak{H}^\pm \times (G(\mathbb{A}^\infty)/K) \times W_\mathbb{C}$ を $\mathcal{F}_{K,\mathbb{C}}$ と書く (K はある程度縮める必要がある). $\{\mathcal{F}_{K,\mathbb{C}}\}_K$ は $G(\mathbb{A}^\infty)$ の $\{\mathrm{Sh}_K(G,h)\}_K$ への Hecke 作用について同変となっている.

また ℓ を素数とするとき, ι を用いることで G^c の $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の表現 (ξ_ℓ, W_ℓ) および $\mathrm{Sh}_K(G,h)$ 上のスムーズ ℓ 進層 $\mathcal{F}_{K,\ell}$ を定めることができる. $\mathcal{F}_{K,\ell}$ は ι に依存することに注意せよ.

ここまでは $\mathbb{C}$ 上の話であったが, Galois 表現を構成するためには $\mathrm{Sh}_K(G,h)$ の代数体上のモデルを用いなくてはならない. (G,h) のリフレックス体は $F \overset{\tau}{\hookrightarrow} \mathbb{C}$ であることが容易に分かる ([Mi2, Example 12.4 (d)]) ので, 志村多様体の一般論により, $\mathrm{Sh}_K(G,h)$ は F 上の正準モデルを持つ.

定義 5.5

$\mathrm{Sh}_K(G,h)$ の正準モデルを M_K とおく. これは F 上固有かつ滑らかな代数曲線である. $\mathcal{F}_{K,\mathbb{C}}$, $\mathcal{F}_{K,\ell}$ も M_K 上定義される ([Mi1, Remark III.6.1]). これらをまた同じ記号で表す.

注意 5.6

例えばモジュラー曲線の場合には, 正準モデルは楕円曲線のモジュライ空間として自然に得られる. 志村曲線は PEL 型の志村多様体ではないので, その正準モデルをモジュライ空間として構成することはできない. しかし, F の虚二次拡大に M_K を底変換して得られるスキームの連結成分はモジュライ空間として記述することができる ([Ca2, §2, 3, 4])．M_K についての性質の多くは底変換によってモジュライ解釈を持つ場合に帰着させることで証明される．

T および $U \subset T(\mathbb{A}^\infty)$ を命題 5.3 の通りとすると，$N_U(\mathbb{C})$ には次のようにして G_F^{ab} の作用が定まる（$T(\mathbb{Q})^+ \subset T(\mathbb{Q}) = F^\times$ は総正な元の集合，$T(\mathbb{Q})^{+\wedge}$ は $T(\mathbb{Q})^+$ の $T(\mathbb{A}^\infty)$ 内での閉包）：

$$\begin{aligned} G_F^{\mathrm{ab}} &\cong \pi_0\bigl(T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A})\bigr) = T(\mathbb{Q})^{+\wedge}\backslash T(\mathbb{A}^\infty) \\ &\xrightarrow{\mathrm{inv}} T(\mathbb{Q})^{+\wedge}\backslash T(\mathbb{A}^\infty) \curvearrowright T(\mathbb{Q})^{+\wedge}\backslash T(\mathbb{A}^\infty)/U = N_U(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

最初の同型は大域類体論の同型である．これにより，N_U の F 上の自然なモデルが定まる（F のアーベル拡大体のスペクトラムとなる）．このモデルも同じ記号で書くと，命題 5.3 で定めた射 $\nu\colon \mathrm{Sh}_K(G,h) \longrightarrow N_{\mathrm{Nrd}(K)}$ は F 上の射 $\nu\colon M_K \longrightarrow N_{\mathrm{Nrd}(K)}$ から来ていることが分かる．

M_K の $\mathcal{F}_{K,\ell}$ 係数コホモロジーを用いると，$R'_\ell(\Pi)$ を定義することができる．

定義 5.7
$G(\mathbb{A}^\infty) \times G_F$ の表現 $\mathcal{H}_\ell$ を $\mathcal{H}_\ell = \varinjlim_K H^1(M_K \otimes_F \overline{F}, \mathcal{F}_{K,\ell})$ で定める．条件 $(\mathrm{CH})_B$ を満たす $G(\mathbb{A})$ の保型表現 Π に対し，G_F の表現 $R'_\ell(\Pi)$ を $R'_\ell(\Pi) = \mathrm{Hom}_{G(\mathbb{A}^\infty)}(\iota(\Pi^\infty), \mathcal{H}_\ell)$ で定める．

これから $R'_\ell(\Pi)$ が定理 4.1 の条件を満たすことを確かめていくのであるが，まず容易に分かる性質を挙げておく．

命題 5.8 （[Ca1, 2.2.4]）
$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} R'_\ell(\Pi) = 2$ であり，$\mathcal{H}_\ell = \bigoplus_{\Pi\,:\,(\mathrm{CH})_{B,\underline{k},w}} \iota(\Pi^\infty) \otimes R'_\ell(\Pi)$ が成り立つ．

略証　エタールコホモロジーの代わりに $\mathcal{F}_{K,\mathbb{C}}$ 係数の特異コホモロジーを de Rham 分解を用いて計算すると，次が得られる（$G(\mathbb{R})$ の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とおき，$K_\infty \subset G(\mathbb{R})$ を $\sqrt{-1} \in \mathfrak{H}^\pm$ の安定化群とした）：

$$\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \varinjlim_K H^1\bigl(M_K(\mathbb{C}), \mathcal{F}_{K,\mathbb{C}}\bigr) = \bigoplus_{\Pi\,:\,\text{保型的}} H^1(\mathfrak{g}, K_\infty, \Pi_\infty \otimes \xi_{\mathbb{C}}) \otimes \Pi^\infty.$$

$H^1(\mathfrak{g}, K_\infty, \Pi_\infty \otimes \xi_{\mathbb{C}})$ を計算すると，Π が $(\mathrm{CH})_{B,\underline{k},w}$ を満たすときのみ 2 次元であり，他は 0 となることが分かる ([BW] 等参照)． ∎

命題 5.9 （[Ca1, 3.5]）
m を整数とし，χ を $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ の代数的 Hecke 指標で $n_{\tau_1} = \cdots = n_{\tau_d} = -m$ となるもの

とする（定義 2.1 の記号を用いている）．Π を条件 $(\mathrm{CH})_{B,\underline{k},w}$ を満たす $G(\mathbb{A})$ の保型表現とすると，$\chi\otimes\Pi$ は条件 $(\mathrm{CH})_{B,\underline{k},w+2m}$ を満たすが，これに対し $R'_\ell(\chi\otimes\Pi)=R_\ell(\chi)^{-1}\otimes R'_\ell(\Pi)$ となる．

略証　$\mathcal{F}$ と同様，T の指標 $N_{F/\mathbb{Q}}$ から N_U 上の ℓ 進層 $\mathcal{L}_{U,\ell}$ を構成することができる．このとき，$T(\mathbb{A}^\infty)\times G_F$ の作用と可換な次の同型がある（χ は命題中の条件を満たす指標全体を動く）：

$$\varinjlim_U H^0(N_U\otimes_F\overline{F},\mathcal{L}_{U,\ell}^{\otimes m})=\bigoplus_\chi \iota(\chi^\infty)\otimes R_\ell(\chi)^{-1}.$$

$\mathcal{F}_{\underline{k},w,K,\ell}\otimes\nu^*\mathcal{L}^{\otimes m}_{\mathrm{Nrd}(K)}\cong\mathcal{F}_{\underline{k},w+2m,K,\ell}$（区別のため $\mathcal{F}$ にも $\underline{k}$, w を明示している）であるから，カップ積 $\mathcal{H}_{\underline{k},w,\ell}\otimes\varinjlim_U H^0(N_U\otimes_F\overline{F},\mathcal{L}_{U,\ell}^{\otimes m})\longrightarrow\mathcal{H}_{\underline{k},w+2m,\ell}$ がある．$\varinjlim_U H^0(N_U\otimes_F\overline{F},\mathcal{L}_{U,\ell}^{\otimes m})$ の直和成分 $\iota(\chi^\infty)\otimes R_\ell(\chi)^{-1}$ の非零元は次数環 $\bigoplus_m\varinjlim_U H^0(N_U\otimes_F\overline{F},\mathcal{L}_{U,\ell}^{\otimes m})$ の可逆元であるから，カップ積は $G(\mathbb{A}^\infty)\times G_F$ の表現の間の同型 $\mathcal{H}_{\underline{k},w,\ell}\otimes(\iota(\chi^\infty)\otimes R_\ell(\chi)^{-1})\cong\mathcal{H}_{\underline{k},w+2m,\ell}$ を誘導することが分かる．この両辺の $\iota(\chi^\infty\otimes\Pi^\infty)$-isotypic 部分をとることで主張が従う．■

命題 5.10　（[Ca1, 3.6]）
　Π を $G(\mathbb{A})$ の保型表現で条件 $(\mathrm{CH})_B$ を満たすものとし，$\mathfrak{p}$ を ℓ を割らない F の有限素点とする．$\Pi_\mathfrak{p}$ の中心指標を $\chi_{\Pi_\mathfrak{p}}$ とおくと，次が成り立つ：

$$\mathrm{WD}\big(\det R'_\ell(\Pi)|_{W_{F_\mathfrak{p}}}\big)^2=\mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}}\big(\chi_{\Pi_\mathfrak{p}}^{-2}|\ |_\mathfrak{p}^{-2}\big).$$

証明　$\xi_i^\vee\cong\xi_i\otimes\det$ より $\mathcal{F}^\vee_{\underline{k},w,K,\ell}=\mathcal{F}_{\underline{k},-w,K,\ell}$ であることが容易に分かるので，Poincaré 双対定理により $\mathcal{H}^\vee_{\underline{k},w,\ell}\cong\mathcal{H}_{\underline{k},-w,\ell}(1)$ であることが分かる．χ_{Π^∞} を Π^∞ の中心指標とすると，$(\Pi^\infty)^\vee\cong\chi_{\Pi^\infty}^{-1}\otimes\Pi^\infty$ であるから，$\iota((\Pi^\infty)^\vee)\cong\iota(\chi_{\Pi^\infty}^{-1}\otimes\Pi^\infty)$ による両辺の isotypic 部分をとることで $R'_\ell(\Pi)^\vee=R'_\ell(\chi_{\Pi^\infty}^{-1}\otimes\Pi)(1)$ が得られる．命題 5.9 より右辺は $R'_\ell(\Pi)(1)\otimes R_\ell(\chi_{\Pi^\infty})$ に等しいので，両辺の det をとることで $\det R'_\ell(\Pi)^2=R_\ell(\chi_{\Pi^\infty})^{-2}(-2)$ が得られる．$W_{F_\mathfrak{p}}$ に制限して WD をとると主張が従う．■

5.2　志村曲線の整モデル

　はじめに，今後用いる記号を導入しておく．$\mathfrak{p}$ を ℓ を割らない F の有限素点とし，B が $\mathfrak{p}$ で分岐しないとする．$F_\mathfrak{p}$ の整数環を $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ と書き，その剰余体を κ と書く．
　整数 $n\geq 0$ に対し，$F_\mathfrak{p}^\times$ のコンパクト開部分群 $U_\mathfrak{p}^n$ を $U_\mathfrak{p}^n=\mathrm{Ker}(\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times\longrightarrow(\mathcal{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n)^\times)$ $(n\geq 1)$, $U_\mathfrak{p}^0=\mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times$ として定める．局所類体論で $U_\mathfrak{p}^n\subset F_\mathfrak{p}^\times$ に対応する $F_\mathfrak{p}$ の完全分岐アーベル拡大（Lubin-Tate 拡大）を $F_\mathfrak{p}^n$ と書き，その整数環を $\mathcal{O}_\mathfrak{p}^n$ と書く．
　$\mathrm{GL}_2(F_\mathfrak{p})$ のコンパクト開部分群 $K_\mathfrak{p}^n$ を $K_\mathfrak{p}^n=\mathrm{Ker}(\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p})\longrightarrow\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n))$ $(n\geq 1)$,

$K_{\mathfrak{p}}^0 = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ で定める．以下では，$G(\mathbb{A}^\infty) = B^\times(\mathbb{A}_F^\infty)$ のコンパクト開部分群としては，$K_{\mathfrak{p}}^n K^{\mathfrak{p}}$（$K^{\mathfrak{p}}$ は $B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})$ のコンパクト開部分群）という形のもののみを考え，$M_{K_{\mathfrak{p}}^n K^{\mathfrak{p}}}$ のことを $M_{n,K^{\mathfrak{p}}}$ と書く．

定義 5.7 で構成した Galois 表現 $R'_\ell(\Pi)$ の $W_{F_{\mathfrak{p}}}$ への制限について調べるには，志村曲線の $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ 上のモデルの存在，およびその幾何学的性質を用いる．志村曲線の整モデルの理論は，[Ca2] において詳しく調べられている．ここでは，その結果の一部について，事実のみを列挙することにする．

i) $K^{\mathfrak{p}}$ が十分小さいとき，$M_{0,K^{\mathfrak{p}}}$ は $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ 上良い還元を持つ．すなわち，$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ 上固有かつ滑らかなスキーム $\mathbf{M}_{0,K^{\mathfrak{p}}}$ が（一意的に）存在して，$\mathbf{M}_{0,K^{\mathfrak{p}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} F_{\mathfrak{p}} \cong M_{0,K^{\mathfrak{p}}} \otimes_F F_{\mathfrak{p}}$ となる．

ii) $n \geq 1$ のときも，十分小さい $K^{\mathfrak{p}}$ に対して $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ 上固有な正則スキーム $\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}}$ で $\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} F_{\mathfrak{p}} \cong M_{n,K^{\mathfrak{p}}} \otimes_F F_{\mathfrak{p}}$ を満たすものを構成することができる．しかし，$\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}}$ は $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ 上スムーズではない（特殊ファイバー $\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa}$ は被約ですらない）．

iii) 射影系 $\{\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}}\}$ は $\{M_{n,K^{\mathfrak{p}}}\}$ と同様の群作用を持つ．また，十分小さい n, $K^{\mathfrak{p}}$ に対し，スムーズ ℓ 進層 $\mathcal{F}_{n,K^{\mathfrak{p}},\ell} := \mathcal{F}_{K_{\mathfrak{p}}^n K^{\mathfrak{p}},\ell}$ は $\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}}$ 上に延長される．

iv) $\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n$ の正規化を $\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n$ と書くと，これは正則スキームである．実際は $\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}}$ から $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n$ に $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ 上の射がある（前小節で導入した ν を整モデルにのばすことで得られる）ので，$\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n$ は $\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}}$ いくつかの直和である．

v) $\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n$ の幾何学的特殊ファイバー $(\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n} \overline{\kappa}$ を $\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa}$ と書くと，これは被約であり，各既約成分は $\overline{\kappa}$ 上滑らかである．各既約成分は $\mathbb{P}^1$ と同型ではない．

vi) 自由 $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n$ 加群 $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2$ の階数 1 の直和成分 A_n に対し，$\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa}$ の閉部分スキーム $(\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa})_{A_n}$ が自然に定まる．これは $\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa}$ の既約成分いくつかの（交わりのない）合併であって，$\bigcup_{A_n} (\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa})_{A_n} = \mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa}$ となる．さらに，$g \in K_{\mathfrak{p}}^0$ の $\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa}$ への作用によって $(\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa})_{A_n}$ は $(\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa})_{g^{-1}A_n}$ にうつされる．

vii) $\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa}$ の各連結成分 $(\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa})^\circ$ に対し，$(\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa})^\circ_{A_n} = (\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa})^\circ \cap (\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa})_{A_n}$ とおくと，$\{(\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa})^\circ_{A_n}\}_{A_n}$ は $(\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa})^\circ$ の既約成分の集合と一致する．さらに，$(\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa})^\circ$ の特異点の集合を $S_{n,K^{\mathfrak{p}}}$ と書くと，$S_{n,K^{\mathfrak{p}}} = \bigcap_{A_n} (\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa})^\circ_{A_n}$ である．

viii) F 上の四元数環 $\overline{B}$ を $\mathrm{ram}(\overline{B})=\mathrm{ram}(B)\cup\{\tau_1,\mathfrak{p}\}$ となるようにとり，$B\otimes_F\mathbb{A}^{\infty,\mathfrak{p}}$ と $\overline{B}\otimes_F\mathbb{A}^{\infty,\mathfrak{p}}$ を同一視する．このとき，$G(\mathbb{A}^\infty)$ の作用と可換な射影系の同型

$$\left\{\overline{B}^\times(F)\backslash F_\mathfrak{p}^\times\times B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})/(U_\mathfrak{p}^n\times K^\mathfrak{p})\right\}\cong\{S_{n,K^\mathfrak{p}}\}$$

が存在する（左辺への $G(\mathbb{A}^\infty)$ の作用は

$$G(\mathbb{A}^\infty)=\mathrm{GL}_2(F_\mathfrak{p})\times B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})\xrightarrow{\det\times\mathrm{id}}F_\mathfrak{p}^\times\times B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})\curvearrowright F_\mathfrak{p}^\times\times B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})$$

として定める）．

5.3 志村曲線の整モデルの利用

前小節の結果を用いると，$R'_\ell(\Pi)$ を 3 つの部分商に分けることができる．まず，$\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\overline{\otimes}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\mathcal{O}_\mathfrak{p}^n$ についての消滅サイクル完全系列を考えよう（$\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\overline{\otimes}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{F}_\mathfrak{p}=(\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\overline{\otimes}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\mathcal{O}_\mathfrak{p}^n)\otimes_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}^n}\overline{F}_\mathfrak{p}$ とおいた．また，簡単のため係数層 $\mathcal{F}_{n,K^\mathfrak{p},\ell}$ は単に $\mathcal{F}$ と書いている）：

$$0\longrightarrow H^1(\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\overline{\otimes}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa},\mathcal{F})\longrightarrow H^1(M_{n,K^\mathfrak{p}}\otimes_F\overline{F}_\mathfrak{p},\mathcal{F})\longrightarrow\bigoplus_{x\in S_{n,K^\mathfrak{p}}}(R^1\Phi_{n,K^\mathfrak{p}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x\otimes\mathcal{F}_x$$
$$\longrightarrow H^2(\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\overline{\otimes}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa},\mathcal{F})\longrightarrow\cdots.$$

これは $W_{F_\mathfrak{p}}$ 加群の完全系列であることに注意しよう．さらに n, $K^\mathfrak{p}$ について帰納極限をとると $G(\mathbb{A}^\infty)\times W_{F_\mathfrak{p}}$ 加群の完全系列が得られる．

定義 5.11
${}^v\mathcal{H}_\ell=\varinjlim_{n,K^\mathfrak{p}}\bigoplus_{x\in S_{n,K^\mathfrak{p}}}(R^1\Phi_{n,K^\mathfrak{p}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x\otimes\mathcal{F}_x$, ${}^{ns}\mathcal{H}_\ell=\varinjlim_{n,K^\mathfrak{p}}H^1(\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\overline{\otimes}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa},\mathcal{F})$ とおく．これらは $G(\mathbb{A}^\infty)\times W_{F_\mathfrak{p}}$ の表現である．

