RIMS Kôkyûroku Bessatsu
Bx (201x), 000–000

Arthur 分類とその応用
(Arthur's classification and its applications)

By

三枝 洋一 (Yoichi MIEDA)*

Abstract

This is a survey article on Arthur's conjectural classification of automorphic representations of connected reductive groups over number fields, which recently has been established for classical groups by Arthur himself. It also includes some applications, such as a computation of the ℓ-adic cohomology of some Shimura varieties, and a construction of the Galois representations attached to cuspidal automorphic representations of a general linear group over a totally real or CM field.

§ 1. はじめに

本稿の目的は，代数体上の連結簡約代数群の保型表現を分類する理論である Arthur 分類についての解説を行うことである．この理論は，Langlands によるエンドスコピーの理論とそれに基づく重複度予想（[LL79], [Kot84, §12] 参照）を精密化・一般化する形で，1980 年代後半に Arthur [Art89b] によって予想されたものである．今世紀に入ってからの跡公式の安定化に関する大きな進展（[Wal06], [Wal08], [LN08], [Ngô10], [CL10], [CL12] 等）に基づき，Arthur の著書 [Art13a] によって，この予想は古典群の場合にほぼ完全に解決されるに至った．こうして定理となった（古典群に対する）Arthur 分類は，保型表現論の一つの到達点であると同時に，保型表現に関するさらに深い研究のための道具として，現在も盛んに利用されているようである．また，保型表現と Galois 表現の対応（いわゆる Langlands 対応）を通して，Arthur 分類は Galois 表現で記述される代数的整数論や数論幾何の問題とも密接に関係している．例えば，高次元のモジュラー多様体である志村多様体のエタールコホモロジーに現れる Galois 表現は Arthur 分類を用いて記述されることが予想されており，いくつかの場合には実際に証明もされている．

Received October 3, 2017. Revised November 26, 2017.
2010 Mathematics Subject Classification(s):
Key Words: :
Supported by JAPAN SUPPORT
*Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3–8–1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153-8914, Japan.
e-mail: `mieda@ms.u-tokyo.ac.jp`

Arthur による予想が提出されてから四半世紀以上が経過しているため，Arthur 分類については既に多くの解説が存在する．例えば，Arthur 自身によるものとしては [Art05, §30] や [Art13b] が，日本語のものとしては [Hir00] がある．そのため本稿では，Arthur 分類そのものだけではなく，その代数的整数論や数論幾何への応用についてもある程度詳しく解説することで，既存のものと異なる特徴を持った記事となるように努めた．また，準分裂とは限らない代数群に対する Arthur 分類の定式化 (§2.6) など，比較的新しい内容も含めたつもりである．

本稿の構成は以下の通りである．Arthur 分類そのものは §2 において扱われている．まず保型表現についての用語を簡単に復習した後，Arthur 分類の主張を，局所的な部分と大域的な部分に分けて順に解説する．§3 においては，志村多様体の交叉コホモロジーを Arthur 分類を用いて記述する Kottwitz の予想を紹介し，ユニタリ型志村多様体の場合に実際に証明できることについて述べる．§4 では，§3 の内容に基づき，総実体あるいは CM 体上の GL_n の正則 L 代数的な尖点的保型表現に伴う ℓ 進 Galois 表現の構成を説明する．これは楕円モジュラー形式や Hilbert モジュラー形式に付随する Galois 表現の構成の一般化にあたる結果である．最後に §5 では，上記以外の応用として，古典群上の尖点的保型形式の次元公式に関する Taïbi の結果，および GL_n の保型表現に伴う Galois 表現の Selmer 群の階数と L 関数の中心値との関係に関する Bellaïche-Chenevier の結果を紹介する．

記号　体 F に対し，その分離閉包を $\overline{F}$ で表し，$\Gamma_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ とおく．E を F の拡大体とし，X を F 上の代数群あるいはスキームとするとき，X の E への底変換を X_E と書く．

代数群 G に対し，その単位元を含む連結成分を G^0 と書く．また，$\pi_0(G)$ で G の連結成分のなす群 G/G^0 を表す．

§ 2.　Arthur 分類

§ 2.1.　保型表現

F を代数体とし，そのアデール環を $\mathbb{A}_F$ と書く．G を F 上の連結簡約代数群とし，その中心を Z とする．$Z(\mathbb{A}_F)/Z(F)$ のユニタリ指標 ω を固定する．

定義 2.1.　可測関数 $h\colon G(\mathbb{A}_F) \to \mathbb{C}$ が中心指標 ω の L^2 保型形式であるとは，以下の条件を満たすことをいう：

- $h(\gamma g) = h(g)$ $(g \in G(\mathbb{A}_F), \gamma \in G(F))$.
- $h(zg) = \omega(z)h(g)$ $(g \in G(\mathbb{A}_F), z \in Z(\mathbb{A}_F))$.
- $\int_{G(\mathbb{A}_F)/Z(\mathbb{A}_F)} |h(g)|^2 dg < \infty$.

さらに，任意の放物型部分群 $P \subsetneq G$ に対し $\int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A}_F)} h(ng)dn = 0$（$N_P$ は P の冪単根基，$g \in G(\mathbb{A}_F)$）が成り立つとき，h は尖点的であるという．

中心指標 ω の L^2 保型形式全体のなす空間（ほとんどいたるところ一致する関数は同一視する）を $L^2(G,\omega)$ と書く．さらに，尖点的な L^2 保型形式のなす部分空間を $L^2_{\mathrm{cusp}}(G,\omega)$ と書く．

$L^2(G,\omega)$ は Hilbert 空間であり，右移動による作用によって $G(\mathbb{A}_F)$ のユニタリ表現となる．この表現は以下のように直和分解する：

$$L^2(G,\omega) = \Bigl(\widehat{\bigoplus}_\pi \pi^{\oplus m(\pi)}\Bigr) \oplus L^2_{\mathrm{cont}}(G,\omega).$$

ここで π は $G(\mathbb{A}_F)$ の既約ユニタリ表現で中心指標が ω であるものの同型類を動き，$m(\pi) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は $L^2(G,\omega)$ における π の重複度を表す（これが有限であることも主張の一部である）．$L^2_{\mathrm{cont}}(G,\omega)$ は連続スペクトルであり，既約な部分 $G(\mathbb{A}_F)$ 表現を持たない．これに対し，$\widehat{\bigoplus}_\pi \pi^{\oplus m(\pi)}$ の部分を $L^2_{\mathrm{disc}}(G,\omega)$ と書く．$L^2_{\mathrm{cusp}}(G,\omega) \subset L^2_{\mathrm{disc}}(G,\omega)$ であることが知られている．

定義 2.2. π を $G(\mathbb{A}_F)$ の既約ユニタリ表現とし，その中心指標を ω_π とする．π の $L^2(G,\omega_\pi)$ における重複度 $m(\pi)$ が 1 以上になるとき，π は離散的な保型表現であるという．さらに π が $L^2_{\mathrm{cusp}}(G,\omega_\pi)$ の部分表現となるとき，尖点的な保型表現であるという．

離散的な保型表現の同型類全体を $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ と書き，尖点的な保型表現の同型類全体を $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(G)$ と書く．

$G(\mathbb{A}_F)$ の極大コンパクト部分群 $K = \prod_v K_v$ を固定する．このとき，$\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ の K 有限部分 $\pi_{K\text{-fin}}$ は制限テンソル積 $\bigotimes'_v \pi_v$ に分解する．ここで，π_v は $v \nmid \infty$ のとき $G(F_v)$ の既約許容表現であり，$v \mid \infty$ のとき既約許容 $(\mathfrak{g}(F_v)_{\mathbb{C}}, K_v)$ 加群である（$\mathfrak{g}$ は G の Lie 環を表す）．π_v を π あるいは $\pi_{K\text{-fin}}$ の v 成分という．$\pi^\infty = \bigotimes_{v\nmid\infty} \pi_v$, $\pi_\infty = \bigotimes_{v\mid\infty} \pi_v$ とおく．以下では，$\pi_{K\text{-fin}}$ を π と同一視して，単に π と書く．

注意 2.3. 通常，保型表現と言えば，$G(\mathbb{A}_F)$ 上のスムーズな保型形式全体のなす空間の部分商に現れる表現のことを指す（[BJ79] 等を参照）．保型表現の中には離散的でないものもあるが（正則 Eisenstein 級数に対応する GL_2 の保型表現はその一例である），本稿では離散的な保型表現が中心的な役割を果たすため，そちらに絞って定義を述べることにした．

局所体上の表現に関する記号も導入しておこう．

定義 2.4. v を F の素点とする．v が有限素点のとき，$G(F_v)$ の既約許容表現の同型類の集合を $\Pi(G_v)$ と書く．$\Pi_{\mathrm{unit}}(G_v)$, $\Pi_{\mathrm{temp}}(G_v)$, $\Pi_{\mathrm{disc}}(G_v)$ でそれぞれユニタリ表現，緩増加表現，離散系列表現のなす部分集合を表す．$\Pi_{\mathrm{disc}}(G_v) \subset \Pi_{\mathrm{temp}}(G_v) \subset \Pi_{\mathrm{unit}}(G_v) \subset \Pi(G_v)$ が成り立つ．

v が無限素点の場合にも，既約許容 $(\mathfrak{g}(F_v)_{\mathbb{C}}, K_v)$ 加群について同様の記号（$\Pi(G_v)$ 等）を用いることにする．

本稿のテーマである Arthur 分類とは，一言で言えば以下のようなものである：

- 局所的な分類：F の各素点 v に対し，$\Pi(G_v)$ のパラメータ付けを与える [注1].
- 大域的な分類：局所的な分類を用いて $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ のパラメータ付けを与え，さらに各 $\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ に対し，その重複度 $m(\pi)$ をパラメータによって記述する．

これらについては次小節以降で詳しく説明することにして，ここではまず $G = \mathrm{GL}_n$ の場合に上記の分類がどのようになっているかを思い出しておく．$\Pi(\mathrm{GL}_{n,v})$ のパラメータ付けは局所 Langlands 対応によって行われる：

定理 2.5 (GL_n の局所 Langlands 対応，[HT01])． v を F の素点とし，F_v の Weil 群を W_{F_v} で表す（Weil 群については，[Tat79] 等を参照）．

(i) v が有限素点であるとき，$\Pi(\mathrm{GL}_{n,v})$ の元と $W_{F_v} \times \mathrm{SU}(2)$ の n 次元半単純表現 $\phi\colon W_{F_v} \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の同型類との間には自然な一対一対応 [注2] がある．$\pi \in \Pi(\mathrm{GL}_{n,v})$ に対応する ϕ を ϕ_π と書くと，$\pi \in \Pi_{\mathrm{temp}}(\mathrm{GL}_{n,v})$ は ϕ_π の像が有界であることと同値であり，$\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_{n,v})$ は ϕ_π が既約であることと同値である．

(ii) v が無限素点であるとき，$\Pi(\mathrm{GL}_{n,v})$ の元と W_{F_v} の n 次元半単純表現の同型類との間には自然な一対一対応がある．$\Pi_{\mathrm{temp}}(\mathrm{GL}_{n,v})$ および $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_{n,v})$ も (i) と同様の記述を持つ．

一方，大域的な分類は，Mœglin-Waldspurger による以下の定理によって与えられる：

定理 2.6 ([MW89])．

(i) 正整数 $s \mid n$ および $\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{GL}_{n/s})$ に対し，

$$\pi' = \pi|\det|^{\frac{s-1}{2}} \boxplus \pi|\det|^{\frac{s-3}{2}} \boxplus \cdots \boxplus \pi|\det|^{\frac{1-s}{2}}$$

は GL_n の離散的な保型表現である．ここで，$|\det|$ は合成 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F) \xrightarrow{\det} \mathbb{A}_F^\times \xrightarrow{|-|} \mathbb{R}_{>0}$ を表す．また，記号 $\boxplus$ は Langlands 和と呼ばれる操作を表す．これは，各局所成分を局所 Langlands 対応で移したときに直和となるような操作である [注3]．つまり，各素点 v に対し，次が成り立つ：

$$\phi_{\pi'_v} = \phi_{\pi_v|\det|_v^{\frac{s-1}{2}}} \oplus \phi_{\pi_v|\det|_v^{\frac{s-3}{2}}} \oplus \cdots \oplus \phi_{\pi_v|\det|_v^{\frac{1-s}{2}}}.$$

GL_n の離散的な保型表現は上記の形に一意的に表すことができる．

(ii) 任意の $\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_n)$ に対し，$m(\pi) = 1$ である．

Arthur 分類は，これらの定理の一般化に位置づけられるものである．

注 1 これはかなり不正確な言い方である．§2.2 の注意 2.15 を参照．

注 2 いくつかの基本性質によってこの一対一対応を一意的に特徴付けることもできるが，ここでは述べない．

注 3 ここでは局所 Langlands 対応を用いた説明を行っているが，Langlands 和自体は放物型誘導を用いることで純表現論的に構成できるものである．

§ 2.2. 局所 Arthur 分類

ここでは F を局所体とする．局所 Langlands 群 L_F を以下で定める：

$$L_F = \begin{cases} W_F \times \mathrm{SU}(2) & (F\text{ が非アルキメデス的なとき}), \\ W_F & (F\text{ がアルキメデス的なとき}). \end{cases}$$

G を F 上準分裂な連結簡約代数群とする．$\widehat{G}$ で G の Langlands 双対群を表す．これは，$G_{\overline{F}}$ のルートデータのルートと余ルートを入れ換えて得られる双対ルートデータに伴う $\mathbb{C}$ 上の連結簡約代数群のことである．具体的な群の Langlands 双対群については以下の表を参照．

G	GL_n	SL_n	PGL_n	Sp_{2n}	SO_{2n+1}	SO_{2n}
$\widehat{G}$	GL_n	PGL_n	SL_n	SO_{2n+1}	Sp_{2n}	SO_{2n}

Γ_F の $G_{\overline{F}}$ への作用から，Γ_F の $\widehat{G}$ への作用が（$\widehat{G}$ 共役の不定性を除き）自然に定まる．この作用に関する半直積 $\widehat{G} \rtimes W_F$ を L 群と呼び，${}^L G$ と表す．以下では，$\widehat{G}(\mathbb{C})$ および ${}^L G(\mathbb{C})$ のことを単に $\widehat{G}$ および ${}^L G$ と書くことにする．${}^L G$ の元が半単純であるとは，連続かつ $\widehat{G} \subset {}^L G$ 上代数的であるような任意の準同型 ${}^L G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ による像が半単純であることをいう．G がその上で分裂するような F の有限次 Galois 拡大 E をとり，$d = [E : F]$ とおくと，$(g, \sigma) \in {}^L G$ が半単純であることは $g\sigma(g) \cdots \sigma^{d-1}(g) \in \widehat{G}$ が半単純であることと同値である．

$G = \mathrm{GL}_n$ のとき（定理 2.5）には $\Pi(G)$ のパラメータ付けに L_F の n 次元表現 $L_F \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を用いたが，これの一般化が以下で定義する L パラメータ・A パラメータである．

定義 2.7.