また，条件 $(\mathrm{CH})_B$ を満たす $G(\mathbb{A})$ の保型表現 Π に対し，${}^v\mathcal{H}_\ell$, ${}^{ns}\mathcal{H}_\ell$ の $\iota(\Pi^\infty)$-isotypic 部分をそれぞれ ${}^vR'_\ell(\Pi)$, ${}^{ns}R'_\ell(\Pi)$ とおく．これらは $W_{F_\mathfrak{p}}$ の表現であるが，特に後者は $W_{F_\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}$ の表現である．

補題 5.12
次の完全系列がある：$0\longrightarrow{}^{ns}R'_\ell(\Pi)\longrightarrow R'_\ell(\Pi)\longrightarrow{}^vR'_\ell(\Pi)\longrightarrow 0.$

証明 $\varinjlim_{n,K^\mathfrak{p}}\bigoplus_{A_n}H^2((\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\overline{\otimes}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa})_{A_n},\mathcal{F})$ の $\iota(\Pi^\infty)$-isotypic 部分が 0 になることを証明すればよい．そのためにまず，$M_{n,K^\mathfrak{p}}$ 上のスムーズ ℓ 進層 $\mathcal{F}=\mathcal{F}_{n,K^\mathfrak{p},\ell}$ が $\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}$ 上に延長できること（5.2 節の性質 iii)）の証明の概略を思い出しておこう：

ポイントは，$\mathcal{F}_{n,K^\mathfrak{p},\ell}$ の $M_n=\varprojlim_{K^\mathfrak{p}}M_{n,K^\mathfrak{p}}$ への引き戻し $\mathcal{F}_{n,\ell}$ が幾何学的自明になることである．実際，$Z(\mathbb{Q})$ の $Z(\mathbb{A}^\infty)$ における閉包を $Z(\mathbb{Q})^\wedge$ とおくと，

$$M_n(\mathbb{C})=Z(\mathbb{Q})^\wedge G(\mathbb{Q})\backslash\mathfrak{H}^\pm\times(G(\mathbb{A}^\infty)/K_\mathfrak{p}^n),$$

$$\mathcal{F}_{n,\ell}=Z(\mathbb{Q})^\wedge G(\mathbb{Q})\backslash\mathfrak{H}^\pm\times(G(\mathbb{A}^\infty)/K_\mathfrak{p}^n)\times W_\ell$$

であり，$[x,g,w]\longmapsto[x,g,\xi_\ell(g_\ell)^{-1}w]$ が $\mathcal{F}_{n,\ell}$ の自明化を与える．このことから，$\mathcal{F}_{n,\ell}$ は $\mathbf{M}_n=\varprojlim_{K^\mathfrak{p}}\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}$ 上の $B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})$ 同変なスムーズ ℓ 進層に自然に延長される．これの $K^\mathfrak{p}$ による商をとればよい．

この証明と，ξ_ℓ が G^{der} の Lie 環に誘導する表現が $\underline{k}\neq(2,\dots,2)$ のとき既約になることから，$\underline{k}\neq(2,\dots,2)$ ならば $\mathcal{F}$ の $(\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa})_{A_n}^\circ$ （$(\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa})_{A_n}$ の任意の連結成分）への制限は既約なスムーズ ℓ 進層であることが従う．これと Poincaré 双対定理より，$H^2((\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa})_{A_n},\mathcal{F})=0$ であることが分かる．

また，$\underline{k}=(2,\dots,2)$ のときには ξ_ℓ が G^{der} に誘導する表現は自明であるから，$\mathcal{F}$ の $(\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa})_{A_n}^\circ$ への制限は定数層となる．よって $\varinjlim_{n,K^\mathfrak{p}}\bigoplus_{A_n}H^2((\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa})_{A_n},\mathcal{F})$ への $B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})$ の作用は $\mathrm{Nrd}\colon B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})\longrightarrow(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})^\times$ を経由する．一方 $G(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現 Π に対し $\Pi^{\infty,\mathfrak{p}}$ が Nrd を経由することはないから，$\varinjlim_{n,K^\mathfrak{p}}\bigoplus_{A_n}H^2((\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa})_{A_n},\mathcal{F})$ の $\iota(\Pi^\infty)$-isotypic 部分は 0 になる．これよりよい． ∎

次に $\pi_n\colon\coprod_{A_n}(\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa})_{A_n}\longrightarrow\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa}$ を自然な射（正規化に一致する）とし，$\mathcal{G}=\mathrm{Coker}(\mathcal{F}\longrightarrow\pi_{n*}\pi_n^*\mathcal{F})$ とおく．$\mathcal{G}$ の台は有限集合 $S_{n,K^\mathfrak{p}}$ に含まれる．完全系列 $0\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow\pi_{n*}\pi_n^*\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}\longrightarrow0$ に伴うコホモロジー長完全系列は次のようになる：

$$\begin{aligned}0\longrightarrow H^0(\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa},\mathcal{F})\longrightarrow\bigoplus_{A_n}H^0\bigl((\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa})_{A_n},\mathcal{F}\bigr)\longrightarrow\bigoplus_{x\in S_{n,K^\mathfrak{p}}}\mathcal{G}_x\\ \longrightarrow H^1(\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa},\mathcal{F})\longrightarrow\bigoplus_{A_n}H^1\bigl((\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa})_{A_n},\mathcal{F}\bigr)\longrightarrow0.\end{aligned}$$

これは $W_{F_\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}$ 加群の完全系列であり，n, $K^\mathfrak{p}$ について帰納極限をとると $G(\mathbb{A}^\infty)\times W_{F_\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}$ 加群の完全系列が得られる．

定義 5.13

${}^s\mathcal{H}_\ell=\varinjlim_{n,K^\mathfrak{p}}\bigoplus_{x\in S_{n,K^\mathfrak{p}}}\mathcal{G}_x$, ${}^n\mathcal{H}_\ell=\varinjlim_{n,K^\mathfrak{p}}\bigoplus_{A_n}H^1((\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa})_{A_n},\mathcal{F})$ とおく．これらは $G(\mathbb{A}^\infty)\times W_{F_\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}$ の表現である．

また，条件 $(\mathrm{CH})_B$ を満たす $G(\mathbb{A})$ の保型表現 Π に対し，${}^s\mathcal{H}_\ell$, ${}^n\mathcal{H}_\ell$ の $\iota(\Pi^\infty)$-isotypic 部分をそれぞれ ${}^sR'_\ell(\Pi)$, ${}^nR'_\ell(\Pi)$ とおく．これらは $W_{F_\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}$ の表現である．

定義 5.14

条件 $(\mathrm{CH})_B$ を満たす $G(\mathbb{A})$ の保型表現 Π に対し，${}^s\mathcal{H}_\ell:=\varinjlim_{n,K^\mathfrak{p}}\bigoplus_{x\in S_{n,K^\mathfrak{p}}}\mathcal{G}_x$ の $\iota(\Pi^\infty)$-isotypic 部分を ${}^sR'_\ell(\Pi)$ とおく．また，${}^n\mathcal{H}_\ell:=\varinjlim_{n,K^\mathfrak{p}}\bigoplus_{A_n}H^1((\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\mathbin{\overline{\otimes}}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa})_{A_n},\mathcal{F})$ の $\iota(\Pi^\infty)$-isotypic 部分を ${}^nR'_\ell(\Pi)$ とおく．これらは $W_{F_\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}$ の表現である．

補題 5.15
次の完全系列がある：$0 \longrightarrow {}^{s}R'_\ell(\Pi) \longrightarrow {}^{ns}R'_\ell(\Pi) \longrightarrow {}^{n}R'_\ell(\Pi) \longrightarrow 0.$

証明　補題 5.12 と同様にして，$\varinjlim_{n,K^{\mathfrak{p}}} \bigoplus_{A_n} H^0((\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \overline{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa})_{A_n}, \mathcal{F})$ の $\iota(\Pi^\infty)$-isotypic 部分が 0 になることが証明できるのでよい． ∎

こうして，$R'_\ell(\Pi)$ は ${}^{s}R'_\ell(\Pi)$, ${}^{n}R'_\ell(\Pi)$, ${}^{v}R'_\ell(\Pi)$ の積み重ねとなっていることが分かった．これらをそれぞれ調べていくのであるが，何が成り立つかを先に述べておく．

定理 5.16
Π を条件 $(\mathrm{CH})_B$ を満たす $G(\mathbb{A})$ の保型表現とする．

i) ${}^{n}R'_\ell(\Pi) \neq 0$ であることと $\Pi_{\mathfrak{p}}$ が主系列表現であることは同値である．またこのとき，${}^{s}R'_\ell(\Pi) = {}^{v}R'_\ell(\Pi) = 0$, $\mathrm{WD}({}^{n}R'_\ell(\Pi)) = \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(|\det|^{-1/2} \otimes \Pi_{\mathfrak{p}}^\vee)$ となる．

ii) ${}^{s}R'_\ell(\Pi) \neq 0$ であることと $\Pi_{\mathfrak{p}}$ がスペシャル表現であることは同値である．またこのとき，$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} {}^{s}R'_\ell(\Pi) = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} {}^{v}R'_\ell(\Pi) = 1$ かつ $\mathrm{WD}({}^{s}R'_\ell(\Pi)) \oplus \mathrm{WD}({}^{v}R'_\ell(\Pi)) = \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(|\det|^{-1/2} \otimes \Pi_{\mathfrak{p}}^\vee)^{\mathrm{ss}}$ となる．

iii) ${}^{v}R'_\ell(\Pi) \neq 0$ であることと $\Pi_{\mathfrak{p}}$ が離散系列表現であることは同値である．またこのとき，${}^{v}R'_\ell(\Pi)$ は $\Pi_{\mathfrak{p}}$ のみに依存する．

5.3.1　${}^{n}\mathcal{H}_\ell$

まず，${}^{n}\mathcal{H}_\ell$ について調べよう．ここでは，$A_n \subset (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2$ を第一成分からなる直和成分とする．また，$P \subset \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})$ を可逆上三角行列全体のなす部分群とする．このとき，$(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2$ の階数 1 の直和成分全体は $(P \cap K^0_{\mathfrak{p}})\backslash K^0_{\mathfrak{p}}/K^n_{\mathfrak{p}}$ と同一視できる（$g \in (P \cap K^0_{\mathfrak{p}})\backslash K^0_{\mathfrak{p}}/K^n_{\mathfrak{p}}$ に $g^{-1}A_n$ を対応させる）．

${}^{n}\mathcal{H}_{A,\ell} = \varinjlim_{n,K^{\mathfrak{p}}} H^1((\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \overline{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa})_{A_n}, \mathcal{F})$ とおく．${}^{n}\mathcal{H}_{A,\ell}$ は $B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}}) \times P \times W_{F_{\mathfrak{p}}}^{\mathrm{ab}}$ の表現となり，これについて次が成り立つ．

定理 5.17
$\alpha = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{Art}_{F_{\mathfrak{p}}}(a)\right) \in P \times W_{F_{\mathfrak{p}}}^{\mathrm{ab}}$ $(a \in F_{\mathfrak{p}}^\times, b \in F_{\mathfrak{p}})$ の ${}^{n}\mathcal{H}_{A,\ell}$ への作用は自明である．

実際には，$\varprojlim_{n,K^n} (\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \overline{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa})_{A_n}$ への α の作用が絶対 Frobenius 射の $-v_F(a)$ 乗であることが証明でき（**合同関係式**），このことから上の定理が導かれる．

さて，$\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \overline{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa} = \coprod_{g \in (P \cap K^0_{\mathfrak{p}})\backslash K^0_{\mathfrak{p}}/K^n_{\mathfrak{p}}} (\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \overline{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \overline{\kappa})_{g^{-1}A_n}$ であり，$g \in K^0_{\mathfrak{p}}$ は

$(\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}}\,\overline{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}\,\overline{\kappa})_{A_n}$ を $(\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}}\,\overline{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}\,\overline{\kappa})_{g^{-1}A_n}$ にうつすので，

$$H^1(\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}}\,\overline{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}\,\overline{\kappa},\mathcal{F}_\ell)\cong\operatorname{Ind}_{(P\cap K^0_{\mathfrak{p}})/(P\cap K^n_{\mathfrak{p}})}^{K^0_{\mathfrak{p}}/K^n_{\mathfrak{p}}}H^1\bigl((\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}}\,\overline{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}\,\overline{\kappa})_{A_n},\mathcal{F}_\ell\bigr)$$

が従う（同型は，左辺の元 x に対し $K^0_{\mathfrak{p}}\ni g\longmapsto$（$gx$ の A_n 成分）を対応させることで与えられる）．これの帰納極限をとることで，${}^n\mathcal{H}_\ell\cong\operatorname{Ind}_{P\cap K^0_{\mathfrak{p}}}^{K^0_{\mathfrak{p}}}{}^n\mathcal{H}_{A,\ell}$ が得られ，さらに岩澤分解 $\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})=PK^0_{\mathfrak{p}}$ に注意することで ${}^n\mathcal{H}_\ell\cong\operatorname{Ind}_P^{\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})}{}^n\mathcal{H}_{A,\ell}$ が従う．

以下では，群準同型 $\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})\longrightarrow\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})\times W^{\mathrm{ab}}_{F_{\mathfrak{p}}};\ g\longmapsto(g,\mathrm{Art}_{F_{\mathfrak{p}}}(\det g))$ を用いることで $B^\times(\mathbb{A}_F^\infty)\times W_{F_{\mathfrak{p}}}$ 加群 V を $B^\times(\mathbb{A}_F^\infty)$ 加群とみなしたものを V° と書くことにする．同様に，$B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})\times P\times W^{\mathrm{ab}}_{F_{\mathfrak{p}}}$ 加群 W を $B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})\times P$ 加群とみなしたものを W° と書く．このとき，上の同型より，$B^\times(\mathbb{A}_F^\infty)$ 加群の同型

$$({}^n\mathcal{H}_\ell)^\circ\cong(\operatorname{Ind}_P^{\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})}{}^n\mathcal{H}_{A,\ell})^\circ\cong\operatorname{Ind}_P^{\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})}({}^n\mathcal{H}_{A,\ell})^\circ$$

が得られる（2 つ目の同型は，f を $g\longmapsto\mathrm{Art}_{F_{\mathfrak{p}}}(\det g)f(g)$ にうつす）．${}^n\mathcal{H}_\ell=\bigoplus_\Pi\iota(\Pi^\infty)\otimes{}^nR'_\ell(\Pi)$ であったから，$({}^n\mathcal{H}_\ell)^\circ=\bigoplus_\Pi\iota(\Pi^{\infty,\mathfrak{p}})\otimes(\iota(\Pi_{\mathfrak{p}})\otimes{}^nR'_\ell(\Pi))$ である（$g\in\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})$ は $\iota(\Pi_{\mathfrak{p}})\otimes{}^nR'_\ell(\Pi)$ に $(g,\mathrm{Art}_{F_{\mathfrak{p}}}(\det g))$ で作用）．

一方，定理 5.17 より $({}^n\mathcal{H}_{A,\ell})^\circ$ に $\begin{pmatrix}* & *\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in P$ という形の元は自明に作用するから，P の作用は $P\twoheadrightarrow F_{\mathfrak{p}}^\times;\ g\longmapsto$（$g$ の右下成分）を経由する．よって $({}^n\mathcal{H}_{A,\ell})^\circ\cong\bigoplus_i\iota(\rho_i)\otimes(1,\iota(\chi_i))$ という分解がある（ρ_i は $B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})$ の既約表現（重複があるかもしれない），χ_i は $F_{\mathfrak{p}}^\times$ の指標．例 1.3 の記号を用いた）．これより，$\operatorname{Ind}_P^{\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})}({}^n\mathcal{H}_{A,\ell})^\circ\cong\bigoplus_i\iota(\rho_i)\otimes\iota\operatorname{Ind}_P^{\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})}(1,\chi_i)$ となるので，$({}^n\mathcal{H}_\ell)^\circ$ の計算結果と合わせて次の $\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})$ 加群の同型がいえる：

$$\iota(\Pi_{\mathfrak{p}})\otimes{}^nR'_\ell(\Pi)\cong\bigoplus_{\rho_i\cong\Pi^{\infty,\mathfrak{p}}}\iota\operatorname{Ind}_P^{\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})}\bigl(1,\chi_i\bigr).$$

ここで $\iota(\Pi_{\mathfrak{p}})\otimes{}^nR'_\ell(\Pi)$ は半単純 $\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})$ 加群であることに注意すると，$\iota\operatorname{Ind}_P^{\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})}(1,\chi_i)$ は全て既約であることが分かる．さらに，$\mathrm{WD}({}^nR'_\ell(\Pi))$ の直和分解に現れる $W_{F_{\mathfrak{p}}}$ の指標を $\mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}\zeta$ と書くと，ある i に対し $\iota(\Pi_{\mathfrak{p}})\cong\iota\operatorname{Ind}_P^{\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})}(\zeta^{-1},\zeta^{-1}\chi_i)$ すなわち $\Pi_{\mathfrak{p}}\cong\text{n-Ind}(\zeta^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1/2},\zeta^{-1}\chi_i|\ |_{\mathfrak{p}}^{1/2})$ となることが分かる（記号の簡略化のため，$\text{n-Ind}_P^{\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})}$ のことを単に n-Ind と書いた）．

ここまでで分かったことを命題としてまとめておこう：

命題 5.18

${}^nR'_\ell(\Pi)\neq0$ ならば $\Pi_{\mathfrak{p}}$ は主系列表現である．またこのとき $\Pi_{\mathfrak{p}}=\text{n-Ind}(\xi_1,\xi_2)$（$\xi_1,\xi_2$ は $F_{\mathfrak{p}}^\times$ の指標）とおくと，$\mathrm{WD}({}^nR'_\ell(\Pi))$ の直和分解に現れる $W_{F_{\mathfrak{p}}}$ の指標は $\mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(\xi_1^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1/2})$ または $\mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(\xi_2^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1/2})$ のいずれかである．

ここで，後に証明される次の仮定を考える：

仮定 5.19

F の有限素点 $\mathfrak{p}$ が ℓ を割らず，B が $\mathfrak{p}$ で分岐しないとする．このとき，$\Pi_{\mathfrak{p}}$ が主系列表現ならば $\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} {}^nR'_\ell(\Pi) = 2$ である（先程まで固定していた $\mathfrak{p}$ だけではなく，全ての $\mathfrak{p}$ に対しての成立を仮定する）．

命題 5.20

$\Pi_{\mathfrak{p}}$ の中心指標を $\chi_{\Pi_{\mathfrak{p}}}$ とおくと，仮定 5.19 のもとで次が成り立つ：

$$\mathrm{WD}\bigl(\det R'_\ell(\Pi)|_{W_{F_{\mathfrak{p}}}}\bigr) = \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(\chi_{\Pi_{\mathfrak{p}}}^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1}).$$

証明　命題 5.10 より，G_F の ℓ 進指標 $\det R'_\ell(\Pi) \otimes R_\ell(\chi_\Pi|\ |_F)$ は位数 2 である．したがって命題 2.3 と注意 2.4 より，$R_\ell(\alpha)$ がこの ℓ 進指標となるような $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ の代数的 Hecke 指標 α が存在し，$n_{\tau_1} = \cdots = n_{\tau_d} = 0$ となる（定義 2.1 の記号を用いている）．このとき，次が成り立つ：

(∗) ℓ を割らない F の有限素点 $\mathfrak{p}$ に対し，$\mathrm{WD}\bigl(\det R'_\ell(\Pi)|_{W_{F_{\mathfrak{p}}}}\bigr) = \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(\alpha_{\mathfrak{p}}\chi_{\Pi_{\mathfrak{p}}}^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1})$.