(i) 連続準同型 $\phi\colon L_F \to {}^L G$ が G の L パラメータであるとは，以下を満たすことをいう：

- ϕ は自然な射影 $L_F \to W_F$, ${}^L G \to W_F$ と両立する．
- ϕ の像は半単純元からなる．

G の L パラメータの $\widehat{G}$ 共役類全体の集合を $\Phi(G)$ と書く．L パラメータ ϕ に対し，合成 $L_F \xrightarrow{\phi} {}^L G \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \widehat{G}$ の像が有界であるとき，ϕ は有界であるという．有界な L パラメータのなす $\Phi(G)$ の部分集合を $\Phi_{\mathrm{bdd}}(G)$ と書く．

(ii) 連続準同型 $\psi\colon L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^L G$ が G の A パラメータであるとは，以下を満たすことをいう：

- ψ は自然な射影 $L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to W_F$, ${}^L G \to W_F$ と両立する．
- $\psi|_{L_F} \in \Phi_{\mathrm{bdd}}(G)$.
- $\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \widehat{G}$ は代数的な準同型である．

G の A パラメータの $\widehat{G}$ 共役類全体の集合を $\Psi(G)$ と書く．
定義より，$\{\psi \in \Psi(G) \mid \psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = 1\}$ と $\Phi_{\mathrm{bdd}}(G)$ は同一視できる．これにより $\Phi_{\mathrm{bdd}}(G) \subset \Psi(G)$ とみなす．

(iii) $\phi \in \Phi(G)$ に対し，$\mathrm{Im}\,\phi \subset {}^L G$ の $\widehat{G}$ における中心化群を C_ϕ と書き，$S_\phi = C_\phi Z(\widehat{G})$, $\mathfrak{S}_\phi = S_\phi / S_\phi^0 Z(\widehat{G})$ とおく [注 4]．定義より $\mathfrak{S}_\phi = \pi_0(S_\phi/Z(\widehat{G})) = \pi_0(C_\phi/Z(\widehat{G})^{\Gamma_F})$ である．$\psi \in \Psi(G)$ に対しても同様に C_ψ, S_ψ, $\mathfrak{S}_\psi$ を定める．$\mathfrak{S}_\phi$, $\mathfrak{S}_\psi$ は有限群である．$\mathfrak{S}_\psi$ の既約指標のなす集合を $\widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ と書く．

(iv) $\psi \in \Psi(G)$ とする．$S_\psi^0 \subset Z(\widehat{G})$ となるとき，ψ は離散的であるという．離散的な A パラメータのなす $\Psi(G)$ の部分集合を $\Psi_{\mathrm{disc}}(G)$ と書く．

注意 2.8. $\widehat{G}$ の中心への Γ_F の作用が自明な場合，(iii) において $C_\phi = S_\phi$, $C_\psi = S_\psi$ が成り立つ．G が斜交群や直交群の場合にはこの状況となっている．

例 2.9. $G = \mathrm{GL}_n$ の場合を考える．G は F 上分裂的なので Γ_F の $\widehat{G} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ への作用は自明であるから，${}^L G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times W_F$ である．したがって，G の L パラメータおよび A パラメータは，それぞれ n 次元表現 $L_F \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ と同一視することができる．

$\psi\colon L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を A パラメータとすると，これは $\psi = \bigoplus_{i=1}^r (\mu_i \boxtimes \nu_i)^{\oplus l_i}$ という形の既約分解を持つ．ここで $l_i > 0$ は整数，μ_i は L_F の m_i 次元既約表現，ν_i は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の n_i 次元既約表現（すなわち，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ のスタンダード表現を Std と書くと，$\nu_i = \mathrm{Sym}^{n_i - 1}\mathrm{Std}$）であり，$(\mu_1, \nu_1), \dots, (\mu_r, \nu_r)$ は相異なり，$n = \sum_{i=1}^r l_i m_i n_i$ が成立する．Schur の補題より $S_\psi = C_\psi = \prod_{i=1}^r \mathrm{GL}_{l_i}(\mathbb{C})$ が成り立つ．$Z(\widehat{G}) = \mathbb{C}^\times$ であるから，ψ が離散的であることは $r = 1$ かつ $l_1 = 1$，すなわち ψ が既約であることと同値である．また，S_ψ が連結であることから $\mathfrak{S}_\psi = 1$ となる．

例 2.10. $G = \mathrm{SO}_{2n+1}$ の場合を考える．この場合も G は F 上分裂的であるから，A パラメータ $\psi \in \Psi(\mathrm{SO}_{2n+1})$ は準同型 $\psi\colon L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ と同一視できる．合成 $\psi'\colon L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ を $L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の $2n$ 次元表現とみなし，その既約分解を $\psi' = \bigoplus_{i=1}^r V_i \otimes_{\mathbb{C}} \psi'_i$ と表す（例 2.9 の記号のもとでは，$\psi'_i = \mu_i \boxtimes \nu_i$ であり，V_i は l_i 次元ベクトル空間である）．

$\psi'^\vee \cong \psi'$ であるから，各 $1 \le i \le r$ に対し，$\psi'^\vee_i \cong \psi'_{i^\vee}$ となる $1 \le i^\vee \le r$ が一意的に存在する．このとき，$\dim V_i = \dim V_{i^\vee}$ かつ $i^{\vee\vee} = i$ である．$I = \{1 \le i \le r \mid i^\vee = i\}$ とおく．また，$J \subset \{1, \dots, r\} \setminus I$ を $\{1, \dots, r\} \setminus I = J \sqcup J^\vee$ となるようにとる（$J^\vee = \{i^\vee \mid i \in J\}$ とおいた）．

各 $i \in I$ に対し，同型 $\psi'_i \cong \psi'^\vee_i$，すなわち非退化かつ $L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 不変なペアリング $\langle\ ,\ \rangle_i\colon \psi'_i \times \psi'_i \to \mathbb{C}$ を一つとり固定する．ψ'_i の既約性より，このようなペアリングは定数倍を除き一意である．よって，$\langle x, y\rangle_i = \varepsilon_i \langle y, x\rangle_i$ となる $\varepsilon_i \in \mathbb{C}^\times$ が存在することが分かる（この ε_i は $\langle\ ,\ \rangle_i$ のとり方にはよらない）．$\langle x, y\rangle_i = \varepsilon_i \langle y, x\rangle_i = \varepsilon_i^2 \langle x, y\rangle_i$ なので $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ である．一方，斜交的なペアリング $\langle\ ,\ \rangle\colon \psi' \times \psi' \to \mathbb{C}$ の制限によって，非退化かつ $L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 不変なペアリング $(V_i \otimes_{\mathbb{C}} \psi'_i) \times (V_i \otimes_{\mathbb{C}} \psi'_i) \to \mathbb{C}$ が得られる．これと

注 4 [Art13a] においては $\mathfrak{S}_\phi$ は $\mathcal{S}_\phi$ と書かれているが，S_ϕ との見分けやすさを考慮して，ここではこの記号を採用した．

$\langle\ ,\ \rangle_i$ より非退化なペアリング $\langle\ ,\ \rangle'_i\colon V_i\times V_i\to\mathbb{C}$ が定まる．$\langle\ ,\ \rangle$ が斜交的であることから，$\langle x,y\rangle'_i=-\varepsilon_i\langle y,x\rangle'_i$ が成り立つ．

次に $i\in J$ とし, 非退化かつ $L_F\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 不変なペアリング $\langle\ ,\ \rangle_i\colon\psi'_i\times\psi'_{i^\vee}\to\mathbb{C}$ を固定する．上と同様の議論により, $\langle\ ,\ \rangle$ と $\langle\ ,\ \rangle_i$ から非退化なペアリング $\langle\ ,\ \rangle'_i\colon V_i\times V_{i^\vee}\to\mathbb{C}$ が定まる．$i^\vee\in J^\vee$ に対し, $\langle x,y\rangle_{i^\vee}=\langle y,x\rangle_i$, $\langle x,y\rangle'_{i^\vee}=-\langle y,x\rangle'_i$ によって $\langle\ ,\ \rangle_{i^\vee}\colon\psi'_{i^\vee}\times\psi'_i\to\mathbb{C}$, $\langle\ ,\ \rangle'_{i^\vee}\colon V_{i^\vee}\times V_i\to\mathbb{C}$ を定めると，

$$\langle\ ,\ \rangle=\sum_{i\in I}\langle\ ,\ \rangle'_i\otimes\langle\ ,\ \rangle_i+\sum_{i\in J\sqcup J^\vee}\langle\ ,\ \rangle'_i\otimes\langle\ ,\ \rangle_i$$

が成り立つ．

さて，$C_{\psi'}=\prod_{i\in I\sqcup J\sqcup J^\vee}\mathrm{GL}(V_i)$ の元 (g_i) が $C_\psi=C_{\psi'}\cap\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ に属するための条件を考えよう．上記の $\langle\ ,\ \rangle$ の記述から，これは

- $\langle g_ix,g_iy\rangle'_i=\langle x,y\rangle'_i$ $(i\in I,x,y\in V_i)$
- $\langle g_ix,g_{i^\vee}y\rangle'_i=\langle x,y\rangle'_i$ $(i\in J,x\in V_i,y\in V_{i^\vee})$

がともに成立することと同値である．2 つ目の条件から，g_i $(i\in J)$ より $g_{i^\vee}$ が決まることが分かる．1 つ目の条件は，$\varepsilon_i=1$ ならば $g_i\in\mathrm{Sp}(V_i,\langle\ ,\ \rangle'_i)$ となり，$\varepsilon_i=-1$ ならば $g_i\in\mathrm{O}(V_i,\langle\ ,\ \rangle'_i)$ となることを表している．以上より，次が得られる：

$$S_\psi=C_\psi\cong\prod_{i\in I,\varepsilon_i=1}\mathrm{Sp}_{\dim V_i}(\mathbb{C})\times\prod_{i\in I,\varepsilon_i=-1}\mathrm{O}_{\dim V_i}(\mathbb{C})\times\prod_{i\in J}\mathrm{GL}_{\dim V_i}(\mathbb{C}).$$

$Z(\widehat{G})=\{\pm1\}$ であるから，

$$\mathfrak{S}_\psi=\Bigl(\prod_{i\in I,\varepsilon_i=-1}\{\pm1\}\Bigr)\Big/\Bigl\langle((-1)^{\dim V_i})_i\Bigr\rangle$$

である．また，ψ が離散的であることは $J=\varnothing$ かつ $\varepsilon_i=-1$, $\dim V_i=1$ $(i\in I)$ であることと同値である．このとき，$\mathfrak{S}_\psi\cong(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r-1}$ である．

大雑把に言えば，局所 Arthur 分類とは，A パラメータ $\psi\in\Psi(G)$ と $\rho\in\widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ の組 (ψ,ρ) によって $\Pi_{\mathrm{unit}}(G)$ の元をラベル付けするものである．ρ に関するラベル付けを決めるためには，以下に述べる Whittaker データを固定する必要がある．

定義 2.11. G の Borel 部分群 B および, B の冪単根基 N の生成的指標 $\eta\colon N(F)\to\mathbb{C}^\times$ の組 (B,η) を Whittaker データと呼ぶ．F が非アルキメデス的であるとき，$\pi\in\Pi(G)$ が Whittaker データ (B,η) に関して生成的であるとは，$\mathrm{Hom}(\pi,\mathrm{Ind}_{N(F)}^{G(F)}\eta)\neq0$ であることとする．F がアルキメデス的である場合にも，若干の修正のもと，$\pi\in\Pi(G)$ が生成的であることが定義できる．

準分裂的な群に対する局所 Arthur 分類（一般には未だ予想である）の主張は以下の通りである．

予想 2.12 (局所 Arthur 分類). A パラメータ $\psi\in\Psi(G)$ に対し，有限集合 Π_ψ と写像 $\Pi_\psi\to\Pi_{\mathrm{unit}}(G)$ の組（ψ の A パケットと呼ばれる）が定まる．さらに G の Whittaker データを固定するごとに，写像 $\Pi_\psi\to\widehat{\mathfrak{S}}_\psi;\ \pi\mapsto\langle -,\pi\rangle$ が定まる．これらは以下の条件を満たす：

(i) $\psi=\phi\in\Phi_{\mathrm{bdd}}(G)$ のとき，$\Pi_\phi\to\Pi_{\mathrm{unit}}(G)$ は単射であり，その像は $\Pi_{\mathrm{temp}}(G)$ に含まれる．したがって Π_ϕ は $\Pi_{\mathrm{temp}}(G)$ の部分集合とみなせる．これを ϕ の L パケットと呼ぶ．$\Pi_{\mathrm{temp}}(G)=\coprod_{\phi\in\Phi_{\mathrm{bdd}}(G)}\Pi_\phi$ が成り立つ．写像 $\Pi_\phi\to\widehat{\mathfrak{S}}_\phi$ は単射であり，F が非アルキメデス的ならば全単射である．

(ii) $\psi\in\Psi(G)$ に対し，$\phi_\psi\colon L_F\to {}^LG$ を

$$u\mapsto\psi\Bigl(u,\begin{pmatrix}|u|^{1/2}&0\\0&|u|^{-1/2}\end{pmatrix}\Bigr)$$

で定める．ここで，$|u|$ は合成 $L_F\to W_F^{\mathrm{ab}}\xrightarrow[\cong]{\mathrm{Art}_F^{-1}}F^\times\xrightarrow{|-|}\mathbb{R}_{>0}$ による $u\in L_F$ の像を表すものとする（Art_F は局所類体論の同型）．$\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}\neq 1$ であるとき，ϕ_ψ は非有界な L パラメータとなるが，$G(F)$ の既約許容表現の Langlands 分類（既約緩増加表現を用いた既約許容表現の分類）を用いることで，ϕ_ψ に対応する L パケット $\Pi_{\phi_\psi}\subset\Pi(G)$ および写像 $\Pi_{\phi_\psi}\to\widehat{\mathfrak{S}}_{\phi_\psi}$ を自然に構成することができる．これに対し，以下が成り立つ：

- $\Pi_{\phi_\psi}\subset\Pi_{\mathrm{unit}}(G)$ であり，任意の $\pi\in\Pi_{\phi_\psi}\subset\Pi_{\mathrm{unit}}(G)$ における $\Pi_\psi\to\Pi_{\mathrm{unit}}(G)$ のファイバーは一点である．特に，自然な単射 $\Pi_{\phi_\psi}\hookrightarrow\Pi_\psi$ が存在する．
- 次の図式は可換となる：

$$\begin{array}{ccc}\Pi_{\phi_\psi}&\xrightarrow{\langle -,-\rangle}&\widehat{\mathfrak{S}}_{\phi_\psi}\\ \downarrow&&\downarrow\\ \Pi_\psi&\xrightarrow{\langle -,-\rangle}&\widehat{\mathfrak{S}}_\psi.\end{array}$$