$\alpha = 1$ を導きたい．次を満たす F の有限素点 $\mathfrak{p}$ の集合を S とおく：

$$\mathfrak{p} \nmid \ell, \qquad B\ \text{は}\ \mathfrak{p}\ \text{で分岐しない}, \qquad \Pi_{\mathfrak{p}}\ \text{は主系列表現}.$$

$\mathfrak{p} \in S$ であるとき, 仮定 5.19 より ${}^nR'_\ell(\Pi) = R'_\ell(\Pi)|_{W_{F_{\mathfrak{p}}}}$ である．また $\Pi_{\mathfrak{p}} = \text{n-Ind}(\xi_{1,\mathfrak{p}}, \xi_{2,\mathfrak{p}})$ とおくと，命題 5.18 より $\mathrm{WD}({}^nR'_\ell(\Pi))$ は次のいずれかと同型である：

$$\mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(\xi_{i,\mathfrak{p}}^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1/2}) \oplus \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(\xi_{j,\mathfrak{p}}^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1/2}), \quad (i,j) \in \bigl\{(1,2),(1,1),(2,2)\bigr\}.$$

このとき $\mathrm{WD}(\det {}^nR'_\ell(\Pi)) \cong \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(\xi_{i,\mathfrak{p}}^{-1}\xi_{j,\mathfrak{p}}^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1})$ である．これと (∗) および $\chi_{\Pi_{\mathfrak{p}}} = \xi_{1,\mathfrak{p}}\xi_{2,\mathfrak{p}}$ より，$\xi_{i,\mathfrak{p}}^{-1}\xi_{j,\mathfrak{p}}^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1} = \alpha_{\mathfrak{p}}\xi_{1,\mathfrak{p}}^{-1}\xi_{2,\mathfrak{p}}^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1}$ が得られる．よって，$\alpha_{\mathfrak{p}}$ は $(i,j) = (1,2)$, $(1,1)$, $(2,2)$ の場合それぞれ 1, $\xi_{1,\mathfrak{p}}^{-1}\xi_{2,\mathfrak{p}}$, $\xi_{1,\mathfrak{p}}\xi_{2,\mathfrak{p}}^{-1}$ となる．さらに $\alpha_{\mathfrak{p}}^2 = 1$ より，$(i,j) = (1,1),(2,2)$ のときは $\xi_{1,\mathfrak{p}}^{-1}\xi_{2,\mathfrak{p}} = \xi_{1,\mathfrak{p}}\xi_{2,\mathfrak{p}}^{-1}$ であることも分かる．したがって，いずれの場合も $\mathfrak{p} \in S$ に対して $\Pi_{\mathfrak{p}} \otimes \alpha_{\mathfrak{p}} = \text{n-Ind}(\alpha_{\mathfrak{p}}\xi_{1,\mathfrak{p}}, \alpha_{\mathfrak{p}}\xi_{2,\mathfrak{p}}) \cong \text{n-Ind}(\xi_{1,\mathfrak{p}}, \xi_{2,\mathfrak{p}})$ であるから，$\Pi \otimes \alpha \cong \Pi$ である．

このことと命題 5.9 より，$\mathrm{WD}({}^nR'_\ell(\Pi)) \cong \mathrm{WD}({}^nR'_\ell(\Pi \otimes \alpha)) = \mathrm{WD}({}^nR'_\ell(\Pi)) \otimes \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}} \alpha_{\mathfrak{p}}$ となる．もし $\mathfrak{p} \in S$ において $(i,j) = (1,1)$ ならば,

$$\begin{aligned}\mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(\xi_{1,\mathfrak{p}}^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1/2}) \oplus \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(\xi_{1,\mathfrak{p}}^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1/2}) &\cong \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(\alpha_{\mathfrak{p}}\xi_{1,\mathfrak{p}}^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1/2}) \oplus \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(\alpha_{\mathfrak{p}}\xi_{1,\mathfrak{p}}^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1/2}) \\ &= \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(\xi_{2,\mathfrak{p}}^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1/2}) \oplus \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(\xi_{2,\mathfrak{p}}^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1/2})\end{aligned}$$

より $\xi_{1,\mathfrak{p}} = \xi_{2,\mathfrak{p}}$ となり，$\Pi_{\mathfrak{p}}$ の既約性に反する．$(i,j) = (2,2)$ の場合も同様である．よって任意の $\mathfrak{p} \in S$ に対して $(i,j) = (1,2)$ すなわち $\alpha_{\mathfrak{p}} = 1$ となるので，$\alpha = 1$ が分かり主張が従う． ∎

系 5.21
$\Pi_{\mathfrak{p}}$ が主系列表現であるとする．仮定 5.19 のもとで次が成り立つ：

$$\mathrm{WD}\bigl({}^{n}R'_{\ell}(\Pi)\bigr) = \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}\bigl(|\det|^{-1/2} \otimes \Pi_{\mathfrak{p}}^{\vee}\bigr).$$

証明　$\Pi_{\mathfrak{p}} = \text{n-Ind}(\xi_{1,\mathfrak{p}}, \xi_{2,\mathfrak{p}})$ とおくと，命題 5.20 の証明において

$$\mathrm{WD}\bigl({}^{n}R'_{\ell}(\Pi)\bigr) = \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(\xi_1^{-1}|\ |_{F_{\mathfrak{p}}}^{-1/2}) \oplus \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(\xi_2^{-1}|\ |_{F_{\mathfrak{p}}}^{-1/2})$$

も示されている．一方，$\mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(|\det|^{-1/2} \otimes \Pi_{\mathfrak{p}}^{\vee}) = \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}\,\text{n-Ind}(\xi_{1,\mathfrak{p}}^{-1}, \xi_{2,\mathfrak{p}}^{-1}) \otimes \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1/2}) = \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(\xi_{1,\mathfrak{p}}^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1/2}) \oplus \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(\xi_{2,\mathfrak{p}}^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1/2})$ となる．これよりよい．∎

5.3.2　${}^{v}\mathcal{H}_{\ell}$

次に，${}^{v}\mathcal{H}_{\ell}$ を考える．まず，左下の図式を $S_{n,K^{\mathfrak{p}}}$ に制限すると右下の図式が得られることに注意する：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}}\,\overline{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}\,\overline{\kappa} & \longrightarrow & \mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}\overline{\kappa} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{M}_{0,K^{\mathfrak{p}}}\,\overline{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}\,\overline{\kappa} & = & \mathbf{M}_{0,K^{\mathfrak{p}}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}\overline{\kappa} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S_{n,K^{\mathfrak{p}}} & \longrightarrow & S_{0,K^{\mathfrak{p}}} \\ \downarrow & & \| \\ S_{0,K^{\mathfrak{p}}} & = & S_{0,K^{\mathfrak{p}}}. \end{array}$$

したがって，自然な射 $\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}}\,\overline{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}\,\overline{\kappa} \longrightarrow \mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}\overline{\kappa}$ での $S_{n,K^{\mathfrak{p}}}$ の像は $S_{0,K^{\mathfrak{p}}}$ と同一視できる．

${}^{v}\mathcal{H}_{\ell}$ を考える際のポイントは，$x \in S_{0,K^{\mathfrak{p}}}$ における $\{\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}}\}_n$ の強ヘンゼル化の完備化 $\{(\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}})^{\wedge}_x\}_n$ が次元 1，高さ 2 の形式 $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ 加群の変形空間の塔（いわゆる Lubin-Tate 塔）と同型になるということである（$\mathbf{M}_{n,K'^{\mathfrak{p}}} \longrightarrow \mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}}$ はエタール射なので，$(\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}})^{\wedge}_x$ は $K^{\mathfrak{p}}$ に依存しないことに注意）．群作用も込めて記述すると次の形にまとめられる：

定理 5.22（超特異点における p 進一意化）
$(\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}})^{\wedge}_{\mathrm{ss}} = \coprod_{x \in S_{0,K^{\mathfrak{p}}}} (\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}})^{\wedge}_x$ とおくと，次の射影系の間の同型がある（Lubin-Tate 塔 $\{\breve{\mathcal{M}}_n\}_n$ の定義についてはこの定理の直後の説明を参照）：

$$\bigl\{\overline{B}^{\times}(F)\backslash \breve{\mathcal{M}}_n \times B^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})/K^{\mathfrak{p}}\bigr\}_{n,K^{\mathfrak{p}}} \xrightarrow{\cong} \bigl\{(\mathbf{M}_{n,K^{\mathfrak{p}}})^{\wedge}_{\mathrm{ss}}\bigr\}_{n,K^{\mathfrak{p}}}.$$

さらに，この同型は Weil 降下データおよび $B^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty})$ の作用と可換である（$B^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty}) = \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}}) \times B^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})$ の左辺への作用は，$\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})$ を第一成分に，$B^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})$ を第二成分に自然に作用させることで定める．$\overline{B}$ については 5.2 節 viii) を参照）．

定理中の $\breve{\mathcal{M}}_n$ の定義について簡単に復習しておこう（詳細は [St] 等を参照されたい）．

$\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ の最大不分岐拡大の完備化を $\breve{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}$ とおく．$\breve{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}$ の剰余体 $\overline{\kappa}$ 上の次元 1, 高さ 2 の形式 $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ 加群 $\mathbb{X}$ を固定する（このような $\mathbb{X}$ は同型を除いて一意的である)．$\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ の素元 ϖ が局所冪零であるような $\breve{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}$ スキームの圏を $\mathrm{Nilp}_{\breve{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}}$ とおき，$T \longmapsto \{(X,\rho,\eta)\}/\cong$ で与えられる関手 $\mathrm{Nilp}_{\breve{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ を考える．ここで，X は T 上の形式 $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ 加群，$\rho\colon \mathbb{X}\times_{\mathrm{Spec}\,\overline{\kappa}}\overline{T} \longrightarrow X\times_T \overline{T}$ ($\overline{T}=T\otimes_{\breve{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}}\overline{\kappa}$ とおいた）は擬同種写像，$\eta\colon (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_\mathfrak{p})^2 \longrightarrow X[\varpi^n]$ は Drinfeld レベル構造である．この関手は $\breve{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}$ 上の形式スキーム $\breve{\mathcal{M}}_n$ で表現される．射影系 $\{\breve{\mathcal{M}}_n\}_n$ を **Lubin-Tate 塔**と呼ぶ.

$d\in\mathbb{Z}$ とする．$\breve{\mathcal{M}}_n$ のうち，$\deg\rho = d$ となる 3 つ組 (X,ρ,η) に対応する部分を $\breve{\mathcal{M}}_n^{(d)}$ と書くと，$\breve{\mathcal{M}}_n = \coprod_{d\in\mathbb{Z}}\breve{\mathcal{M}}_n^{(d)}$ となる．さらに，$\breve{\mathcal{M}}_n^{(d)}$ は 2 次元完備正則局所環 $R_n^{(d)}$ を用いて $\mathrm{Spf}\,R_n^{(d)}$ と表すことができる．特に $R_0^{(0)} = \breve{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}[[T_1]]$ である（定理 5.22 と合わせると，$\mathbf{M}_{0,K^\mathfrak{p}}$ が $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ 上滑らかであることはこの事実の反映であると考えることができる).

$\mathbb{X}$ の自己同種写像全体のなす群は $\overline{B}_\mathfrak{p}^\times$ と同型であるから，$\overline{B}_\mathfrak{p}^\times$ は各 $\breve{\mathcal{M}}_n$ に作用する．また，レベル構造を用いることで $\mathrm{GL}_2(F_\mathfrak{p})$ の $\breve{\mathcal{M}}_n$ への作用を考えることもできる．$\varphi\in W_{F_\mathfrak{p}}$ を算術的 Frobenius 元（$n(\varphi)=1$ となる元）とするとき，Weil 降下データ $\varphi_*\breve{\mathcal{M}}_n \longrightarrow \breve{\mathcal{M}}_n$ を $(X,\rho,\eta)\longmapsto(\varphi_*X,\mathrm{Frob}\circ\rho,\eta)$ で定めることができる.

定理 5.22 の証明についてはここでは述べないが，整モデルの性質 viii)（超特異点の記述）と [Ca2, Proposition 6.6]（$(\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}})^\wedge_x$ と $\mathrm{Spec}\,R_n^{(0)}$ が同型であることを保証する．Serre-Tate の定理の帰結）から容易に導かれる.

注意 5.23

定理 5.22 は，Cherednik-Drinfeld の定理と同様の形をしていることに注意せよ．これらの一般化として，PEL 型志村多様体の場合にはその整モデルの超特異 strata に沿った完備化が基本的 (basic) isocrystal に伴う Rapoport-Zink 空間を用いて一意化されるという理論がある ([RZ]).

注意 5.24

[Ca1] では $\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\,\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\,\mathcal{O}_\mathfrak{p}^n$ の $S_{n,K^\mathfrak{p}}$ での強ヘンゼル化の完備化を考えているのに対し，定理 5.22 では $\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}$ を考察していることに注目してほしい．前者も Lubin-Tate 空間 $\breve{\mathcal{M}}_n$ と関係するが，$\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_\mathfrak{p}^n$ への構造射を形式 $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ 加群を用いて捉えるのはなかなかに面倒である ([Ca1, §7,8,9])．後者ならば $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ への構造射のみを考えればよいのでこのような問題はないうえ，後述するように後者を用いて ${}^vR'_\ell(\Pi)$ を調べることができるのである.

注意 5.25

$\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}$ の特殊ファイバー上の幾何学的点のうち $S_{0,K^\mathfrak{p}}$ 以外の点においては，強ヘンゼル化の完備化は (Lubin-Tate 群) $\times\, F_\mathfrak{p}/\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ という p 可除 $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ 加群の変形空間によって記述できる．このことと定理 5.22 は，実は 5.2 節で述べた整モデルの諸性質を証明する際にも用いられる.

定義 5.26
$\breve{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}$ の商体を $\breve{F}_{\mathfrak{p}}$ とおき，$\mathcal{U}_\ell = \varinjlim_n H^1(\breve{\mathcal{M}}_n \otimes_{\breve{\mathcal{O}}_{F_{\mathfrak{p}}}} \overline{\breve{F}_{\mathfrak{p}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \varinjlim_n \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} R^1\psi_{\breve{\mathcal{M}}_n^{(d)}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ とおく．これは $\overline{B}_{\mathfrak{p}}^{\times} \times \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}}) \times W_{F_{\mathfrak{p}}}$ の表現であり（$W_{F_{\mathfrak{p}}}$ の作用を定めるには，Weil 降下データを用いる），$\overline{B}_{\mathfrak{p}}^{\times} \times \mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})$ に関してはスムーズである．

${}^v\mathcal{H}_\ell$ と $\mathcal{U}_\ell$ を結びつけるためには，消滅サイクルが完備化によっても変わらないことを証明する必要がある．これについて述べておこう（論文 [Ca1] においては，付録で Brylinski が相対次元 1 の場合に限って証明を与えているが，その後の理解の進歩により，よく知られている定理を組み合わせるだけで証明できるようになった）．

定理 5.27（正則底変換定理）
次のスキームのカルテシアンな可換図式において，f が準コンパクトかつ準分離的な射であり，g が正則射であるとする．

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

また，$n \geq 1$ を S において可逆な整数とする．このとき，X 上の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 層 $\mathcal{G}$ に対し，底変換準同型 $g^*Rf_*\mathcal{G} \longrightarrow Rf'_*g'^*\mathcal{G}$ は同型である．

この定理は [Fu] において証明された．[Fu] では，リジッド空間のエタールコホモロジーに関する比較定理の応用としてこの定理を導いているが，直接スキーム論で証明することもできる（例えば [Ri, Proposition 4.5] 参照）．

系 5.28
V を離散付値環とし，V の強ヘンゼル化の完備化を $\widehat{V}$，その商体を $\widehat{K}$ とおく．ℓ を V で可逆な素数とする．
V 上有限型のスキーム X に対し，x を X の特殊ファイバー上の幾何学的点とし，x における強ヘンゼル化 $\mathcal{O}_{X,x}$ の完備化 $\mathcal{O}_{X,x}^{\wedge}$ の Spec を $X_x^{\wedge}$ と書く．このとき，X 上の ℓ 進層 $\mathcal{G}$ に対し，次の同型がある（どの底に関して隣接サイクルをとるかを ψ の右下に明示している）：

$$(R\psi_{X/V}\mathcal{G})_x \cong \big(R\psi_{X_x^{\wedge}/\widehat{V}}(\mathcal{G}|_{X_x^{\wedge}})\big)_x \cong R\Gamma\Big(X_x^{\wedge} \otimes_{\widehat{V}} (\widehat{K})^{\mathrm{sep}}, \mathcal{G}|_{X_x^{\wedge}\otimes_{\widehat{V}}(\widehat{K})^{\mathrm{sep}}}\Big).$$

証明　右の同型は $R\psi$ の定義より明らかであるから，左の同型を示せばよい．まず，明らかに V は強ヘンゼルであるとしてよい．$V = \widehat{V}$ の場合に帰着しよう．[SGA4.1/2, Finitude, Proposition 3.7] より $R\psi_{X/V}\mathcal{G} \cong R\psi_{X\otimes_V \widehat{V}/\widehat{V}}(\mathcal{G}|_{X\otimes_V \widehat{V}})$ であるから，$(X \otimes_V \widehat{V})^\wedge_x = X^\wedge_x$ を証明すれば十分である．$A = \mathcal{O}_{X,x}$ とおき，その極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とおく．また，V の素元を ϖ とおく．このとき，$A \otimes_V \widehat{V}$ は局所環であり，その極大イデアルは $\mathfrak{n} = \mathrm{Im}(\mathfrak{m} \otimes \widehat{V}) + \mathrm{Im}(A \otimes \varpi\widehat{V})$ である．実際，$(A \otimes_V \widehat{V})/\mathfrak{n} = A/\mathfrak{m} \otimes_V V/\varpi V = A/\mathfrak{m}$ となる（最後の等号で $\varpi \in \mathfrak{m}$ を用いた）．さらに，$A \otimes_V \widehat{V}$ の $\mathfrak{n}$ における完備化は $\widehat{A}\widehat{\otimes}_{\widehat{V}}\widehat{V} = \widehat{A}$ となるのでよい．

以下 $V = \widehat{V}$ と仮定し，$\eta = \operatorname{Spec} \widehat{K}$, $\overline{\eta} = \operatorname{Spec}(\widehat{K})^{\mathrm{sep}}$ とおく．また，$\operatorname{Spec} V$ の閉点を s とする．V は完備 Noether 局所環なのでエクセレントであるから，X もエクセレントスキームであることに注意する．特に，$\varphi\colon X^\wedge_x \longrightarrow X$ は正則射である．次のカルテシアンな可換図式を考えよう：

$$\begin{tikzcd}
(X^\wedge_x)_s \arrow[r, "\hat{\imath}"] \arrow[d, "\varphi_s"] & X^\wedge_x \arrow[d, "\varphi"] & (X^\wedge_x)_{\overline{\eta}} \arrow[l, "\hat{\jmath}"'] \arrow[d, "\varphi_{\overline{\eta}}"] \\
X_s \arrow[r, "i"] & X & X_{\overline{\eta}}. \arrow[l, "j"']
\end{tikzcd}$$

隣接サイクルの定義より，$R\psi_{X/V}\mathcal{G} = i^*Rj_*j^*\mathcal{G}$, $R\psi_{X^\wedge_x/V}(\mathcal{G}|_{X^\wedge_x}) = \hat{\imath}^*R\hat{\jmath}_*\varphi^*_{\overline{\eta}}j^*\mathcal{G}$ である．よって正則底変換定理より，

$$\varphi_s^*R\psi_{X/V}\mathcal{G} = \varphi_s^*i^*Rj_*j^*\mathcal{G} = \hat{\imath}^*\varphi^*Rj_*j^*\mathcal{G} = \hat{\imath}^*R\hat{\jmath}_*\varphi^*_{\overline{\eta}}j^*\mathcal{G} = R\psi_{X^\wedge_x/V}(\mathcal{G}|_{X^\wedge_x})$$

となるので，両辺の x における茎をとれば主張が従う． ∎

さらに，$S_{0,K^\mathfrak{p}}$ 上に $\mathcal{F}$ を制限したものがどのように記述されるかも調べておく必要がある：

命題 5.29 （[Ca1, 6.2]）
$\overline{G} = \operatorname{Res}_{F/\mathbb{Q}} \overline{B}^\times$ とおき，$\overline{G} \otimes_\mathbb{Q} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong G \otimes_\mathbb{Q} \overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\xi_\ell} \mathrm{GL}(W_\ell)$ （(ξ_ℓ, W_ℓ) は定義 5.4 で定めたもの）の合成として得られる $\overline{G}$ の $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の代数的表現を $(\overline{\xi}_\ell, \overline{W}_\ell)$ とおく．このとき，5.2 節 viii) で述べた同型 $S_{0,K^\mathfrak{p}} \cong \overline{B}^\times(F)\backslash F^\times_\mathfrak{p} \times B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})/(U^0_\mathfrak{p} \times K^\mathfrak{p}) = \overline{B}^\times(F)\backslash\mathbb{Z} \times B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})/K^\mathfrak{p}$ を延長する同型 $\mathcal{F}|_{S_{0,K^\mathfrak{p}}} \cong \overline{B}^\times(F)\backslash\mathbb{Z} \times (B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})/K^\mathfrak{p}) \times \overline{W}_\ell$ がある．ここで $\overline{B}^\times(F)$ は $\overline{W}_\ell$ に $\overline{B}^\times(F) = \overline{G}(\mathbb{Q}) \hookrightarrow \overline{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \curvearrowright \overline{W}_\ell$ として作用する．

正規化の射 $\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}} \overline{\otimes}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}} \mathcal{O}^n_\mathfrak{p} \longrightarrow \mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}} \otimes_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}} \mathcal{O}^n_\mathfrak{p}$ に固有底変換定理を適用することにより，

$$\bigoplus_{x \in S_{n,K^\mathfrak{p}}} (R^1\Phi_{\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}\overline{\otimes}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\mathcal{O}^n_\mathfrak{p}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x \otimes \mathcal{F}_x \cong \bigoplus_{x \in S_{0,K^\mathfrak{p}}} (R^1\psi_{\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x \otimes \mathcal{F}_x$$

である．これと定理 5.22，系 5.28，命題 5.29 を組み合わせることで次が得られる：

命題 5.30
${}^v\mathcal{H}_\ell$ は写像 $f\colon B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}}) \longrightarrow \mathcal{U}_\ell \otimes \overline{W}_\ell$ で条件

$$g \in \overline{B}^{\times}(F),\, b \in B^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}}) \text{ に対し } f(gb) = (g_{\mathfrak{p}} \otimes \overline{\xi}_{\ell}(g))f(b)$$

を満たすもの全体のなす $B^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty}) \times W_{F_{\mathfrak{p}}}$ 加群の $B^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty})$ スムーズ部分（$B^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty})$ の作用に関してスムーズな元全体）と同型である（$g \in B^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty})$ の f への作用は $(gf)(b) = (g_{\mathfrak{p}} \otimes 1)f(bg^{\infty,\mathfrak{p}})$ で定める）．

${}^{v}\mathcal{H}_{\ell}$ をより分かりやすい形に変形しよう．$\overline{\xi}_{\ell}\colon \overline{G} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \longrightarrow \mathrm{GL}(\overline{W}_{\ell})$ の $\iota^{-1}\colon \overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$ による底変換を $\overline{\xi}_{\mathbb{C}}\colon \overline{G} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{GL}(\overline{W}_{\mathbb{C}})$ とおくと，次の可換図式が得られる：

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{G}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}) \arrow[r, "\overline{\xi}_{\ell}"] \arrow[dd, "\iota^{-1}"] & \mathrm{GL}(\overline{W}_{\ell}) \arrow[dd, "\iota^{-1}"] \\
\overline{G}(\mathbb{Q}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & \overline{G}(\mathbb{C}) \arrow[r, "\overline{\xi}_{\mathbb{C}}"] & \mathrm{GL}(\overline{W}_{\mathbb{C}}).
\end{tikzcd}$$

特に $\overline{B}^{\times}(F) = \overline{G}(\mathbb{Q})$ の表現 $\iota^{-1} \circ (\overline{\xi}_{\ell}|_{\overline{B}^{\times}(F)})$ は $\overline{B}^{\times}(F_{\infty}) = \overline{G}(\mathbb{R})$ に $\overline{\xi}_{\mathbb{C}}$ として拡張できるが，その τ_i 成分 $\overline{\xi}_{\mathbb{C},\tau_i}\colon \overline{B}^{\times}_{\tau_i} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の双対 $\overline{\xi}^{\vee}_{\mathbb{C},\tau_i}$ は $\overline{D}_{k_i,w}$ と同型であることが容易に分かる．

このことと上の命題より次の $B^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty}) \times W_{F_{\mathfrak{p}}}$ 加群の同型が得られる（右辺の $_{\mathrm{sm}}$ はスムーズ部分）：

$$\iota^{-1}({}^{v}\mathcal{H}_{\ell}) \cong \bigl\{ f\colon B^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}}) \longrightarrow \iota^{-1}(\mathcal{U}_{\ell}) \otimes \overline{W}_{\mathbb{C}} \bigm| f(gb) = (g_{\mathfrak{p}} \otimes \overline{\xi}_{\mathbb{C}}(g_{\infty}))f(b) \bigr\}_{\mathrm{sm}}.$$

さらに f に対し写像 $\overline{B}^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty}) \longrightarrow \iota^{-1}(\mathcal{U}_{\ell}) \otimes W_{\mathbb{C}};\, b \longmapsto b_{\mathfrak{p}}^{-1} f(b^{\mathfrak{p}})$ を対応させることで，次の $B^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty}) \times W_{F_{\mathfrak{p}}}$ 加群の同型を得る：

$$\iota^{-1}({}^{v}\mathcal{H}_{\ell}) \cong \bigl\{ \phi\colon \overline{B}^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty}) \longrightarrow \iota^{-1}(\mathcal{U}_{\ell}) \otimes \overline{W}_{\mathbb{C}} \bigm| \phi(gb) = \overline{\xi}_{\mathbb{C}}(g_{\infty})\phi(b), \phi(bg_{\mathfrak{p}}) = g_{\mathfrak{p}}^{-1}\phi(b) \bigr\}_{\mathrm{sm}}.$$

ここで，$\mathcal{A} = \{\varphi\colon \overline{B}^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty}) \longrightarrow \overline{W}_{\mathbb{C}} \mid \varphi(gb) = \overline{\xi}_{\mathbb{C}}(g_{\infty})\varphi(b)\}_{\mathrm{sm}}$ とおくと，$B^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty}) \times \overline{B}^{\times}_{\mathfrak{p}} \times W_{F_{\mathfrak{p}}}$ 加群の同型

$$\bigl\{ \phi\colon \overline{B}^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty}) \longrightarrow \iota^{-1}(\mathcal{U}_{\ell}) \otimes \overline{W}_{\mathbb{C}} \bigm| \phi(gb) = \overline{\xi}_{\mathbb{C}}(g_{\infty})\phi(b) \bigr\}_{\mathrm{sm}} \cong \mathcal{A} \otimes \iota^{-1}(\mathcal{U}_{\ell})$$

がある（$\overline{B}^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty})$ の任意のコンパクト開部分群 K に対して $\overline{B}^{\times}(F)\backslash \overline{B}^{\times}(\mathbb{A}_F)/K$ が有限集合であることを用いる）から，次の $B^{\times}(\mathbb{A}_F^{\infty}) \times W_{F_{\mathfrak{p}}}$ 加群の同型が得られる：

$$\iota^{-1}({}^{v}\mathcal{H}_{\ell}) \cong \bigl(\mathcal{A} \otimes \iota^{-1}(\mathcal{U}_{\ell})\bigr)^{\overline{B}^{\times}_{\mathfrak{p}}}.$$

一方，$\overline{B}^\times$ に対する重複度 1 定理と $\overline{\xi}^\vee_{\mathbb{C},\tau_i} \cong \overline{D}_{k_i,w}$ より，$\mathcal{A}$ は次のように直和分解される：

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\substack{\overline{\Pi}\,:\,\overline{B}^\times(\mathbb{A}_F)\text{ の保型表現} \\ \overline{\Pi}_{\tau_i}\cong\overline{D}_{k_i,w}}} \overline{\Pi}^\infty.$$

$\overline{\Pi}_{\tau_i} \cong \overline{D}_{k_i,w}$ となるような $\overline{B}^\times(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 $\overline{\Pi}$ に対し，

$$\begin{aligned}\left(\overline{\Pi}^\infty \otimes \iota^{-1}(\mathcal{U}_\ell)\right)^{\overline{B}_\mathfrak{p}^\times} &= \overline{\Pi}^{\infty,\mathfrak{p}} \otimes \left(\overline{\Pi}_\mathfrak{p} \otimes \iota^{-1}(\mathcal{U}_\ell)\right)^{\overline{B}_\mathfrak{p}^\times} \cong \overline{\Pi}^{\infty,\mathfrak{p}} \otimes \mathrm{Hom}_{\overline{B}_\mathfrak{p}^\times}\left(\overline{\Pi}_\mathfrak{p}^\vee, \iota^{-1}(\mathcal{U}_\ell)\right) \\ &= \overline{\Pi}^{\infty,\mathfrak{p}} \otimes \iota^{-1}(\mathcal{U}_\ell)(\overline{\Pi}_\mathfrak{p}^\vee)\end{aligned}$$

となるから，次の $B^\times(\mathbb{A}^\infty) \times W_{F_\mathfrak{p}}$ 加群の同型が得られる：

$$\iota^{-1}({}^v\mathcal{H}_\ell) \cong \bigoplus_{\overline{\Pi}_{\tau_i}\cong\overline{D}_{k_i,w}} \overline{\Pi}^{\infty,\mathfrak{p}} \otimes \iota^{-1}(\mathcal{U}_\ell)(\overline{\Pi}_\mathfrak{p}^\vee).$$

さて，大域 Jacquet-Langlands 対応により，

- $B^\times(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 Π で条件 $(\mathrm{CH})_B$ を満たし，$\mathfrak{p} \in \mathrm{DS}(\Pi)$ となるもの
- $\overline{B}^\times(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 $\overline{\Pi}$ で $\overline{\Pi}_{\tau_i} \cong \overline{D}_{k_i,w}$ となるもの

の間には一対一対応がある．したがって，上の式は次のように書き換えることができる：

$$\iota^{-1}({}^v\mathcal{H}_\ell) \cong \bigoplus_{\substack{\Pi\,:\,(\mathrm{CH})_B \\ \mathfrak{p}\in\mathrm{DS}(\Pi)}} \Pi^{\infty,\mathfrak{p}} \otimes \iota^{-1}(\mathcal{U}_\ell)\big(\mathrm{LJ}_\mathfrak{p}(\Pi_\mathfrak{p})^\vee\big).$$

この分解と強重複度 1 定理より次の命題を得る（再び $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 係数に書き直している）：

命題 5.31
${}^vR'_\ell(\Pi) \neq 0$ ならば $\Pi_\mathfrak{p}$ は離散系列表現である．さらにこのとき，次の等式が成り立つ：

$$\iota(\Pi_\mathfrak{p}) \otimes {}^vR'_\ell(\Pi) = \mathcal{U}_\ell\big(\iota\,\mathrm{LJ}_\mathfrak{p}(\Pi_\mathfrak{p})^\vee\big).$$

特に，${}^vR'_\ell(\Pi) = \mathcal{U}_\ell(\iota(\Pi_\mathfrak{p} \otimes \mathrm{LJ}_\mathfrak{p}(\Pi_\mathfrak{p})^\vee))$ は $\Pi_\mathfrak{p}$ のみに依存する．

5.3.3 ${}^s\mathcal{H}_\ell$

$x \in S_{n,K^\mathfrak{p}}$ に対し，

$$\mathcal{G}_x = \mathrm{Coker}(\mathcal{F} \longrightarrow \pi_{n*}\pi_n^*\mathcal{F})_x = \mathrm{Coker}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow \pi_{n*}\pi_n^*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_x \otimes \mathcal{F}_x = (\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\mathbb{P}^1(\mathcal{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n)}/\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes \mathcal{F}_x$$

である．これと 5.2 節 viii)，命題 5.29 より，次の命題が得られる：

命題 5.32

${}^{s}\mathcal{H}_\ell$ は写像 $f\colon F_\mathfrak{p}^\times \times B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}}) \longrightarrow \iota^{-1}\mathbf{St}\otimes \overline{W}_\ell$ で条件

$$g\in \overline{B}^\times(F),\ a\in F_\mathfrak{p}^\times,\ b\in B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}}) \text{ に対し } f\bigl((\mathrm{Nrd}\, g_\mathfrak{p})a, g^\mathfrak{p} b\bigr) = \bigl(1\otimes \overline{\xi}_\ell(g)\bigr) f(a,b)$$

を満たすもの全体のなす $B^\times(\mathbb{A}_F^\infty)\times W_{F_\mathfrak{p}}$ 加群の $B^\times(\mathbb{A}_F^\infty)$ スムーズ部分と同型である（$g\in B^\times(\mathbb{A}_F^\infty)$ の f への作用は $(gf)(a,b)=(g_\mathfrak{p}\otimes 1)f(a,bg^{\infty,\mathfrak{p}})$ で定める）.

この命題から，5.3.2 節と同様にして次の $B^\times(\mathbb{A}_F^\infty)$ 加群の同型が得られる（$f\colon F_\mathfrak{p}^\times \times B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}}) \longrightarrow \mathbf{St}\otimes\overline{W}_\mathbb{C}$ に $\phi\colon \overline{B}^\times(\mathbb{A}_F^\infty) \longrightarrow \mathbf{St}\otimes\overline{W}_\mathbb{C};\ b\longmapsto f(\mathrm{Nrd}\, b_\mathfrak{p}, b^\mathfrak{p})$ を対応させる）：

$$\iota^{-1}({}^{s}\mathcal{H}_\ell) \cong \bigoplus_{\substack{\overline{\Pi}_{\tau_i}\cong \overline{D}_{k_i,w}\\ \dim \overline{\Pi}_\mathfrak{p}=1}} \overline{\Pi}^{\infty,\mathfrak{p}}\otimes(\overline{\Pi}_\mathfrak{p}\otimes\mathbf{St}).$$

さらに合同関係式から，$B^\times(\mathbb{A}_F^\infty)\times W_{F_\mathfrak{p}}^{\mathrm{ab}}$ 加群としては次の同型がある：

$$\iota^{-1}({}^{s}\mathcal{H}_\ell) \cong \bigoplus_{\substack{\overline{\Pi}_{\tau_i}\cong \overline{D}_{k_i,w}\\ \dim \overline{\Pi}_\mathfrak{p}=1}} \overline{\Pi}^{\infty,\mathfrak{p}}\otimes(\overline{\Pi}_\mathfrak{p}\otimes\mathbf{St})\otimes \mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}} \overline{\Pi}_\mathfrak{p}^\vee.$$

これを大域 Jacquet-Langlands 対応を用いて書き直すと次のようになる（例 4.3 参照）：

$$\iota^{-1}({}^{s}\mathcal{H}_\ell) \cong \bigoplus_{\substack{\Pi\,:\,(\mathrm{CH})_B\\ \Pi_\mathfrak{p}=(\chi\circ\det)\otimes\mathbf{St}}} \Pi^\infty\otimes\mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}}\chi^{-1}.$$

以上より次の命題を得る：

命題 5.33

${}^{s}R'_\ell(\Pi)\neq 0$ ならば $\Pi_\mathfrak{p}$ はスペシャル表現である．さらにこのとき $\Pi_\mathfrak{p}=(\chi\circ\det)\otimes\mathbf{St}$ と書くと次の等式が成り立つ：

$$\mathrm{WD}\bigl({}^{s}R'_\ell(\Pi)\bigr) = \mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}}\chi^{-1}.$$

この命題と命題 5.31 より，$\Pi_\mathfrak{p}$ が主系列表現ならば ${}^{v}R'_\ell(\Pi) = {}^{s}R'_\ell(\Pi) = 0$ となるので $\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} {}^{n}R'_\ell(\Pi) = 2$ であることが分かる．したがって仮定 5.19 が満たされるので，命題 5.20 および系 5.21 より次が結論される：

系 5.34

$\Pi_\mathfrak{p}$ の中心指標を $\chi_{\Pi_\mathfrak{p}}$ とすると，次が成り立つ：

$$\mathrm{WD}\bigl(\det R'_\ell(\Pi)|_{W_{F_\mathfrak{p}}}\bigr) = \mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}}(\chi_{\Pi_\mathfrak{p}}^{-1}|\ |_\mathfrak{p}^{-1}).$$

系 5.35
$\Pi_{\mathfrak{p}}$ が主系列表現であることと ${}^{n}R'_{\ell}(\Pi) \neq 0$ は同値であり，このとき $\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} {}^{n}R'_{\ell}(\Pi) = 2$ である．さらにこのとき，$\mathrm{WD}({}^{n}R'_{\ell}(\Pi)) = \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(|\det|^{-1/2} \otimes \Pi_{\mathfrak{p}}^{\vee})$ となる．

命題 5.33 と系 5.34 より次が分かる：

系 5.36
$\Pi_{\mathfrak{p}} = (\chi \circ \det) \otimes \mathbf{St}$ がスペシャル表現であるとき，$\mathrm{WD}({}^{v}R'_{\ell}(\Pi)) = \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(\chi^{-1}|\ |_{\mathfrak{p}}^{-1})$ となる．したがって，$\mathrm{WD}(R'_{\ell}(\Pi)|_{W_{F_{\mathfrak{p}}}})^{\mathrm{ss}} = \mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(|\det|^{-1/2} \otimes \Pi_{\mathfrak{p}}^{\vee})^{\mathrm{ss}}$ が成り立つ．