(iii) Π_ψ および $\Pi_\psi\to\widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ はエンドスコピー指標関係式（後述）を満たす．

注意 2.13. 有限集合 Π_ψ と写像 $\Pi_\psi\to\Pi_{\mathrm{unit}}(G)$ の組を考えることは，$\Pi_{\mathrm{unit}}(G)$ の元を重複度込みで考えることにあたる．$\Pi_\psi,\ \Pi_\psi\to\Pi_{\mathrm{unit}}(G),\ \Pi_\psi\to\widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ を考える代わりに，$\Pi_{\mathrm{unit}}(G)$ の有限部分集合 Π'_ψ および写像 $\Pi'_\psi\to$（$\mathfrak{S}_\psi$ の既約とは限らない有限次元表現）を考えることもできる．

予想 2.12 (ii) において既に述べたように，予想 2.12 (i) が成立するとき，Langlands 分類を用いることで，有界とは限らない $\phi\in\Phi(G)$ に対しても L パケット $\Pi_\phi\subset\Pi(G)$ および写像 $\Pi_\phi\to\widehat{\mathfrak{S}}_\phi$ を構成することができる．このとき，$\Pi(G)=\coprod_{\phi\in\Phi(G)}\Pi_\phi$ が成り立ち，また，F が非アルキメデス的ならば $\Pi_\phi\to\widehat{\mathfrak{S}}_\phi$ は同型である．つまり，F が非アルキメデス的であるときには，G の既約許容表現は L パラメータ $\phi\in\Phi(G)$ および $\mathfrak{S}_\phi$ の既約指

標 ρ によって完全に分類されることになる．これを G の局所 Langlands 対応と呼ぶ．局所 Langlands 対応は多くの良い性質を持つと期待されている．そのうちのいくつかを以下に列挙する．

- F が非アルキメデス的であり，G が F 上不分岐であるとする．G の整モデルとなる $\mathcal{O}_F$ 上の簡約群スキームを固定すると，それから自然に Whittaker データが定まる（[Hal93, §7] 参照）．ϕ が不分岐である，すなわち惰性群 $I_F \subset W_F$ に対して合成 $I_F \xrightarrow{\phi|_{I_F}} {}^LG \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \widehat{G}$ が恒等写像であるとき，Π_ϕ は
$$\phi(\mathrm{Frob}, 1) \in {}^LG \quad (\mathrm{Frob} \in W_F \text{ は Frobenius 持ち上げを表す})$$
を佐武パラメータに持つ不分岐表現 π^{unr} を含む．さらに，この π^{unr} に対し $\langle -, \pi^{\mathrm{unr}} \rangle = 1$ である．
- Π_ϕ が離散系列表現を含むことと ϕ が有界かつ離散的であることは同値であり，さらにこのとき $\Pi_\phi \subset \Pi_{\mathrm{disc}}(G)$ となる．
- ϕ が有界であるとき，Π_ϕ は固定した Whittaker データに関して生成的な表現 π^{gen} をただ一つ含む (生成的パケット予想)．さらに，この π^{gen} に対し $\langle -, \pi^{\mathrm{gen}} \rangle = 1$ である．
- $G = \mathrm{GL}_n$ のとき，$\#\Pi_\phi = 1$ であり，$\Pi_\phi = \{\pi\}$ とすると定理 2.5 の ϕ_π は ϕ と一致する．

例 2.14. 予想 2.12 (ii) と上に述べたことから，$\psi \in \Psi(\mathrm{GL}_n)$ に対し $\Pi_\psi = \Pi_{\phi_\psi}$ と決めるのが妥当であることが分かる．特に，任意の $\psi \in \Psi(\mathrm{GL}_n)$ に対し $\#\Pi_\psi = 1$ である．ψ が $\mu \boxtimes \nu$（μ は L_F の表現，ν は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の既約表現）という形のとき，$\phi_\psi = (\mu \otimes |{-}|^{\frac{s-1}{2}}) \oplus (\mu \otimes |{-}|^{\frac{s-3}{2}}) \oplus \cdots \oplus (\mu \otimes |{-}|^{\frac{1-s}{2}})$ $(s = \dim \nu)$ であるから，μ に対応する $\mathrm{GL}_{n/s}(F)$ の既約緩増加表現を π と書くと，次が得られる：
$$\Pi_\psi = \left\{\pi|\det|^{\frac{s-1}{2}} \boxplus \pi|\det|^{\frac{s-3}{2}} \boxplus \cdots \boxplus \pi|\det|^{\frac{1-s}{2}}\right\}.$$

注意 2.15. 前述の通り，L パラメータおよび L パケットの理論 (予想 2.12 (i)) は $\Pi(G)$ の分類を与えていると見ることができる．一方，一般の A パラメータに伴う A パケットのふるまいはこれほど簡単ではない．実際，A パラメータ $\psi, \psi' \in \Psi(G)$ が同値でなかったとしても，$\Pi_\psi \to \Pi_{\mathrm{unit}}(G)$ の像と $\Pi_{\psi'} \to \Pi_{\mathrm{unit}}(G)$ の像が共通部分を持つことはありえる．具体例については，例えば [Hir00, Remark 6.6] を参照．また，$\bigcup_{\psi \in \Psi(G)} \mathrm{Im}(\Pi_\psi \to \Pi_{\mathrm{unit}}(G))$ が $\Pi_{\mathrm{unit}}(G)$ 全体になるという主張も一般には成立しない．この意味で，予想 2.12 は文字通り「局所的な分類」($\Pi_{\mathrm{unit}}(G)$ の分類) を与えているわけではない．A パケットを考える意義は局所的な立場からは理解しづらく，次小節で解説する大域的な分類のためのステップと捉えるのが妥当であると思われる．

予想 2.12 (iii) のエンドスコピー指標関係式とは，異なる群の A パケットに属する表現の指標の間の関係式である．この部分が局所 Arthur 分類の核心であるが，正確な定式化は非常に複雑であるため，概要と例を述べるにとどめることにする．以下では，F が非アルキメデス的局所体である場合を考える．

G, H を F 上準分裂な連結簡約代数群とする．H が G のエンドスコピー群であるとは，おおむね，以下のような半単純元 $s \in \widehat{G}$ が存在することをいう：

- $\widehat{H}$ は $s \in \widehat{G}$ の連結中心化群 $\widehat{G}_s = Z_{\widehat{G}}(s)^0$ と同一視できる．
- 上の同一視によって s を $Z(\widehat{H})$ の元とみなしたものは Γ_F の作用で固定される．