5.4 モノドロミー作用素

定理 4.1 の証明を完成させるには，$\Pi_{\mathfrak{p}}$ がスペシャル表現であるときに $\mathrm{WD}(R'_{\ell}(\Pi)|_{W_{F_{\mathfrak{p}}}})^{F\text{-ss}}$ と $\mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(|\det|^{-1/2} \otimes \Pi_{\mathfrak{p}}^{\vee})$ のモノドロミー作用素 N が一致することを証明すればよい．$\mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}(|\det|^{-1/2} \otimes \Pi_{\mathfrak{p}}^{\vee})$ のモノドロミー作用素は 0 ではないから，$\mathrm{WD}(R'_{\ell}(\Pi)|_{W_{F_{\mathfrak{p}}}})^{F\text{-ss}}$ のモノドロミー作用素が 0 でないことを示せばよい（例 1.17 参照）．これを証明するために，まず Weil-Deligne 表現が純であるという概念を導入する：

定義 5.37 （[TY]）
$\#\kappa = q$ とおく．(r, V, N) を $F_{\mathfrak{p}}$ 上の Weil-Deligne 表現とする．

i) (r, V, N) が**強い意味で純（重さ k）**$(k \in \mathbb{R})$ であるとは，ある Frobenius 元 $\varphi \in W_{F_{\mathfrak{p}}}$ に対し $r(\varphi)$ の固有値が代数的数であり，その全ての共役元の複素絶対値が $q^{k/2}$ であることをいう．（このとき，任意の元 $\sigma \in W_{F_{\mathfrak{p}}}$ に対し $r(\sigma)$ の固有値は代数的数であり，その全ての共役元の複素絶対値は $q^{n(\sigma)k/2}$ となる．）

ii) (r, V, N) が**混**であるとは，$\mathbb{R}$ で添字付けられた増大フィルトレーション $\mathrm{Fil}_{\bullet}^{W}$（**重さフィルトレーション**）が存在して，$\mathrm{gr}_i^W V := \mathrm{Fil}_i^W V / \mathrm{Fil}_{i-}^W V$ ($\mathrm{Fil}_{i-}^W V = \bigcup_{j<i} \mathrm{Fil}_j^W V$) が強い意味で純（重さ i）となることをいう．（このような $\mathrm{Fil}_{\bullet}^{W}$ は唯一であり，$N(\mathrm{Fil}_i^W V) \subset \mathrm{Fil}_{i-2}^W V$ となる．また，$\mathrm{gr}_i^W V \neq 0$ となる i の集合を (r, V, N) の**重さ**と呼ぶ．）

iii) (r, V, N) が**純（重さ k）** $(k \in \mathbb{R})$ であるとは，(r, V, N) が混であり，その重さが $k + \mathbb{Z}$ に含まれ，かつ任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対し $N^i\colon \mathrm{gr}_{k+i}^W V \longrightarrow \mathrm{gr}_{k-i}^W V$ が同型になることをいう．ある $k \in \mathbb{Z}$ に対し (r, V, N) が純（重さ k）となるとき，(r, V, N) は**純**であるという．

$W_{F_{\mathfrak{p}}}$ の ℓ 進表現 ρ が純であるとは，$\mathrm{WD}(\rho)$ が純であることとする．他の用語も同様に定める．

注意 5.38

i) (r,V,N) が純（重さ w）ならばその直和成分も純（重さ w）である.

ii) (r,V,N), (r',V',N') が純（重さ w）ならばその直和も純（重さ w）である.

iii) (r,V,N) を $W_{F_\mathfrak{p}}$ の Weil-Deligne 表現とし, L を $F_\mathfrak{p}$ の有限次拡大とするとき, (r,V,N) が純（重さ w）であることと $(r,V,N)|_{W_L}$ が純（重さ w）であることは同値である.

ここでの目標は次の定理である：

定理 5.39
$n \geq 0$ を整数とし, $K^\mathfrak{p} \subset B^\times(\mathbb{A}_F^{\infty,\mathfrak{p}})$ をコンパクト開部分群とする. このとき, $W_{F_\mathfrak{p}}$ の ℓ 進表現 $H^1(M_{n,K^\mathfrak{p}} \otimes_F \overline{F}_\mathfrak{p}, \mathcal{F})$ は純である.

注意 5.40
上記のような定理を「$M_{n,K^\mathfrak{p}}, \mathcal{F}$ に対してウェイト・モノドロミー予想が成り立つ」などと表現することがある. なお, 本来のウェイト・モノドロミー予想は, $F_\mathfrak{p}$ 上の固有かつ滑らかなスキーム X に対し $W_{F_\mathfrak{p}}$ の ℓ 進表現 $H^w(X \otimes_{F_\mathfrak{p}} \overline{F}_\mathfrak{p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ が純（重さ w）であることを予想するものである（現在においても未解決である).

定理 5.39 の証明のポイントとなるのが次の 2 つの命題である：

命題 5.41
C を $\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}} \overline{\otimes}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}} \overline{\kappa}$ の既約成分とする. $\pi\colon \widetilde{C} \longrightarrow C$ を既約曲線の間の有限かつ支配的な射とするとき, $\underline{k} = (2,\ldots,2)$ ならば $\pi^*(\mathcal{F}|_C)$ は定数層であり, $\underline{k} \neq (2,\ldots,2)$ ならば $H^0(\widetilde{C}, \pi^*(\mathcal{F}|_C)) = H^2(\widetilde{C}, \pi^*(\mathcal{F}|_C)) = 0$ である.

証明　補題 5.12 の証明において既に得られている. ∎

命題 5.42
$\mathcal{F}|_{\mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}} \overline{\otimes}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}} \kappa}$ は純なスムーズ ℓ 進層である.

略証　底変換で PEL 型の場合に帰着させる. 注意 6.16 参照. ∎

以下簡単のため $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{n,K^\mathfrak{p}} \overline{\otimes}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}} \mathcal{O}_\mathfrak{p}^n$, $V = \mathcal{O}_\mathfrak{p}^n$, $L = F_\mathfrak{p}^n$ とおく. 5.2 節における整モデルの性質 v) にあるように $\mathbf{M}$ の特殊ファイバーの既約成分は $\mathbb{P}^1$ ではない（$K^\mathfrak{p}$ を縮めると非自明なエタール被覆が得られる）から, 曲線の半安定還元定理より,

- L の有限次拡大体 L',
- L' の整数環 V' 上の強半安定スキーム $\mathbf{X}$,

- 固有射 $\pi\colon \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{M} \otimes_V V'$ であって $\pi \otimes_{V'} L'$ が同型となるもの

が存在する．ここで V' 上の有限型分離スキームが $\mathbf{X}$ が半安定であるとは，$\mathbf{X}$ の特殊ファイバー上の各点のエタール近傍が $\operatorname{Spec} V'[T_1, \dots, T_n]/(T_1 \cdots T_r - \varpi')$（$0 \le r \le n$, ϖ' は V' の素元）の $(0, \dots, 0)$ におけるエタール近傍と同型になることをいう．さらに $\mathbf{X}$ の特殊ファイバーの既約成分が全て V' の剰余体上滑らかであるとき，$\mathbf{X}$ は強半安定であるといわれる．

$D_1, \dots, D_m$ を $\mathbf{X} \otimes_{V'} \overline{\kappa}$ の既約成分とし，$D^{(0)} = \coprod_{1 \le i \le m} D_i$, $D^{(1)} = \coprod_{1 \le i < j \le m} D_i \cap D_j$ とおく．また，$t_\ell\colon I_{L'} \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$ で $\mathbb{Z}_\ell(1)$ の位相的生成元にうつるような $I_{L'}$ の元 σ を固定する（このとき Tate 捻りの自明化 $\mathbb{Z}_\ell(1) \cong \mathbb{Z}_\ell$ も固定されることに注意）．このとき，$\sigma - 1$ の作用に関する偏屈層 $R\psi\mathcal{F}$ のモノドロミーフィルトレーションを用いて $G_{L'}$ の作用と可換な次のスペクトル系列を構成することができる（構成については [Sa3] を参照）：

$$E_1^{s,t} = \bigoplus_{i \ge \max\{0,-s\}} H^{t-2i}\bigl(D^{(s+2i)}, \mathcal{F}(-i)\bigr) \Longrightarrow H^{s+t}(\mathbf{X} \otimes_{V'} \overline{L}, \mathcal{F}).$$

E_1 項は下のような形をしている（下行が $t = 0$ の行，中央列が $s = 0$ の列．係数 $\mathcal{F}$ は省略している）：

$$\begin{array}{lll} H^0(D^{(1)})(-1) \xrightarrow{\mathrm{Gys}} & H^2(D^{(0)}) & \\ & H^1(D^{(0)}) & \\ & H^0(D^{(0)}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} & H^0(D^{(1)}). \end{array}$$

なお，Gys は $H^0(D_i \cap D_j)(-1) \xrightarrow{-\mathrm{Gys}_i \oplus \mathrm{Gys}_j} H^2(D_i) \oplus H^2(D_j) \hookrightarrow H^2(D^{(0)})$（$\mathrm{Gys}_i$, Gys_j はそれぞれ $D_i \cap D_j \hookrightarrow D_i$, $D_i \cap D_j \hookrightarrow D_j$ に対応する Gysin 準同型）の (i, j) に関する直和であり，Res は $H^0(D^{(1)}) \twoheadrightarrow H^0(D_i) \oplus H^0(D_j) \xrightarrow{-\mathrm{Res}_i \oplus \mathrm{Res}_j} H^0(D_i \cap D_j)$（$\mathrm{Res}_i$, Res_j はそれぞれ $D_i \cap D_j \hookrightarrow D_i$, $D_i \cap D_j \hookrightarrow D_j$ に対応する制限準同型）の (i, j) に関する直積である．この形より，このスペクトル系列は E_2 項で退化することが分かる．

さらに，収束先 $H^{s+t}(\mathbf{X} \otimes_{V'} \overline{L}, \mathcal{F})$ にモノドロミー作用素 N を誘導するスペクトル系列の射 $\{E_r^{s,t}\} \longrightarrow \{E_r^{s+2,t-2}\}$ がある．E_1 項へのモノドロミー作用のうち唯一非自明な射 $E_1^{-1,2} \longrightarrow E_1^{1,0}$ は与えられた Tate 捻りの自明化のもとで恒等写像となる．

命題 5.42 より $\mathcal{F}|_{D^{(i)}}$ は純なスムーズ ℓ 進層であるが，その重さを w とおくと，$H^0(D^{(1)}, \mathcal{F})$, $H^1(D^{(0)}, \mathcal{F})$ は強い意味で純（それぞれ重さ w, $w+1$）である（Deligne の純性定理）．よってこのスペクトル系列が $H^1(\mathbf{X} \otimes_{V'} \overline{L}, \mathcal{F})$ に誘導するフィルトレーションは重さフィルトレーションとなる．このため，このスペクトル系列は**重さスペクトル系列**と呼ばれている．

重さスペクトル系列について次が成り立つ：

命題 5.43
E_2 項のモノドロミー作用

$$E_2^{-1,2} = \operatorname{Ker}\bigl(H^0(D^{(1)})(-1) \xrightarrow{\mathrm{Gys}} H^2(D^{(0)})\bigr) \longrightarrow \operatorname{Coker}\bigl(H^0(D^{(0)}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^0(D^{(1)})\bigr) = E_2^{1,0}$$

は同型である．

証明　Tate 捻りは省略する．

まず $\underline{k} \neq (2,\dots,2)$ の場合を考える．$\pi\colon D_i \longrightarrow \mathbf{M} \otimes_V \overline{\kappa}$ の像が一点となるような i の集合を I とおく ($I \subset \{1,\dots,m\}$)．このとき，D_i ($i \in I$) 上で $\mathcal{F}$ は定数層 W_ℓ である．これと命題 5.41 より，

$$\begin{aligned} H^0(D^{(0)},\mathcal{F}) &= \bigoplus_{i\in I} H^0(D_i, W_\ell) \cong \mathbb{Q}^I \otimes_{\mathbb{Q}} W_\ell, \\ H^2(D^{(0)},\mathcal{F}) &= \bigoplus_{i\in I} H^2(D_i, W_\ell) \cong \mathbb{Q}^I \otimes_{\mathbb{Q}} W_\ell \end{aligned}$$

である．また, $\mathbf{X}\otimes_{V'}\overline{\kappa}$ の特異点全体の集合を J とおき, $j \in J$ に対し j_1, j_2 を $j \in D_{j_1} \cap D_{j_2}$ かつ $1 \le j_1 < j_2 \le m$ を満たす整数とする．このとき $H^0(D^{(1)},\mathcal{F}) \cong \mathbb{Q}^J \otimes_{\mathbb{Q}} W_\ell$ であり，上の同型と合わせて

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\bigl(H^0(D^{(1)})(-1) \xrightarrow{\mathrm{Gys}} H^2(D^{(0)})\bigr) &\cong \operatorname{Ker}\bigl(\mathbb{Q}^J \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q}^I\bigr) \otimes_{\mathbb{Q}} W_\ell, \\ \operatorname{Coker}\bigl(H^0(D^{(0)}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^0(D^{(1)})\bigr) &\cong \operatorname{Coker}\bigl(\mathbb{Q}^I \xrightarrow{\beta} \mathbb{Q}^J\bigr) \otimes_{\mathbb{Q}} W_\ell \end{aligned}$$

が得られる．ここで，α は $f\colon J \longrightarrow \mathbb{Q}$ を $i \longmapsto \sum_{j\in J, j_2=i} f(j) - \sum_{j \in J, j_1 = i} f(j)$ に対応させる $\mathbb{Q}$ 線型写像であり，β は $g\colon I \longrightarrow \mathbb{Q}$ を $j \longmapsto -g(j_1) + g(j_2)$（$g$ は I の外では 0 として $\{1,\dots,m\}$ 全体に延長しておく）に対応させる $\mathbb{Q}$ 線型写像である．

したがって，自然な線型写像 $\operatorname{Ker}\alpha \longrightarrow \operatorname{Coker}\beta$ が同型であることを示せばよい．このためには，$\operatorname{Ker}\alpha, \operatorname{Im}\beta \subset \mathbb{Q}^J$ が $\mathbb{Q}^J$ の標準内積によって直交することを示せばよい ($\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Ker}\alpha = \dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Coker}\beta$ に注意)．$f \in \operatorname{Ker}\alpha$, $g \in \mathbb{Q}^I$（上と同様 $g\colon \{1,\dots,m\} \longrightarrow \mathbb{Q}$ とみなす）とすると，

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle &= \sum_{j\in J} f(j)\bigl(-g(j_1) + g(j_2)\bigr) = \sum_{1\le i\le m}\sum_{j\in J, j_2=i} f(j)g(i) - \sum_{1\le i\le m}\sum_{j\in J, j_1=i} f(j)g(i) \\ &= \sum_{1\le i\le m} g(i)\Bigl(\sum_{j\in J, j_2=i} f(j) - \sum_{j\in J, j_1=i} f(j)\Bigr) = \sum_{1\le i\le m} g(i)(\alpha f)(i) = 0 \end{aligned}$$

となるのでよい．

$\underline{k} = (2,\dots,2)$ の場合は $I = \{1,\dots,m\}$ として全く同様の議論を行えばよい．∎

この命題より容易に定理 5.39 が導かれる：

定理 5.39 の証明　命題 5.43 より，$H^1(\mathbf{X}\otimes_{V'}\overline{L},\mathcal{F})$ は $W_{L'}$ の表現として純であることが分かる．したがって，注意 5.38 から W_L の表現 $H^1(\mathbf{M}\otimes_V\overline{L},\mathcal{F})$ も純である（$H^1(\mathbf{M}\otimes_V\overline{L},\mathcal{F})|_{W_{L'}}\cong H^1(\mathbf{X}\otimes_{V'}\overline{L},\mathcal{F})$ に注意）．W_L の表現として $H^1(M_{n,K^{\mathfrak{p}}}\otimes_F\overline{F}_{\mathfrak{p}},\mathcal{F})|_{W_L}\cong H^1(\mathbf{M}\otimes_V\overline{L},\mathcal{F})$ であるから，再び注意 5.38 より，W_L の表現 $H^1(M_{n,K^{\mathfrak{p}}}\otimes_F\overline{F}_{\mathfrak{p}},\mathcal{F})$ も純である．これが示したいことであった．∎

系 5.44
Π を $G(\mathbb{A})$ の保型表現で条件 $(\mathrm{CH})_B$ を満たすものとするとき，$R'_\ell(\Pi)|_{W_{F_{\mathfrak{p}}}}$ は純である．特に，$\Pi_{\mathfrak{p}}$ がスペシャル表現であるとき，$\mathrm{WD}(R'_\ell(\Pi)|_{W_{F_{\mathfrak{p}}}})$ のモノドロミー作用素 N は 0 ではない．

証明　まず前半を示す．整数 $n\geq 1$ およびコンパクト開部分群 $K^{\mathfrak{p}}\subset G(\mathbb{A}^{\infty,\mathfrak{p}})$ を十分小さくとると $\mathcal{H}_\ell^{K^n_{\mathfrak{p}}K^{\mathfrak{p}}}=H^1(M_{n,K^{\mathfrak{p}}}\otimes_F\overline{F},\mathcal{F})$ であるから，特に $(\Pi^\infty)^{K^n_{\mathfrak{p}}K^{\mathfrak{p}}}\neq 0$ となるように n, $K^{\mathfrak{p}}$ を選んでおくと $R'_\ell(\Pi)$ は $H^1(M_{n,K^{\mathfrak{p}}}\otimes_F\overline{F},\mathcal{F})$ の直和成分である．したがって定理 5.39 と注意 5.38 より $R'_\ell(\Pi)$ は純となる．

後半を示す．$\Pi_{\mathfrak{p}}=(\chi\circ\det)\otimes\mathbf{St}$ がスペシャル表現であるとき，${}^sR'_\ell(\Pi)=\mathrm{rec}_{\mathfrak{p}}\,\chi^{-1}$, ${}^vR'_\ell(\Pi)=\mathrm{rec}_{\mathfrak{p}}(\chi^{-1}|\ |_{F_{\mathfrak{p}}}^{-1})$ であり，完全列 $0\longrightarrow {}^sR'_\ell(\Pi)\longrightarrow R'_\ell(\Pi)\longrightarrow {}^vR'_\ell(\Pi)\longrightarrow 0$ が存在する．ここで Frobenius 元 $\mathrm{Art}_{F_{\mathfrak{p}}}(\varpi)$（$\varpi$ は $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ の素元）の ${}^sR'_\ell(\Pi)$ における固有値は $\chi(\varpi)$ の逆数であるから，定理 5.39 より $\chi(\varpi)$ は代数的数であり，その全ての共役元の複素絶対値は等しいことが分かる．よって $w'=-2\log_q|\chi(\varpi)|$ とおくと，$\mathrm{WD}({}^sR'_\ell(\Pi))$, $\mathrm{WD}({}^vR'_\ell(\Pi))$ は強い意味で純（重さ w', $w'+2$）であり，$\mathrm{WD}(R'_\ell(\Pi)|_{W_{F_{\mathfrak{p}}}})$ の重さフィルトレーション $\mathrm{Fil}^W_\bullet$ は次で与えられる：

$$\mathrm{Fil}^W_i\,\mathrm{WD}\bigl(R'_\ell(\Pi)|_{W_{F_{\mathfrak{p}}}}\bigr)=\begin{cases}0 & (i<w'),\\ \mathrm{WD}\bigl({}^sR'_\ell(\Pi)\bigr) & (w'\leq i<w'+2),\\ \mathrm{WD}\bigl(R'_\ell(\Pi)|_{W_{F_{\mathfrak{p}}}}\bigr) & (i\geq w'+2).\end{cases}$$

$\mathrm{WD}(R'_\ell(\Pi)|_{W_{F_{\mathfrak{p}}}})$ は純なので $N\colon\ \mathrm{Gr}^W_{w'+2}\mathrm{WD}(R'_\ell(\Pi)|_{W_{F_{\mathfrak{p}}}})\longrightarrow\mathrm{Gr}^W_{w'}\mathrm{WD}(R'_\ell(\Pi)|_{W_{F_{\mathfrak{p}}}})$ は同型であるから，特に $N\neq 0$ である．∎

以上で定理 3.1 のうち $\mathfrak{p}$ が ℓ を割らない場合が証明された．

注意 5.45
系 5.44 の後半は次のようにして証明することもできる．

$\Pi_{\mathfrak{p}}$ がスペシャル表現であるとき，$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}{}^sR'_\ell(\Pi)=\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}{}^vR'_\ell(\Pi)=1$ であり，N は冪零であるから ${}^sR'_\ell(\Pi)$ 上 0 である．よってモノドロミー作用素 N は $N\colon R'_\ell(\Pi)\longrightarrow {}^sR'_\ell(\Pi)$ を誘導する．これが 0 でないことを示せばよい．

曲線の極小モデルの理論より，以前とった $\pi\colon\mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{M}\otimes_V V'$ は $S_{n,K^{\mathfrak{p}}}\subset\mathbf{M}\otimes_V\overline{\kappa}$ の

外で同型であるようにとることができる．このとき，次の可換図式がある：

$$\begin{array}{ccc}
H^1(\mathbf{M}\otimes_V \overline{L},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\quad N \quad} & \bigoplus_{x\in S_{n,K^{\mathfrak{p}}}} \mathcal{G}_x \\
\downarrow{\scriptstyle \pi^*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi^*} \\
H^1(\mathbf{X}\otimes_{V'} \overline{L},\mathcal{F}) & \xrightarrow{N} & \mathrm{Coker}\bigl(H^0(D^{(0)}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^0(D^{(1)})\bigr).
\end{array}$$

明らかに左の縦矢印は同型である．命題 5.43 より下の横矢印は全射である．また，$\pi_*\pi^*\mathcal{F}\cong\mathcal{F}$ となり，このことから右の縦矢印の単射性が導かれる．したがって右の縦矢印は同型となり，上の横矢印の全射性が分かる．あとは以前の証明と同様 $(\Pi^\infty)^{K_{\mathfrak{p}}^n K^{\mathfrak{p}}}\neq 0$ となるように n, $K^{\mathfrak{p}}$ をとり，$N\colon H^1(\mathbf{M}\otimes_V \overline{L},\mathcal{F})\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \bigoplus_{x\in S_{n,K^{\mathfrak{p}}}}\mathcal{G}_x$ の $(\Pi^\infty)^{K_{\mathfrak{p}}^n K^{\mathfrak{p}}}$-isotypic 部分をとれば $N\colon R'_\ell(\Pi)\longrightarrow {}^sR'_\ell(\Pi)$ の全射性が従う．

この方法には命題 5.42 を用いなくてもよいというメリットがあるが，特殊ファイバーについてより細かい吟味を必要とするため，高次元化が難しいというデメリットもある．高次元志村多様体を用いた局所・大域整合性（特に本小節に対応する部分）については，[TY] を参照されたい．

5.5 補足：非可換 Lubin-Tate 理論

定理 4.5 と命題 5.31，命題 5.33，系 5.36 より，定義 5.26 で導入した表現 $\mathcal{U}_\ell$ について次が分かったことになる：

定理 5.46（GL_2 **の非可換 Lubin-Tate 理論**）

π を $\mathrm{GL}_2(F_{\mathfrak{p}})$ の離散系列表現とするとき，π に局所 Langlands 対応により対応する $W_{F_{\mathfrak{p}}}$ の ℓ 進表現を $\mathrm{LL}(\pi)$ と書く（つまり $\mathrm{LL}(\pi)$ は $\mathrm{WD}(\mathrm{LL}(\pi))=\mathrm{rec}_{F_{\mathfrak{p}}}\pi$ となる ℓ 進表現である．$\mathrm{LL}(\pi)$ は ι に依存する）．$\mathrm{LL}(\pi)$ の既約商は唯一なので，それを $\mathrm{LL}'(\pi)$ と書く．また，π に局所 Jacquet-Langlands 対応により対応する $\overline{B}_{\mathfrak{p}}^\times$ の既約認容表現を $\mathrm{LJ}(\pi)$ と書く．このとき，次が成り立つ：

$$\mathcal{U}_\ell\bigl(\iota\,\mathrm{LJ}(\pi)^\vee\bigr)=\iota(\pi)\otimes\mathrm{LL}'(|\det|^{-1/2}\otimes\pi^\vee).$$

また，π が離散系列表現でないときは $\mathcal{U}_\ell(\iota(\pi))=0$ となる．

特に，π が既約表現の場合には $\mathcal{U}_\ell(\iota\,\mathrm{LJ}(\pi)^\vee)=\iota(\pi)\otimes\mathrm{LL}(|\det|^{-1/2}\otimes\pi^\vee)$ となる．これは次のように見ることができる：

> 超尖点表現に関しては，局所 Langlands 対応および局所 Jacquet-Langlands 対応は $\mathcal{U}_\ell$ という純局所的かつ幾何的に構成された表現の中に実現される．

現在では，上の定理と全く同様のことが GL_d の場合に証明されている（混標数の場合は Harris-Taylor ([HT])，等標数の場合は Boyer ([Bo1]) による）．また，[Bo2] では Lubin-Tate 塔のコホモロジーと局所 Langlands 対応の関係についてさらに詳しく調べている（離

散系列表現を含む既約認容表現のクラスである「楕円的表現」を用いて Lubin-Tate 塔の $R\Gamma$ を完全に記述している）.

6　主定理の証明 (3)—$\mathfrak{p}$ が ℓ を割る場合

以下では $\mathfrak{p}$ が ℓ を割る場合を考える．気分を出すために，以下では ℓ を p と書き，改めて p と異なる素数 ℓ を一つとり固定する．また，同型 $\iota\colon \mathbb{C} \cong \overline{\mathbb{Q}}_p$ および $\iota'\colon \mathbb{C} \cong \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を固定する．

6.1　いくつかの帰着

まず，主定理を導くためには次を証明すれば十分であることに注意する：

定理 6.1
Π を条件 (CH) および (DS) を満たす $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現とするとき，次が成り立つ（$R_p(\Pi)$, $R_\ell(\Pi)$ に ι, ι' を明示している）：

$$\iota^{-1}\,\mathrm{WD}\bigl(R_{p,\iota}(\Pi)|_{G_{F_\mathfrak{p}}}\bigr)^{F\text{-ss}} \cong \iota'^{-1}\,\mathrm{WD}\bigl(R_{\ell,\iota'}(\Pi)|_{G_{F_\mathfrak{p}}}\bigr)^{F\text{-ss}}.$$

実際，定理 4.5 より右辺は $\mathrm{rec}_{F_\mathfrak{p}}(|\det|^{-1/2}\otimes\Pi_\mathfrak{p}^\vee)$ と一致するのでよい．

さらに 4.4 節と同様の議論により，定理 6.1 を証明するためには d が奇数か，または d が偶数かつ $\mathrm{DS}(\Pi)\setminus\{\mathfrak{p}\}\neq\varnothing$ の場合のみを考えればよいことが分かる．d が偶数のときは $v\in\mathrm{DS}(\Pi)\setminus\{\mathfrak{p}\}$ を固定し，以前と同様に F 上の四元数環 B をとると，R_p, R_ℓ の構成方法より，定理 6.1 は次に帰着される：

定理 6.2
Π を条件 $(\mathrm{CH})_B$ を満たす $G(\mathbb{A})$ の保型表現とするとき，次が成り立つ：

$$\iota^{-1}\,\mathrm{WD}\bigl(R'_{p,\iota}(\Pi)|_{G_{F_\mathfrak{p}}}\bigr)^{F\text{-ss}} \cong \iota'^{-1}\,\mathrm{WD}\bigl(R'_{\ell,\iota'}(\Pi)|_{G_{F_\mathfrak{p}}}\bigr)^{F\text{-ss}}.$$

さらに，命題 1.26 と注意 1.17，および系 5.44 とその証明から，定理 6.2 は次に帰着される：

定理 6.3
Π を条件 $(\mathrm{CH})_B$ を満たす $G(\mathbb{A})$ の保型表現とするとき，次が成り立つ：

i) $\sigma\in W^+_{F_\mathfrak{p}}$ に対し，$\iota^{-1}(\mathrm{Tr}(\sigma;\mathrm{WD}(R'_{p,\iota}(\Pi)|_{G_{F_\mathfrak{p}}}))) = \iota'^{-1}(\mathrm{Tr}(\sigma;\mathrm{WD}(R'_{\ell,\iota'}(\Pi)|_{G_{F_\mathfrak{p}}})))$ となる．

ii) $\mathrm{WD}(R'_{p,\iota}(\Pi)|_{G_{F_{\mathfrak{p}}}})$ は純である．

条件 $(\mathrm{CH})_B$ を満たす $G(\mathbb{A})$ の保型表現 Π を一つ固定する．$K \subset G(\mathbb{A}^\infty)$ を $(\Pi^\infty)^K \neq 0$ となるコンパクト開部分群とし，$\mathscr{H}_K(G(\mathbb{A}^\infty), \mathbb{C})$ を Hecke 環（$G(\mathbb{A}^\infty)$ 上のコンパクト台 $\mathbb{C}$ 値局所定数関数で両側 K 不変なもの全体．畳み込みにより積を定義する）とする．$G(\mathbb{A}^\infty)$ のスムーズ表現 π に対し，$f \in \mathscr{H}_K(G(\mathbb{A}^\infty), \mathbb{C})$ の π^K への作用が $x \longmapsto \int_G f(g)\pi(g)(x)\,dg$ により定まる．このとき，$f_\Pi \in \mathscr{H}_K(G(\mathbb{A}^\infty), \mathbb{C})$ で次を満たすものが存在する：$G(\mathbb{A}^\infty)$ の既約スムーズ表現 π に対し，$\pi \cong \Pi^\infty$ ならば f_Π は π^K に恒等写像として作用し，$\pi \not\cong \Pi^\infty$ ならば f_Π は π^K に 0 で作用する．

一方，両側剰余類 KgK $(g \in G(\mathbb{A}^\infty))$ に対して M_K 上の代数的対応 $M_{K\cap gKg^{-1}} \xrightarrow{\mathrm{pr}\times g} M_K \times M_K$ が定まる．これを $[KgK]$ と書くことにする．より一般に，$\mathscr{H}_K(G(\mathbb{A}^\infty), \mathbb{C})$ の元 $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{Kg_iK}$（$a_i \in \mathbb{C}$, $g_i \in G(\mathbb{A}^\infty)$，$\mathbf{1}_{Kg_iK}$ は Kg_iK の特性関数）に対し，M_K 上の代数的対応の $\mathbb{C}$ 係数線型結合 $[f] = \sum_{i=1}^n a_i[Kg_iK]$ を定めることができる．$[f]$ はコホモロジー $H^1(M_K \otimes_F \overline{F}, \mathcal{F}_{K,p})$, $H^1(M_K \otimes_F \overline{F}, \mathcal{F}_{K,\ell})$ にそれぞれ $\sum_{i=1}^n \iota(a_i)[Kg_iK]^*$, $\sum_{i=1}^n \iota'(a_i)[Kg_iK]^*$ で作用する（$[KgK]^*$ $(g \in G(\mathbb{A}^\infty))$ は自然な射影 $M_{K\cap gKg^{-1}} \longrightarrow M_K$ による引き戻しと g の作用 $M_{K\cap gKg^{-1}} \xrightarrow{g} M_K$ による押し出しの合成）．この作用をそれぞれ $[f]_\iota^*, [f]_{\iota'}^*$ と書く．これらが $\iota^{-1}(\mathcal{H}_p^K)$ および $\iota'^{-1}(\mathcal{H}_\ell^K)$ への $f \in \mathscr{H}_K(G, \mathbb{C})$ の作用と一致することは明らかであろう．特に，$[f_\Pi]_\iota^*$ は $H^1(M_K \otimes_F \overline{F}, \mathcal{F}_{K,p})$ から $\iota(\Pi^\infty)^K \otimes R'_{p,\iota}(\Pi)$ への射影子を，$[f_\Pi]_{\iota'}^*$ は $H^1(M_K \otimes_F \overline{F}, \mathcal{F}_{K,\ell})$ から $\iota'(\Pi^\infty)^K \otimes R'_{\ell,\iota'}(\Pi)$ への射影子を与える．したがって $\sigma \in W_{F_{\mathfrak{p}}}$ に対し次が成り立つ：

$$\dim_{\mathbb{C}}(\Pi^\infty)^K \operatorname{Tr}\bigl(\sigma; \mathrm{WD}(R'_{p,\iota}(\Pi)|_{W_{F_{\mathfrak{p}}}})\bigr) = \operatorname{Tr}\Bigl(\sigma \circ [f_\Pi]_\iota^*; \mathrm{WD}\bigl(H^1(M_K \otimes_F \overline{F}, \mathcal{F}_{K,p})\bigr)\Bigr),$$
$$\dim_{\mathbb{C}}(\Pi^\infty)^K \operatorname{Tr}\bigl(\sigma; \mathrm{WD}(R'_{\ell,\iota'}(\Pi)|_{W_{F_{\mathfrak{p}}}})\bigr) = \operatorname{Tr}\Bigl(\sigma \circ [f_\Pi]_{\iota'}^*; \mathrm{WD}\bigl(H^1(M_K \otimes_F \overline{F}, \mathcal{F}_{K,\ell})\bigr)\Bigr).$$

以上の考察から，定理 6.3 は次に帰着される：

定理 6.4

Π を条件 $(\mathrm{CH})_B$ を満たす $G(\mathbb{A})$ の保型表現とすると，次が成り立つ：

i) $\sigma \in W_{F_{\mathfrak{p}}}^+$ および $g \in G(\mathbb{A}^\infty)$ に対し，

$$\begin{aligned}\iota^{-1} &\operatorname{Tr}\Bigl(\sigma \circ [KgK]^*; \mathrm{WD}\bigl(H^1(M_K \otimes_F \overline{F}, \mathcal{F}_{K,p})\bigr)\Bigr)\\ &= \iota'^{-1} \operatorname{Tr}\Bigl(\sigma \circ [KgK]^*; \mathrm{WD}\bigl(H^1(M_K \otimes_F \overline{F}, \mathcal{F}_{K,\ell})\bigr)\Bigr).\end{aligned}$$

ii) $\mathrm{WD}(H^1(M_K \otimes_F \overline{F}, \mathcal{F}_{K,p})|_{W_{F_{\mathfrak{p}}}})$ は純である．

さらに，直接計算により，$i=0,2$ に対して

$$\begin{aligned}&\iota^{-1}\operatorname{Tr}\Bigl(\sigma\circ[KgK]^*;\mathrm{WD}\bigl(H^i(M_K\otimes_F\overline{F},\mathcal{F}_{K,p})\bigr)\Bigr)\\&\quad=\iota'^{-1}\operatorname{Tr}\Bigl(\sigma\circ[KgK]^*;\mathrm{WD}\bigl(H^i(M_K\otimes_F\overline{F},\mathcal{F}_{K,\ell})\bigr)\Bigr)\end{aligned}$$

が成り立つことが証明できる（[Sa1], Claim 2 の直後を参照．$\underline{k}\neq(2,\ldots,2)$ ならば補題 5.12 の証明と同様にして両辺が 0 であることが分かる．$\underline{k}=(2,\ldots,2)$ ならば $\mathcal{F}_{K,p}=\overline{\mathbb{Q}}_p(w/2)$, $\mathcal{F}_{K,\ell}=\overline{\mathbb{Q}}_\ell(w/2)$ なので $i=0$ の場合の計算は容易である．$i=2$ の場合は Poincaré 双対性で $i=0$ に帰着する．）

よって，定理 6.4 は次に帰着される：

定理 6.5

Π を条件 $(\mathrm{CH})_B$ を満たす $G(\mathbb{A})$ の保型表現とすると，次が成り立つ：

i) $\sigma\in W_{F_\mathfrak{p}}^+$ および $g\in G(\mathbb{A}^\infty)$ に対し，

$$\begin{aligned}&\iota^{-1}\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\operatorname{Tr}\Bigl(\sigma\circ[KgK]^*;\mathrm{WD}\bigl(H^i(M_K\otimes_F\overline{F},\mathcal{F}_{K,p})\bigr)\Bigr)\\&\qquad=\iota'^{-1}\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\operatorname{Tr}\Bigl(\sigma\circ[KgK]^*;\mathrm{WD}\bigl(H^i(M_K\otimes_F\overline{F},\mathcal{F}_{K,\ell})\bigr)\Bigr).\end{aligned}$$

ii) $\mathrm{WD}(H^1(M_K\otimes_F\overline{F},\mathcal{F}_{K,p})|_{W_{F_\mathfrak{p}}})$ は純である．

6.2 跡の ℓ 独立性に対する一般的な戦略

定理 6.5 i) のような性質を，跡の **ℓ 独立性**という．ここでは，状況を次のように一般化して考える：

> X を $F_\mathfrak{p}$ 上固有かつ滑らかなスキームとし，$\gamma\colon\Gamma\longrightarrow X\times X$ を X 上の代数的対応で合成 $\gamma_i\colon\Gamma\longrightarrow X\times X\xrightarrow{\mathrm{pr}_i}X$ $(i=1,2)$ が有限エタールであるものとする．$\mathcal{F}_\ell$ を X 上のスムーズ ℓ 進層, $\mathcal{F}_p$ を X 上のスムーズ p 進層とし, γ が $\mathcal{F}_\ell$, $\mathcal{F}_p$ に持ち上がっていると仮定する（つまり，層の準同型 $\gamma_1^*\mathcal{F}_\ell\longrightarrow\gamma_2^!\mathcal{F}_\ell=\gamma_2^*\mathcal{F}_\ell$, $\gamma_1^*\mathcal{F}_p\longrightarrow\gamma_2^!\mathcal{F}_p=\gamma_2^*\mathcal{F}_p$ が与えられているとする）．