正確な定義は [Kot84, §7] 等を参照 注 5．以後はこのような $s \in \widehat{G}$, および同一視 $\widehat{H} = \widehat{G}_s$ も固定して考える．このような状況において, $G(F)$ の半単純元の安定共役類 (おおむね $G(\overline{F})$ 共役類のことだが, G の導来群が単連結でない場合には若干の修正が必要) と $H(F)$ の半単純元の安定共役類が「対応する」という概念が定義できる．この安定共役類どうしの対応を用いると, 今度は Hecke 環の元 $f \in C_c^\infty(G(F))$, $f^H \in C_c^\infty(H(F))$ が「対応する」という概念を定義することができる．これは大雑把には，半単純元 $\gamma^H \in H(F)$, $\gamma \in G(F)$ の安定共役類が対応するとき, f^H の γ^H における安定軌道積分 $SO_{\gamma_H}(f^H) = \sum_{\gamma' \overset{\mathrm{st}}{\sim} \gamma^H} O_{\gamma'}(f^H)$ ($\gamma' \in H(F)$ は γ^H と安定共役な元の共役類を動く．$O_{\gamma'}(f^H) = \int_{Z_H(\gamma')(F)\backslash H(F)} f^H(h^{-1}\gamma' h)dh$ は軌道積分を表す）と，f の γ における「係数付き安定軌道積分」が一致するという条件である．ここでの「係数」を表すのがいわゆる移送因子（[LS87], [KS99] 参照）であり，その正規化のために G の Whittaker データおよび埋め込み $\widehat{H} = \widehat{G}_s \hookrightarrow \widehat{G}$ の L 群への延長 $\eta\colon {}^LH \hookrightarrow {}^LG$ を固定する必要がある 注 6．$f \in C_c^\infty(G(F))$ が与えられたとき，それに対応する f^H が存在するかどうかという問題は「移送予想」という名で呼ばれ，長らく未解決であったが，[Wal97] において Waldspurger が「基本補題」と呼ばれる類似の問題に帰着させることに成功した．基本補題とは，G, H が不分岐の場合に $G(\mathcal{O}_F)$ の特性関数と $H(\mathcal{O}_F)$ の特性関数が（適切な正規化のもと）対応するであろうという予想である．こちらもこの分野の大問題であったが，Waldspurger を始めとする多くの研究者の貢献の末，最終的に Ngo [Ngô10] によって 2008 年に肯定的に解決された．

さて，$\psi \in \Psi(H)$ とすると，合成 $L_F \xrightarrow{\psi} {}^LH \overset{\eta}{\hookrightarrow} {}^LG$ によって G の A パラメータ ψ' が定まる．このとき，2 つの A パケット Π_ψ^H, $\Pi_{\psi'}$（区別のため，H の A パケットには上付き添字 H を付けた）の間には以下のような指標関係式が成り立つことが期待されている：

予想 2.16 (エンドスコピー指標関係式)．　$f \in C_c^\infty(G(F))$ と $f^H \in C_c^\infty(H(F))$ が対応するとき，以下が成り立つ：

$$\sum_{\pi^H \in \Pi_\psi^H} \operatorname{tr} \pi^H(f^H) = \sum_{\pi \in \Pi_{\psi'}} \langle \overline{s}_{\psi'} \cdot \overline{s}, \pi \rangle \operatorname{tr} \pi(f).$$

ここで，$s_{\psi'} = \psi'(1,-1) \in C_{\psi'}$ であり，$\overline{s}_{\psi'}$, $\overline{s}$ は $s_{\psi'}, s \in C_{\psi'}$ 注 7 の $\mathfrak{S}_{\psi'}$ における像を表す．

注 5 代数体上のエンドスコピー群を考える場合には，2 つ目の条件 $s \in Z(\widehat{H})^{\Gamma_F}$ を少し修正する必要がある．その点も合わせて参照されたい．

注 6 一般的な設定においては，このような延長 η は必ずしも存在するとは限らず，定義に若干の修正が必要である．しかし，現時点において Arthur 分類が実際に証明されている場合には，いずれもこのような延長をとることができる．

注 7 $s \in C_{\psi'}$ は条件 $s \in Z(\widehat{H})^{\Gamma_F}$ から従う．

H が直交群・斜交群である場合，その Langlands 双対群 $\widehat{H}$ も直交群・斜交群であり，その自然表現を考えることで $\widehat{H} \subset \mathrm{GL}_N$ となる．しかし，$\widehat{H}$ は GL_N の半単純元の連結中心化群にはならず，したがって H は GL_N のエンドスコピー群ではない．このような場合も扱えるようにするため，群 G とその自己同型 θ を組にした「捻られた群」に対してもエンドスコピーの理論を拡張しておくことが重要である．捻られた場合においては，共役の概念は θ 共役，すなわち $\gamma \mapsto g^{-1}\gamma\theta(g)$ でうつりあう関係に置き換えられ，中心化群 $Z_G(\gamma)$ は θ 中心化群，すなわち $Z_G(\gamma\theta) = \{g \in G \mid g^{-1}\gamma\theta(g) = \gamma\}$ という群に置き換えられる．半単純元の変種である θ 半単純元という概念も定義でき，(G, θ) の（捻られた）エンドスコピー群 H は，ある $\widehat{\theta}$ 半単純元 $s \in \widehat{G}$ に対して $\widehat{H} = \widehat{G}_{s\widehat{\theta}} = Z_G(s\widehat{\theta})^0$, $s \in Z(\widehat{H})^{\Gamma_F}$ となるような準分裂群として定式化することができる．この設定においても $G(F)$ の θ 半単純元の θ 安定共役類と $H(F)$ の半単純元の安定共役類の対応が定義でき，それに応じて $f \in C_c^\infty(G(F))$ と $f^H \in C_c^\infty(H(F))$ が対応することが定義できる．移送予想と基本補題の類似も成立することが証明されており，予想 2.16 と類似の指標関係式が成り立つことが期待されている．右辺の指標 $\mathrm{tr}\,\pi(f)$ は「捻られた指標」$\mathrm{tr}\,\pi_\theta(f)$ に置き換える必要があるが，これについては後述する．

以下では，これまでの議論を奇数次直交群 SO_{2n+1} および $\psi \in \Psi(\mathrm{SO}_{2n+1})$ に適用し，指標関係式がどのように A パケット Π_ψ および写像 $\Pi_\psi \to \widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ を特徴付けるのかを見ていくことにする．各整数 $N \geq 1$ に対し

$$J = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & \iddots & & \\ (-1)^{N-1} & & & \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_N$$

とおき，直交群 SO_{2n+1} を $\{g \in \mathrm{GL}_{2n+1} \mid {}^t g J g = J, \det g = 1\}$ と実現しておく．

まずはじめに，$G = \mathrm{GL}_{2n}$, $H = \mathrm{SO}_{2n+1}$ とおく．G の自己同型 θ を $\theta(g) = J\,{}^t g^{-1} J^{-1}$ によって定める．このとき，$\widehat{\theta}\colon \widehat{G} \to \widehat{G}$ は $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$; $g \mapsto J\,{}^t g^{-1} J^{-1}$ によって与えられるので，$\widehat{G}_{1\widehat{\theta}} = \{g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \mid \widehat{\theta}(g) = g\}^0 = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) = \widehat{H}$ が成り立つ．したがって，H は (G, θ) の捻られたエンドスコピー群である．

安定共役類の対応について説明しよう．$\gamma \in G(F)$ が θ 半単純であることは，$g \in G(\overline{F})$ が存在して $g^{-1}\gamma\theta(g)$ が対角行列 $\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_{2n})$ $(t_i \in \overline{F}^\times)$ になることと同値である．一方，$\gamma^H \in H(F)$ が半単純であることは，$h \in H(\overline{F})$ が存在して $h^{-1}\gamma^H h$ が対角トーラスの元 $\mathrm{diag}(u_1, \ldots, u_n, 1, u_n^{-1}, \ldots, u_1^{-1})$ $(u_i \in \overline{F}^\times)$ になることと同値である．これらの条件を満たす γ と γ^H が対応することは，「$t_1, \ldots, t_{2n}$ の適切な並べ換えのもとで $u_i = t_i/t_{2n+1-i}$ $(1 \leq i \leq n)$ が成り立つ」という条件で特徴付けられる．

この場合の Hecke 環の元 $f \in C_c^\infty(G(F))$, $f^H \in C_c^\infty(H(F))$ の対応の定義は，対応する強正則半単純元 $\gamma \in G(F)$, $\gamma^H \in H(F)$ における安定軌道積分（f の方は「捻られた安定軌道積分」に変更する必要がある）が一致するという，比較的分かりやすい条件に

よって与えられる．さらにこの場合には，任意の $f^H \in C_c^\infty(H(F))$ に対しそれに対応する $f \in C_c^\infty(G(F))$ が存在することも証明することができる（[Art13a, Corollary 2.1.2] 参照）．

さて，$\psi \in \Psi(\mathrm{SO}_{2n+1})$ に対し，合成 $L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi} \widehat{H} \hookrightarrow \widehat{G} = \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ を ψ' とおく．例 2.14 より，A パケット $\Pi_{\psi'}$ は一元からなるが，その唯一の元（$\mathrm{GL}_{2n}(F)$ の既約許容表現）をまた同じ記号 $\Pi_{\psi'}$ で表すことにする．$\Pi_{\psi'}$ を同型 $\theta\colon \mathrm{GL}_{2n}(F) \to \mathrm{GL}_{2n}(F)$ で引き戻して得られる既約表現を $\Pi_{\psi'}^\theta$ と書くと 注 8，$\widehat{\theta} \circ \psi' = \psi'$ より，$\Pi_{\psi'}^\theta \cong \Pi_{\psi'}$ であることが分かる．同型 $A_\theta\colon \Pi_{\psi'}^\theta \xrightarrow{\cong} \Pi_{\psi'}$ を適切に固定し 注 9，$f \in C_c^\infty(G(F))$ に対して $A_\theta \circ \Pi_{\psi'}(f)$ のトレースを $\mathrm{tr}\,\Pi_{\psi',\theta}(f)$ と書く．これが捻られた指標と呼ばれるものである．

以上の準備のもとで，指標関係式は以下のようになる：

$$\mathrm{tr}\,\Pi_{\psi',\theta}(f) = \sum_{\pi \in \Pi_\psi} \langle \overline{s}_\psi, \pi \rangle \,\mathrm{tr}\,\pi(f^H).$$

既に述べたように，$f^H \in C_c^\infty(H(F))$ は任意の元を動きうるから，指標の線型独立性により，この等式は A パケット Π_ψ を特徴付ける．

一方，写像 $\Pi_\psi \to \widehat{\mathfrak{S}}_\psi$; $\pi \mapsto \langle -, \pi \rangle$ を決めるためには，$G = \mathrm{SO}_{2n+1}$ として，そのエンドスコピー群 H との間の指標関係を考える．簡単のため，$\psi' = \psi'_1 \oplus \psi'_2$（$\psi'_1$, ψ'_2 は L_F の互いに同型でない既約斜交的表現）という形の A パラメータを考えることにする．このとき $\mathfrak{S}_\psi \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である（例 2.10 参照）．$\dim\psi'_1 = 2a$, $\dim\psi'_2 = 2b$ とおき，$s = (\underbrace{1,\ldots,1}_{a\text{ 個}}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{2b\text{ 個}}, \underbrace{1,\ldots,1}_{a\text{ 個}}) \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) = \widehat{G}$ と定めると $\widehat{G}_s \cong \mathrm{Sp}_{2a} \times \mathrm{Sp}_{2b}$ であるから，$H = \mathrm{SO}_{2a+1} \times \mathrm{SO}_{2b+1}$ は G のエンドスコピー群である．ψ を適切に $\widehat{G}$ 共役でとりかえると，$\mathrm{Im}\,\psi \subset \widehat{G}_s = \widehat{H}$ となるようにできる．このとき $s \in C_\psi$ であり，その $\mathfrak{S}_\psi$ における像 $\overline{s}$ は非自明となる．ψ を $L_F \xrightarrow{\psi^H} \widehat{H} \hookrightarrow \widehat{G}$ と分解しておくと，$\mathfrak{S}_{\psi^H} = 1$ より $\Pi^H_{\psi^H}$ は一元からなる．その元を π^H と書くと，指標関係式は以下のようになる：

$$\mathrm{tr}\,\pi^H(f^H) = \sum_{\pi \in \Pi_\psi} \langle \overline{s}, \pi \rangle \,\mathrm{tr}\,\pi(f).$$

ここで，左辺は H と $(\mathrm{GL}_{2a} \times \mathrm{GL}_{2b}, \theta \times \theta)$ の間の指標関係式によって完全に理解されていることに注意すると，上記の等式と指標の線型独立性から，$\pi \in \Pi_\psi$ に対する $\langle \overline{s}, \pi \rangle$ が決定されることが分かる．より一般の A パラメータ ψ に対しても同様に，エンドスコピー群の A パケットの情報を用いて写像 $\Pi_\psi \to \widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ を記述することができる．

§ 2.3. 大域 Arthur 分類

次に，F を代数体とし，G を F 上準分裂な連結簡約代数群とする．本小節では，予想 2.12 に加え，以下のような大域 Langlands 群 L_F の存在を仮定して $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ の分類に関する Arthur の予想を述べる．

注 8 容易に分かるように，$\Pi_{\psi'}^\theta$ は反傾表現 $\Pi_{\psi'}^\vee$ と同型である．

注 9 実際は Whittaker モデルを用いた A_θ の正規化を行うが，ここでは省略する．

仮定 2.17. 以下のような局所コンパクト群 L_F が存在すると仮定する：

L_F の n 次元既約表現 $L_F \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{GL}_n)$ の元と一対一に対応する．

注意 2.18. このような L_F の存在を実際に証明することは現時点では絶望的であるが，G が古典群である場合には，以下で述べる予想を L_F を用いずに定式化することが可能である．これについては次小節で解説する．

このような L_F が存在したとすると，L_F は大域的な Weil 群 W_F を商に持つことが分かる．また，保型表現の局所成分をとる操作と GL_n の局所 Langlands 対応から，各素点 v に対し群準同型 $L_{F_v} \to L_F$ が共役を除いて定まることになる．すなわち，$\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{GL}_n)$ に対応する既約表現 $\phi_\pi\colon L_F \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ に対し，合成 $L_{F_v} \to L_F \xrightarrow{\phi_\pi} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が π_v の L パラメータに一致するように $L_{F_v} \to L_F$ を定める．

この L_F を用いて定義 2.7 と同様に大域 L パラメータ，大域 A パラメータを定義する．$\Phi(G)$, $\Psi(G)$, S_ϕ, S_ψ の定義は以下のような修正が必要である：

定義 2.19.

(i) ϕ, ϕ' を大域 L パラメータとする．以下を満たす $g \in \widehat{G}$ が存在するとき，ϕ と ϕ' は同値であるという：

- 任意の $u \in L_F$ に対し $g\phi(u)g^{-1}\phi'(u)^{-1} \in Z(\widehat{G})$.
- 1 コサイクル $u \mapsto g\phi(u)g^{-1}\phi'(u)^{-1}$ が定めるコホモロジー類 $\in H^1(L_F, Z(\widehat{G}))$ は局所的に自明である．すなわち，$\mathrm{Ker}(H^1(L_F, Z(\widehat{G})) \to \prod_v H^1(L_{F_v}, Z(\widehat{G})))$ に属する．

大域 L パラメータの同値類の集合を $\Phi(G)$ で表す．同様に大域 A パラメータが同値であることも定義し，大域 A パラメータの同値類の集合を $\Psi(G)$ で表す．

(ii) $\phi \in \Phi(G)$ に対し，$\mathrm{Im}\,\phi \subset {}^L G$ の $\widehat{G}$ における中心化群を C_ϕ と書く（これは以前と同様である）．以下の条件を満たす $s \in \widehat{G}$ 全体のなす $\widehat{G}$ の部分群を S_ϕ と書く：