本小節では，この状況で

$$\operatorname{Tr}(\sigma\circ\Gamma^*;X,\mathcal{F}_\ell):=\sum_{i=0}^{2\dim X}(-1)^i\operatorname{Tr}\bigl(\sigma\circ\Gamma^*;\mathrm{WD}\bigl(H^i(X\otimes_{F_\mathfrak{p}}\overline{F}_\mathfrak{p},\mathcal{F}_\ell)\bigr)\bigr),$$

$$\operatorname{Tr}(\sigma\circ\Gamma^*;X,\mathcal{F}_p):=\sum_{i=0}^{2\dim X}(-1)^i\operatorname{Tr}\bigl(\sigma\circ\Gamma^*;\mathrm{WD}\bigl(H^i(X\otimes_{F_\mathfrak{p}}\overline{F}_\mathfrak{p},\mathcal{F}_p)\bigr)\bigr),$$

を比較するにはどうすればよいかを説明する．

6.2.1　係数層が自明である場合

まず，$\mathcal{F}_\ell = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, $\mathcal{F}_p = \overline{\mathbb{Q}}_p$（かつ，$\gamma_1^*\mathcal{F}_\ell \longrightarrow \gamma_2^*\mathcal{F}_\ell$, $\gamma_1^*\mathcal{F}_p \longrightarrow \gamma_2^*\mathcal{F}_p$ が恒等写像）である場合を考える．さらに次の仮定をおく：

- $F_\mathfrak{p}$ の有限次 Galois 拡大 L が存在して，$X \otimes_{F_\mathfrak{p}} L$ は L の整数環 V 上強半安定還元を持つ．すなわち V 上固有かつ強半安定なスキーム $\mathfrak{X}$ が存在して，$\mathfrak{X} \otimes_V L = X \otimes_{F_\mathfrak{p}} L$ となる．さらに，$\mathfrak{X} \otimes_V L = X \otimes_{F_\mathfrak{p}} L$ への $G_{F_\mathfrak{p}}$ の作用は $\mathfrak{X}$ 全体に延長される．

- $\gamma\colon \Gamma \longrightarrow X \times X$ は $\mathfrak{X}$ 上に延長される．すなわち，$\gamma'\colon \Gamma' \longrightarrow \mathfrak{X} \times_V \mathfrak{X}$ が存在して，その一般ファイバーは γ の L への底変換と一致し，かつ $\mathrm{pr}_i \circ \gamma'$ はエタールである．

このときには，重さスペクトル系列が有力な道具となる．L の剰余体を κ' とおく．$\mathfrak{X}$ の特殊ファイバーの既約成分を $D_1, \ldots, D_m$ とおき，$I \subset \{1, \ldots, m\}$ に対し $D_I = \bigcap_{i\in I} D_i$ と定める．さらに，整数 $j \geq 0$ に対し，$D^{(j)} = \coprod_{I\subset\{1,\ldots,n\}, \#I=j+1} D_I$ とおく（これらは 5.4 節で用いている記号の一般化となっている．ただ，5.4 節での D_i は幾何学的特殊ファイバーの既約成分なので，ここでの記法に従えば $D_i \otimes_{\kappa'} \overline{\kappa}$ となる）．ℓ 進の場合の重さスペクトル系列は次のような形のスペクトル系列である：

$$E_1^{s,t} = \bigoplus_{i\geq\max\{0,-s\}} H^{t-2i}\bigl(D^{(s+2i)} \otimes_{\kappa'} \overline{\kappa}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-i)\bigr) \Longrightarrow H^{s+t}(X \otimes_{F_\mathfrak{p}} \overline{F}_\mathfrak{p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

重さスペクトル系列への $\sigma \in W_{F_\mathfrak{p}}^+$, Γ の作用を考えることで，$\mathrm{Tr}(\sigma \circ \Gamma^*; X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を幾何学的な量で記述することができる：

命題 6.6
　$\sigma \in W_{F_\mathfrak{p}}^+$ および $j \geq 0$ に対し，$\sigma^*\colon D^{(j)} \otimes_{\kappa'} \overline{\kappa} \longrightarrow D^{(j)} \otimes_{\kappa'} \overline{\kappa}$ を下の図式より誘導される射とする：

$$\begin{tikzcd} D^{(j)} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma^*"] & \mathrm{Spec}\,\kappa' \arrow[d, "\sigma^*"] & \mathrm{Spec}\,\overline{\kappa} \arrow[l] \arrow[d, "\sigma^*"] \\ D^{(j)} \arrow[r] & \mathrm{Spec}\,\kappa' & \mathrm{Spec}\,\overline{\kappa}. \arrow[l] \end{tikzcd}$$

さらに，$\sigma_{\mathrm{geom}}\colon D^{(j)} \otimes_{\kappa'} \overline{\kappa} \longrightarrow D^{(j)} \otimes_{\kappa'} \overline{\kappa}$ を $\sigma_{\mathrm{geom}} = \sigma^* \circ \mathrm{absFrob}^{[\kappa:\mathbb{F}_p]n(\sigma)}$ で定める（absFrob は $D^{(j)} \otimes_{\kappa'} \overline{\kappa}$ の絶対 Frobenius 射）．これは $\overline{\kappa}$ 上の射である．
　また，Γ' は $\mathfrak{X}$ 上エタールであるから V 上強半安定なので，その特殊ファイバーの既約成分を用いて $D^{(j)}$ にあたるものをつくることができる．それを $\Gamma'^{(j)}$ と書くことにする．$\Gamma'^{(j)}$ は $D^{(j)}$ 上の代数的対応 $\gamma^{(j)}\colon \Gamma'^{(j)} \longrightarrow D^{(j)}$ を与える．

このとき，次の等式が成り立つ：

$$\mathrm{Tr}(\sigma\circ\Gamma^*;X,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)=\sum_s\sum_{i\geq\max\{0,-s\}}(-1)^s q^{n(\sigma)i}\bigl(\Gamma'^{(s+2i)}\circ\sigma_{\mathrm{geom}},\Delta_{D^{(s+2i)}}\bigr).$$

ここで，$\Gamma'^{(j)}\circ\sigma_{\mathrm{geom}}$ は代数的対応としての合成，$\Delta_{D^{(j)}}\subset D^{(j)}\times D^{(j)}$ は対角，$(\Gamma'^{(j)}\circ\sigma_{\mathrm{geom}},\Delta_{D^{(j)}})$ はそれらの $D^{(j)}\times D^{(j)}$ 内での交点数である．

特に $\mathrm{Tr}(\sigma\circ\Gamma^*;X,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ は整数である．

証明　まず，一般に ℓ 進表現 ρ および $\sigma\in W_{F_\mathfrak{p}}$ に対し，ρ への σ の作用と $\mathrm{WD}(\rho)$ への σ の作用は冪単自己同型の違いしかないので，任意の $f\in\mathrm{End}(\rho)$ に対し $\mathrm{Tr}(\sigma\circ f;\rho)=\mathrm{Tr}(\sigma\circ f;\mathrm{WD}(\rho))$ が成り立つことに注意する．

$\gamma_1,\gamma_2\colon\Gamma'\longrightarrow\mathfrak{X}$ はエタール射であるから，次のスペクトル系列の射が誘導される：

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{i\geq\max\{0,-s\}}H^{t-2i}\bigl(D^{(s+2i)}\otimes_{\kappa'}\overline{\kappa},\overline{\mathbb{Q}}_\ell(-i)\bigr) & \Longrightarrow & H^{s+t}(X\otimes_{F_\mathfrak{p}}\overline{F}_\mathfrak{p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\\
\downarrow{\scriptstyle\gamma_1^{(s+2i)*}} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_1^*}\\
\bigoplus_{i\geq\max\{0,-s\}}H^{t-2i}\bigl(\Gamma'^{(s+2i)}\otimes_{\kappa'}\overline{\kappa},\overline{\mathbb{Q}}_\ell(-i)\bigr) & \Longrightarrow & H^{s+t}(\Gamma\otimes_{F_\mathfrak{p}}\overline{F}_\mathfrak{p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\\
\downarrow{\scriptstyle\gamma_{2*}^{(s+2i)}} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_{2*}}\\
\bigoplus_{i\geq\max\{0,-s\}}H^{t-2i}\bigl(D^{(s+2i)}\otimes_{\kappa'}\overline{\kappa},\overline{\mathbb{Q}}_\ell(-i)\bigr) & \Longrightarrow & H^{s+t}(X\otimes_{F_\mathfrak{p}}\overline{F}_\mathfrak{p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell).
\end{array}$$

一方，$\sigma\in W^+_{F_\mathfrak{p}}$ は次のスペクトル系列の射を誘導する：

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{i\geq\max\{0,-s\}}H^{t-2i}\bigl(D^{(s+2i)}\otimes_{\kappa'}\overline{\kappa},\overline{\mathbb{Q}}_\ell(-i)\bigr) & \Longrightarrow & H^{s+t}(X\otimes_{F_\mathfrak{p}}\overline{F}_\mathfrak{p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\\
\downarrow{\scriptstyle\sigma_*} & & \downarrow{\scriptstyle\sigma_*}\\
\bigoplus_{i\geq\max\{0,-s\}}H^{t-2i}\bigl(D^{(s+2i)}\otimes_{\kappa'}\overline{\kappa},\overline{\mathbb{Q}}_\ell(-i)\bigr) & \Longrightarrow & H^{s+t}(X\otimes_{F_\mathfrak{p}}\overline{F}_\mathfrak{p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell).
\end{array}$$

また，絶対 Frobenius 射 absFrob は ℓ 進エタールコホモロジーに恒等写像を誘導するので，$H^{t-2i}(D^{(s+2i)}\otimes_{\kappa'}\overline{\kappa},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 上で $\sigma_*=\sigma^*_{\mathrm{geom}}$ である．以上より次が得られる：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(\sigma\circ\Gamma^*;X,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)=\sum_k(-1)^k\,\mathrm{Tr}\bigl(\sigma_*\circ\Gamma^*;H^k(X\otimes_{F_\mathfrak{p}}\overline{F}_\mathfrak{p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\bigr)\\
&=\sum_{s,t}\sum_{i\geq\max\{0,-s\}}(-1)^{s+t}q^{n(\sigma)i}\,\mathrm{Tr}\bigl(\sigma^*_{\mathrm{geom}}\circ\Gamma'^{(s+2i)*};H^{t-2i}(D^{(s+2i)}\otimes_{\kappa'}\overline{\kappa},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\bigr)\\
&=\sum_s\sum_{i\geq\max\{0,-s\}}(-1)^s q^{n(\sigma)i}\sum_t(-1)^{t-2i}\,\mathrm{Tr}\bigl(\sigma^*_{\mathrm{geom}}\circ\Gamma'^{(s+2i)*};H^{t-2i}(D^{(s+2i)}\otimes_{\kappa'}\overline{\kappa},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\bigr).
\end{aligned}$$

これと Lefschetz 跡公式

$$\sum_i(-1)^i\,\mathrm{Tr}\bigl(\sigma^*_{\mathrm{geom}}\circ\Gamma'^{(j)*};H^i(D^{(j)}\otimes_{\kappa'}\overline{\kappa},\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\bigr)=(\Gamma'^{(j)}\circ\sigma_{\mathrm{geom}},\Delta_{D^{(j)}})$$

より主張が従う． ∎

これに対し，$\mathrm{Tr}(\sigma\circ\Gamma^*; X, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ を計算するためには，p 進 Hodge 理論 ([Ts]) と p 進重さスペクトル系列 ([Mo]) を用いる．まず，p 進 Hodge 理論により次の定理が得られる：

定理 6.7

$H^i(X\otimes_{F_\mathfrak{p}}\overline{F}_\mathfrak{p}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ は $G_{F_\mathfrak{p}}$ の半安定表現であり，次が成り立つ：

$$D_{\mathrm{pst}}\bigl(H^i(X\otimes_{F_\mathfrak{p}}\overline{F}_\mathfrak{p}, \overline{\mathbb{Q}}_p)\bigr) = H^i_{\mathrm{logcrys}}\bigl(\mathfrak{X}/W(\kappa')\bigr)\otimes_{W(\kappa')}\overline{\mathbb{Q}}_p.$$

さらに，左辺への $\sigma\in W^+_{F_\mathfrak{p}}$ の作用は右辺への $\sigma^*\circ\phi^{n(\sigma)[\kappa:\mathbb{F}_p]}$ の作用に対応する（ϕ は $H^i_{\mathrm{logcrys}}(\mathfrak{X}/W(\kappa'))$ の Frobenius 作用）．

また，p 進重さスペクトル系列は次のような形をしている：

$$E_1^{s,t} = \bigoplus_{i\geq\max\{0,-s\}} H^{t-2i}_{\mathrm{crys}}\bigl(D^{(s+2i)}/W(\kappa')\bigr)(-i) \Longrightarrow H^{s+t}_{\mathrm{logcrys}}\bigl(\mathfrak{X}/W(\kappa')\bigr).$$

ここで，$(-i)$ は Frobenius 作用を p^i 倍することを表している．

よって，命題 6.6 と同様の手法により，次が得られる：

命題 6.8

命題 6.6 と同様の記号のもとで次の等式が成り立つ：

$$\mathrm{Tr}(\sigma\circ\Gamma^*; X, \overline{\mathbb{Q}}_p) = \sum_s \sum_{i\geq\max\{0,-s\}} (-1)^s q^{n(\sigma)i}\bigl(\Gamma'^{(s+2i)}\circ\sigma_{\mathrm{geom}}, \Delta_{D^{(s+2i)}}\bigr).$$

特に，$\mathrm{Tr}(\sigma\circ\Gamma^*; X, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ は整数である．

命題 6.6，命題 6.8 より直ちに次が得られる：

系 6.9

（6.2.1 節冒頭の仮定のもとで）$\mathrm{Tr}(\sigma\circ\Gamma^*; X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ と $\mathrm{Tr}(\sigma\circ\Gamma^*; X, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ はともに整数であり，等しい．

注意 6.10

ここでは重さスペクトル系列のエタール射に関する関手性を用いたが，ℓ 進の場合，[Sa3] においてより強力な関手性が証明されている．これを用いると，「$G_{F_\mathfrak{p}}$ の作用が $\mathfrak{X}$ に延長される」「$\gamma\colon\Gamma\longrightarrow X\times X$ は $\mathfrak{X}$ 上に延長される」の 2 つの仮定がなくても $\mathrm{Tr}(\sigma\circ\Gamma^*; X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を幾何学的な量で表すことができる（[Sa3] Lemma 3.2 の証明を参照）．

しかしこの強い関手性は，p 進重さスペクトル系列に対しては現在のところまだ得られていない（少なくとも筆者の知る限り出版はされていない）ので，$\mathrm{Tr}(\sigma\circ\Gamma^*; X, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ の方

には適用できず，定理 6.5 の証明には用いることができない．

6.2.2　係数層が自明とは限らない場合

次に，$\mathcal{F}_\ell, \mathcal{F}_p$ が自明とは限らない場合を考えよう．この場合には，$\mathcal{F}_\ell, \mathcal{F}_p$ が「同じ幾何学的対象から来ている」ということを証明するのが鍵である．

以下では，代数的対応の $\mathbb{C}$ 線型結合のことを「$\mathbb{C}$ 係数代数的対応」と呼び，あたかも代数的対応であるかのように $\Gamma' \longrightarrow X \times X$ などと表す．6.1 節の最後に述べたように，ι' を用いて $\mathbb{C}$ 係数代数的対応 Γ' の ℓ 進コホモロジーへの作用を定義することができるが，これを $\Gamma'^*_{\iota'}$ と書く．同様に p 進コホモロジーへの作用を Γ'_ι と書く．

命題 6.11

固有かつ滑らかな射 $f\colon Y \longrightarrow X$, $\mathbb{C}$ 係数代数的対応 $\Theta \longrightarrow Y \times_X Y$ および整数 $k \geq 0$ が存在して，$\Theta^*_{\iota'}\colon R^i f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow R^i f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, $\Theta^*_\iota\colon R^i f_*\overline{\mathbb{Q}}_p \longrightarrow R^i f_*\overline{\mathbb{Q}}_p$ が次を満たすとする：

> $i \neq k$ ならば $\Theta^*_{\iota'} = 0$ であり，$i = k$ ならば $\Theta^*_{\iota'}$ は $R^k f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ から $\mathcal{F}_\ell$ への射影子を与える（この状況を，「$\mathcal{F}_\ell$ は $R^* f_*\mathbb{Q}_\ell$ から Θ によって切り出される」と呼ぶことにする）．Θ^*_ι についても同様である．

さらに，$\gamma\colon \Gamma \longrightarrow X \times X$ の持ち上げとなる代数的対応 $\widetilde{\gamma}\colon \widetilde{\Gamma} \longrightarrow Y \times Y$（$\mathrm{pr}_i \circ \widetilde{\gamma}$ はエタール）が存在して，次が可換になるとする：

$$\begin{array}{ccc}
H^i(Y \otimes_{F_\mathfrak{p}} \overline{F}_\mathfrak{p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{\widetilde{\Gamma}^*} & H^i(Y \otimes_{F_\mathfrak{p}} \overline{F}_\mathfrak{p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \Theta^*_{\iota'}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Theta^*_{\iota'}} \\
H^{i-k}(X \otimes_{F_\mathfrak{p}} \overline{F}_\mathfrak{p}, \mathcal{F}_\ell) & \xrightarrow{\Gamma^*} & H^{i-k}(X \otimes_{F_\mathfrak{p}} \overline{F}_\mathfrak{p}, \mathcal{F}_\ell),
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
H^i(Y \otimes_{F_\mathfrak{p}} \overline{F}_\mathfrak{p}, \overline{\mathbb{Q}}_p) & \xrightarrow{\widetilde{\Gamma}^*} & H^i(Y \otimes_{F_\mathfrak{p}} \overline{F}_\mathfrak{p}, \overline{\mathbb{Q}}_p) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \Theta^*_{\iota}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Theta^*_{\iota}} \\
H^{i-k}(X \otimes_{F_\mathfrak{p}} \overline{F}_\mathfrak{p}, \mathcal{F}_p) & \xrightarrow{\Gamma^*} & H^{i-k}(X \otimes_{F_\mathfrak{p}} \overline{F}_\mathfrak{p}, \mathcal{F}_p).
\end{array}$$

このとき，次が成り立つ：

$$\mathrm{Tr}(\sigma \circ \Gamma^*; X, \mathcal{F}_\ell) = \mathrm{Tr}(\sigma \circ \widetilde{\Gamma}^* \circ \Theta^*_{\iota'}; Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \quad \mathrm{Tr}(\sigma \circ \Gamma^*; X, \mathcal{F}_p) = \mathrm{Tr}(\sigma \circ \widetilde{\Gamma}^* \circ \Theta^*_{\iota}; Y, \overline{\mathbb{Q}}_p).$$

証明　$\Theta^*_{\iota'}\colon H^i(Y \otimes_{F_\mathfrak{p}} \overline{F}_\mathfrak{p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow H^i(Y \otimes_{F_\mathfrak{p}} \overline{F}_\mathfrak{p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ の像が $H^{i-k}(X \otimes_{F_\mathfrak{p}} \overline{F}_\mathfrak{p}, \mathcal{F}_\ell)$ に等しくなること（図式中の縦矢印の全射性）は Leray スペクトル系列から従う．他の部分は明らかである． ∎

この命題より，$f\colon Y \longrightarrow X$, Θ および $\widetilde{\gamma}\colon \widetilde{\Gamma} \longrightarrow Y \times Y$ を見つけることができれば 6.2.1 節の場合に帰着できることが分かる．6.2.1 節の結果（系 6.9）を用いるためには，さらに次の条件を確認すればよい：

- $F_{\mathfrak{p}}$ のある有限次 Galois 拡大 L 上 X は強半安定還元 $\mathfrak{X}$ を持つ（$\mathfrak{X}$ は L の整数環 V 上の強半安定スキーム）．
- $f\colon Y \longrightarrow X$ の L への底変換は V 上の固有かつ滑らかな射 $\mathfrak{f}\colon \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ に延長される．
- $G_{F_{\mathfrak{p}}}$ の $X \otimes_{F_{\mathfrak{p}}} L$, $Y \otimes_{F_{\mathfrak{p}}} L$ への作用は $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ へ拡張され，$\mathfrak{f}$ はこの作用と可換になる．
- Θ, $\widetilde{\Gamma}$ は $\mathfrak{Y}$ 上に延長される．

実際は，X が曲線であり，$f\colon Y \longrightarrow X$ がアーベルスキームである場合に適用する．この場合，L と $\mathfrak{X}$ の存在および $\mathfrak{X}$ に $G_{F_{\mathfrak{p}}}$ の作用が延長されることは曲線の半安定還元定理から従う．また，$\mathfrak{f}\colon \mathfrak{Y} \longrightarrow \mathfrak{X}$ の存在を仮定すれば，$\mathfrak{Y}$ に $G_{F_{\mathfrak{p}}}$ の作用が（$\mathfrak{f}$ が作用と可換になるように）延長されることは自動的に従う（[Sa1] Lemma 4 (3) の証明参照）．

6.3 定理 6.5 の証明の概略

ここでは，いかにして前小節の内容を志村曲線 M_K およびその上の層 $\mathcal{F}_{K,\ell}$, $\mathcal{F}_{K,p}$ に適用するのかを簡単に述べる．基本的な方針は PEL 型の場合への帰着である．そのために，M に加えて M', M'', N', N'_0 という 4 つの志村多様体を導入する．

定義 6.12

$E_0 \subset \mathbb{C}$ を $\mathbb{Q}$ の虚二次拡大で p が分解するようなものとし，$E = FE_0$, $D = B \otimes_F E$ とおく．$\mathbb{Q}$ 上の代数群 G'', G' を $\mathbb{Q}$ 値点がそれぞれ次で与えられるように定める：

$$G''(\mathbb{Q}) = B^\times \overset{F^\times}{\times} E^\times (\cong B^\times \cdot E^\times \subset D^\times),$$
$$G'(\mathbb{Q}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Nrd}_{B/F} \times N_{E/F}\colon B^\times \overset{F^\times}{\times} E^\times \longrightarrow F^\times).$$

また，$T' = \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\, \mathbb{G}_m$, $T'_0 = \mathrm{Res}_{E_0/\mathbb{Q}}\, \mathbb{G}_m$ とおく．

$\mathbb{R}$ 上の代数群の準同型 $h'\colon \mathbb{S} \longrightarrow G' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, $h_E\colon \mathbb{S} \longrightarrow T'$, $h_0\colon \mathbb{S} \longrightarrow T'_0$ を $\mathbb{R}$ 値点にそれぞれ次を誘導するように定める：

$$h'\colon \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \cdot \mathbb{C}^\times \times \mathbb{H} \cdot \mathbb{C}^\times \times \cdots \times \mathbb{H} \cdot \mathbb{C}^\times;$$
$$a + b\sqrt{-1} \longmapsto \left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \otimes 1, 1 \otimes z, \ldots, 1 \otimes z\right),$$
$$h_E\colon \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times \times \cdots \times \mathbb{C}^\times;\ z \longmapsto (z^{-1}, 1, \ldots, 1),$$

$$h_0\colon \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times;\ z \longmapsto z^{-1}.$$

合成 $\mathbb{S} \xrightarrow{h'} G' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \hookrightarrow G'' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ を h'' とおく．

このとき，(G', h'), (G'', h''), (T', h_E), (T'_0, h_0) は Deligne の公理を満たすことが容易に分かる．これらに伴う志村多様体の正準モデルをそれぞれ M', M'', N', N'_0 と書く（本来は M' や M'' などにコンパクト開部分群の添字をつけなくてはならないが，省略する）．M', M'', N' は E 上定義され，N'_0 は E_0 上定義される．

注意 6.13

T', T'_0, N', N'_0 は [Sa1] では T, T_0, N, N_0 と書かれている．ここでは命題 5.3 中で導入された T, N との混同を避けるために記号を変更した．

これらの志村多様体の間には次の図式で示されるような射がある：

$$\begin{tikzcd} M & M \times N' \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & M'' & M' \arrow[l] \\ & N'_0. & & \end{tikzcd}$$

α は次のような準同型 $G \times T' \longrightarrow G''$ から誘導される：

$$(G \times T')(\mathbb{Q}) = B^\times \times E^\times \longrightarrow G''(\mathbb{Q}) \subset (B \otimes E)^\times; (b, e) \longmapsto b \otimes N_{E/E_0}(e)^{-1} \cdot e.$$

また，β は準同型 $N_{E/E_0} \circ \mathrm{pr}_2\colon G \times T' \longrightarrow T'_0$ から誘導される．

さらに，次が成り立つ：

(a) M', N'_0 は PEL 型である（モジュライ解釈を持つ）．N'_0 については虚数乗法論に他ならない．

(b) $M' \longrightarrow M''$ を M' の連結成分いくつかの合併に制限すると同型である ([Sa1, Lemma 2]).

また，M'', M', N'_0 上には次のようにしてスムーズ ℓ 進層，スムーズ p 進層が定義される：

定義 6.14

$D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = (B \otimes_F E) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = (B \otimes_{\mathbb{Q}} E_0) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong \prod_{\tau_i} (\mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_2(\mathbb{C}))$（第 1 成分は自然な埋め込み $E_0 \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対応し，第 2 成分はその共役に対応するとする）であるから，$G'' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ の代数的表現 ξ''_i $(1 \le i \le d)$ を次のように定めることができる：

$$\xi''_i\colon G'' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \subset \prod_{\tau_i} (\mathrm{GL}_{2,\mathbb{C}} \times \mathrm{GL}_{2,\mathbb{C}}) \xrightarrow{\mathrm{pr}_{i,2}} \mathrm{GL}_{2,\mathbb{C}}.$$

これを用いて，$G'' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ の代数的表現 $\xi''_{\mathbb{C}}$ を $\xi''_{\mathbb{C}} = \bigotimes_i (\mathrm{Sym}^{k_i-2}\,\xi_i \otimes (\det \xi_i)^{(w-k_i)/2})$ で定める．$\xi''_{\mathbb{C}}$ に $\iota'\colon \mathbb{C} \cong \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ で対応する $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の表現を ξ''_ℓ とおき，$\iota\colon \mathbb{C} \cong \overline{\mathbb{Q}}_p$ で対応する $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の表現を ξ''_p とおく．ξ_ℓ, ξ_p は M'' 上のスムーズ ℓ 進層 $\mathcal{G}''_\ell$，スムーズ p 進層 $\mathcal{G}''_p$ を定めることが分かる（定義 5.4 参照）.

ξ''_ℓ, ξ''_p を制限することで得られる $G' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ の表現を ξ'_ℓ, ξ'_p とおき，これらに対応する M' 上の層を $\mathcal{G}'_\ell, \mathcal{G}'_p$ と書く．$\mathcal{G}'_\ell, \mathcal{G}'_p$ は $M' \longrightarrow M''$ による $\mathcal{G}''_\ell, \mathcal{G}''_p$ の引き戻しと一致する.

$E_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$（第 1 成分は自然な埋め込み $E_0 \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対応し，第 2 成分はその共役に対応するとする）であるから，$T'_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ の代数的指標 χ_j $(j = 1, 2)$ を $\chi_j\colon T'_0 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \xrightarrow{\mathrm{pr}_j} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ で定めることができる．$\chi = \chi_1^{-1}$, $\chi_0 = \chi_1^{-1}\chi_2^{-1}$ とおく．上と同様に，これらが定める N'_0 上の層を考えることができるが，それらを $\mathcal{G}_\ell(\chi)$, $\mathcal{G}_\ell(\chi_0)$, $\mathcal{G}_p(\chi)$, $\mathcal{G}_p(\chi_0)$ とおく.

これらの層については次が成り立つ：

(c) (a) より M' 上には普遍アーベルスキーム $A' \longrightarrow M'$ があるが，その $d(w-2)$ 回ファイバー積 $a'\colon X' = A'^{d(w-2)} \longrightarrow M'$ 上の $\mathbb{C}$ 係数代数的対応 $\Theta' \longrightarrow X' \times_{M'} X'$ が存在して，$\mathcal{G}'_\ell$（ないし $\mathcal{G}'_p$）は $R^* a'_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell$（ないし $R^* a'_* \overline{\mathbb{Q}}_p$）から Θ' によって切り出される．N'_0 についても類似のことが成り立つ.

(d) $\mathrm{pr}_1^* \mathcal{F}_\ell^\vee \cong \alpha^* \mathcal{G}''_\ell \otimes \beta^* \mathcal{G}_\ell(\chi)^{\otimes(d-1)(w-2)} \otimes \beta^* \mathcal{G}_\ell(\chi_0)^{-\otimes(d-1)(w-2)}$．$p$ の場合も同様.

(c) における Θ' は，A' への $D^\times$ の作用および $X' = A'^{d(w-2)}$ の成分の入れ換えを用いて定義することができる（[Sa1, 6.1] 参照）．(d) は定義から容易に分かる.

注意 6.15

[Sa1] においては，本稿（および [Ca1]）の $\mathcal{F}_\ell$ の双対を $\mathcal{F}_\ell$ と表しており，本稿での $\mathcal{G}''_\ell$ 等を $\mathcal{F}''_\ell$ 等と書いている．こうしておくと上の (c) は $\mathrm{pr}_1^* \mathcal{F}_\ell \cong \alpha^* \mathcal{F}''_\ell \otimes \beta^* \mathcal{F}_\ell(\chi)^{\otimes(d-1)(w-2)} \otimes \beta^* \mathcal{F}_\ell(\chi_0)^{-\otimes(d-1)(w-2)}$ と表すことができる.

以上のことを用いて定理 6.5 i) を証明する.

定理 6.5 i) の略証　まず (d) および N' に関する簡単な考察により，$M \times N'$ 上の層

$$\mathcal{G}_\ell := \alpha^* \mathcal{G}''_\ell \otimes \beta^* \mathcal{G}_\ell(\chi)^{\otimes(d-1)(w-2)} \otimes \beta^* \mathcal{G}_\ell(\chi_0)^{-\otimes(d-1)(w-2)},$$
$$\mathcal{G}_p := \alpha^* \mathcal{G}''_p \otimes \beta^* \mathcal{G}_p(\chi)^{\otimes(d-1)(w-2)} \otimes \beta^* \mathcal{G}_p(\chi_0)^{-\otimes(d-1)(w-2)}$$

に関して対応する主張を証明すればよいことが分かる.

(b), (c) を用いると，アーベルスキーム $a\colon X \longrightarrow M \times N'$ および $\mathbb{C}$ 係数代数的対応 $\Theta \longrightarrow X \times_{M \times N'} X$ を，$\mathcal{G}_\ell, \mathcal{G}_p$ が切り出されるように構成することができる．実際，(b) によって $a'\colon X' \longrightarrow M'$ および Θ' を M'' に落とすことができ, 落としたもの $a''\colon X'' \longrightarrow M''$,

Θ'' の α での引き戻しをとることができる．N'_0 上のものに対しても β での引き戻しをとることができる．これらの $M \times N'$ 上でのファイバー積をとればよい．一方，前小節の $\widetilde{\Gamma}$ にあたるものの存在も，まず M' および N'_0 上で構成して，それを $M \times N'$ 上にもっていくという方法で容易に証明することができる．

あとは，$M \times N'$ に対して半安定還元定理を適用して得られる強半安定曲線 $\mathfrak{M}$ 上にアーベルスキーム X が延長されること，その延長されたアーベルスキーム $\mathfrak{X}$ 上に Θ および $\widetilde{\Gamma}$ が延長されることを証明すればよい．これもやはり，まず M' 上で考える．M' のモジュライ解釈を $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ 上に拡張することで M' の自然な整モデルが構成でき，$a'\colon X' \longrightarrow M'$ は整モデル上に延長される．(b) を用いることで，M'' の整モデルおよびその上への X'' の延長が構成できる．N'_0 およびその上のアーベルスキーム（楕円曲線）に対しても，同様に自然な整モデルがとれる．こうして構成した M'', N'_0 の整モデル $\mathbf{M}''$, $\mathbf{N}'_0$ は（$\mathfrak{p}$ でのレベルをつけないでおくと）$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ 上スムーズになるので，射 $M \times N' \longrightarrow M'' \times N'_0$ は $\mathfrak{M} \longrightarrow \mathbf{M}'' \times \mathbf{N}'_0$ に延長される．この射によってアーベルスキーム（のファイバー積）の引き戻しをとれば $\mathfrak{M}$ 上への延長が得られる．$\mathbb{C}$ 係数代数的対応の延長に関しては，一般ファイバーのものが自動的に整モデルへの延長を持つことが分かる（前小節の最後で述べた，Galois 群の作用の延長と同じである）．■

注意 6.16

この証明から命題 5.42 が従う．実際，$M \times N'$ 上の層 $\mathcal{G}_\ell$ は $\mathfrak{M}$ 上に自然に延長され（$a\colon X \longrightarrow M \times N'$ の延長の高次順像を Θ の延長で切り取ればよい）その特殊ファイバーへの制限は純になる（Deligne の純性定理）から，$\mathcal{F}_\ell$ の $\mathfrak{M}$ への引き戻しもそうである．

最後に，定理 6.5 ii) の証明の概略を述べる．5.4 節と同様の議論を行いたいが，p 進の場合は係数付きの重さスペクトル系列の理論がまだ完成されていないため，上で構成した $\mathfrak{M}$ 上のアーベルスキーム $\mathfrak{X}$ の（定数係数）重さスペクトル系列をとり，それの各項に $\widetilde{\Gamma}^* \circ \Theta^*_\iota$（正確にはその整モデルへの延長）を作用させる．すると，ℓ 進の係数付き重さスペクトル系列（5.4 節参照）と同様の形をした 5 項だけが残り，他の項は 0 となる．このことから，命題 5.43 と類似の主張を証明すれば定理 6.5 ii) が従うことが分かる．その証明の方針は命題 5.43 と同じであるが，命題 5.41 の p 進対応物を得る部分が ℓ 進のときに比べて大分難しい．詳細は [Sa1] の §9 を参照されたい．

参考文献

[Bo1] P. Boyer, *Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale*, Invent. Math. **138** (1999), no. 3, 573–629.

[Bo2] P. Boyer, *Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples et applications*, preprint, arXiv:math/0511531.

[BH] C. J. Bushnell, G. Henniart, *The local Langlands conjecture for* GL(2), Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **335**. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[BR1] D. Blasius, J. D. Rogawski, *Galois representations for Hilbert modular forms*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **21** (1989), no. 1, 65–69.

[BR2] D. Blasius, J. D. Rogawski, *Motives for Hilbert modular forms*, Invent. Math. **114** (1993), no. 1, 55–87.

[BW] A Borel, N. Wallach, *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Second edition, Mathematical Surveys and Monographs, **67**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[Ca1] H. Carayol, *Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), no. 3, 409–468.

[Ca2] H. Carayol, *Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura*, Compositio Math. **59** (1986), no. 2, 151–230.

[De] P. Deligne, *Variétés de Shimura: interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, pp. 247–289, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Fu] K. Fujiwara, *Theory of tubular neighborhood in étale topology*, Duke Math. J. **80** (1995), no. 1, 15–57.

[He1] G. Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* GL(n) *sur un corps p-adique*, Invent. Math. **139** (2000), no. 2, 439–455.

[He2] G. Henniart, *Caractérisation de la correspondance de Langlands locale par les facteurs ϵ de paires*, Invent. Math. **113** (1993), no. 2, 339–350.

[HT] M. Harris, R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Ann. of Math. Studies **151**, Princeton Univ. Press, Princeton-Oxford, 2001.

[JL] H. Jacquet, R. P. Langlands, *Automorphic forms on* GL(2), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[JPSS] H. Jacquet, I. I. Piatetski-Shapiro, J. Shalika, *Relèvement cubique non normal*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **292** (1981), no. 12, 567–571.

[Ku] P. Kutzko, *The Langlands conjecture for* Gl_2 *of a local field*, Ann. of Math. (2) **112** (1980), no. 2, 381–412.

[La] R. P. Langlands, *Base change for* GL(2), Annals of Mathematics Studies, **96**. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1980.

[Mi1] J. S. Milne, *Canonical models of (mixed) Shimura varieties and automorphic vector bundles*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), 283–414, Perspect. Math., **10**, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[Mi2] J. S. Milne, *Introduction to Shimura varieties*, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, 265–378, Clay Math. Proc., **4**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Mo] A. Mokrane, *La suite spectrale des poids en cohomologie de Hyodo-Kato*, Duke Math. J. **72** (1993), no. 2, 301–337.

[Oh] M. Ohta, *On the zeta function of an abelian scheme over the Shimura curve*, Japan. J. Math. (N.S.) **9** (1983), no. 1, 1–25.

[Ri] J. Riou, *Dualité (d'après Ofer Gabber)*, notes of "groupe de travail sur les resultats recents de Gabber", available at `http://www.math.u-psud.fr/~riou/`.

[RZ] M. Rapoport, Th. Zink, *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, **141**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[Ta1] R. Taylor, *On Galois representations associated to Hilbert modular forms*, Invent. Math. **98** (1989), no. 2, 265–280.

[Ta2] R. Taylor, *On Galois representations associated to Hilbert modular forms. II*, Elliptic curves, modular forms, & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), 185–191, Ser. Number Theory, I, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

[Ts] T. Tsuji, *p-adic etale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. Math. **137** (1999), no. 2, 233–411.

[TY] R. Taylor, T. Yoshida, *Compatibility of local and global Langlands correspondences*, J. Amer. Math. Soc. **20** (2007), no. 2, 467–493.

[Sa1] T. Saito, *Hilbert modular forms and p-adic Hodge theory*, preprint, arXiv:math/0612077.

[Sa2] T. Saito, *Modular forms and p-adic Hodge theory*, Invent. Math.**129** (1997), no. 3, 607–620.

[Sa3] T. Saito, *Weight spectral sequences and independence of ℓ*, J. Inst. Math. Jussieu 2 (2003), no. 4, 583–634.

[SGA4.1/2] P. Deligne, *Cohomologie étale*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA $4\frac{1}{2}$. Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L.Verdier. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[St] M. Strauch, *Deformation spaces of one-dimensional formal groups and their cohomology*, Adv. Math. **217**, 889-951.

[Ya] 山上敦士，Taylor による Hilbert modular form に付随する Galois 表現の構成について，本報告集.