- 任意の $u \in L_F$ に対し，$s\phi(u)s^{-1}\phi(u)^{-1} \in Z(\widehat{G})$.
- 1 コサイクル $u \mapsto s\phi(u)s^{-1}\phi(u)^{-1}$ のコホモロジー類 $\in H^1(L_F, Z(\widehat{G}))$ は局所的に自明である．

さらに $\mathfrak{S}_\phi = S_\phi/S_\phi^0 Z(\widehat{G})$ とおく．A パラメータ $\psi \in \Psi(G)$ に対しても同様の定義を行う．

(iii) $\psi \in \Psi(G)$ とする．$S_\psi^0 \subset Z(\widehat{G})$ となるとき，ψ は離散的であるという．離散的な A パラメータのなす $\Psi(G)$ の部分集合を $\Psi_{\mathrm{disc}}(G)$ と書く．

注意 2.20. $H^1(L_F, Z(\widehat{G})) \to \prod_v H^1(L_{F_v}, Z(\widehat{G}))$ が単射ならば，$S_\phi = C_\phi Z(\widehat{G})$ となり，局所的な場合の定義と同様になる．この単射性は Γ_F の $Z(\widehat{G})$ への作用が自明ならば成り立つ．また，G がユニタリ群である場合にも単射性が成り立つ ([Rog92, §2.2]).

したがって，G が斜交群・直交群・ユニタリ群である場合には，局所体の場合と同様,

中心化群を用いて S_ϕ, S_ψ を定義すればよい．L パラメータ・A パラメータの同値関係も $\widehat{G}$ 共役と一致する．

以下では予想 2.12 を仮定する．$\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)$ をとる．F の素点 v に対し，ψ の v における局所化 $\psi_v\colon L_{F_v} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \widehat{G} \rtimes W_{F_v}$ が（共役を除き）自然に定まる．定義より $S_\psi \subset S_{\psi_v}$ であることが容易に分かるので，準同型 $\mathfrak{S}_\psi \to \mathfrak{S}_{\psi_v}$ も定まる．

ここでは簡単のため，任意の v に対し $\psi_v \in \Psi(G_v)$ が成り立つと仮定する．すると，予想 2.12 から局所 A パケット Π_{ψ_v} が定まる．大域 A パケット Π_ψ を

$$\Pi_\psi = \Bigl\{ \bigotimes_v \pi_v \Bigm| \pi_v \in \Pi_{\psi_v},\ \text{ほとんど全ての } v \text{ に対し } \pi_v \text{ は不分岐} \Bigr\}$$

と定義する．$\pi \in \Pi_\psi$ および $s \in \mathfrak{S}_\psi$ に対し，$\langle s, \pi\rangle = \prod_v \langle s_v, \pi_v\rangle$ とおく．ただし，s_v は s の $\mathfrak{S}_{\psi_v}$ における像を表す．これによって写像 $\langle -, \pi\rangle\colon \mathfrak{S}_\psi \to \mathbb{C}$ が定まる．

定義 2.21.

(i) $\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)$ に対し，指標 $\varepsilon_\psi\colon \mathfrak{S}_\psi \to \{\pm 1\}$ を以下のように定義する．$\widehat{\mathfrak{g}}$ を $\widehat{G}$ の Lie 環とし，表現

$$\tau_\psi\colon \mathfrak{S}_\psi \times L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(\widehat{\mathfrak{g}});\quad (\overline{s}, g, h) \mapsto \mathrm{Ad}\bigl(s \cdot \psi(g,h)\bigr)$$

を考える（$\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)$ より $S_\psi^0 \subset Z(\widehat{G})$ であることに注意）．Killing 形式を考えることで $\tau_\psi \cong \tau_\psi^\vee$ が分かる．$\tau_\psi = \bigoplus_\alpha \lambda_\alpha \otimes \mu_\alpha \otimes \nu_\alpha$ を τ_ψ の既約分解とし，$s \in \mathfrak{S}_\psi$ に対して

$$\varepsilon_\psi(s) = \prod_{\substack{\alpha;\ \mu_\alpha \text{ は斜交的},\\ \varepsilon(\frac{1}{2}, \mu_\alpha) = -1}} \det\bigl(\lambda_\alpha(s)\bigr)$$

と定める．ここで，$\varepsilon(\frac{1}{2}, \mu_\alpha)$ は μ_α に対応する $\mathrm{GL}_{\dim \mu_\alpha}$ の尖点的保型表現の ε 因子の $s = \frac{1}{2}$ での値を表す [注 10]．$\tau_\psi \cong \tau_\psi^\vee$ と $\nu_\alpha \cong \nu_\alpha^\vee$ から $\varepsilon_\psi(s) \in \{\pm 1\}$ が従う．

(ii) $G(\mathbb{A}_F)$ の既約ユニタリ表現 π に対し，

$$m_\psi(\pi) = |\mathfrak{S}_\psi|^{-1} \sum_{\substack{\pi' \in \Pi_\psi \\ \pi' \mapsto \pi}} \sum_{s \in \mathfrak{S}_\psi} \varepsilon_\psi(s) \langle s, \pi'\rangle$$

と定義する．

大域 Arthur 分類の主張は以下の通りである．

[注 10] μ_α が斜交的ならば特に $\mu_\alpha \cong \mu_\alpha^\vee$ なので，$\varepsilon(\frac{1}{2}, \mu_\alpha) \in \{\pm 1\}$ である．さらに，μ_α が直交的である場合には常に $\varepsilon(\frac{1}{2}, \mu_\alpha) = 1$ であると予想されており，μ_α が Γ_F の表現から来る場合には証明もされている（[FQ73] 参照）．この予想を仮定すると，$\varepsilon_\psi(s)$ の定義における「μ_α は斜交的」という条件を「$\mu_\alpha \cong \mu_\alpha^\vee$」に置き換えても同じである．

予想 2.22 (大域 Arthur 分類). $G(\mathbb{A}_F)$ の既約ユニタリ表現 π に対し，次が成り立つ：

$$m(\pi) = \sum_{\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)} m_\psi(\pi).$$

特に，$\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G) = \bigcup_{\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)} \{\pi \in \Pi_\psi \mid \langle -, \pi \rangle = \varepsilon_\psi\}$ である．

注意 2.23. $G = \mathrm{GL}_n$ のときには，Jacquet-Shalika の結果 [JS81a], [JS81b] により，$m_\psi(\pi) > 0$ となる $\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)$ は高々一つである．G が奇数次直交群，斜交群，ユニタリ群のときにも同様のことが成立する．一方，$G = \mathrm{SL}_n$ $(n > 2)$ のときには $m(\pi) > 1$ となる π の存在が Blasius によって発見されている ([Bla94])．$G = \mathrm{SL}_n$ の場合 $0 \le m_\psi(\pi) \le 1$ であるから，この π に対しては $m_\psi(\pi) > 0$ となる $\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SL}_n)$ が複数存在するということになる．

なお，G が例外群 G_2 である場合には，$m(\pi)$ が有界とならないことが知られている．[GGJ02] 参照.

例 2.24. $G = \mathrm{GL}_n$ の場合を考える．$\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_n)$ は $L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の n 次元既約表現と対応するので，$\psi = \mu \boxtimes \nu$ (μ は L_F の既約表現，ν は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の既約表現）と書くことができる．μ に対応する尖点的保型表現を π と書き，$s = \dim \nu$ とおくと，例 2.14 より

$$\Pi_\psi = \left\{ \pi|\det|^{\frac{s-1}{2}} \boxplus \pi|\det|^{\frac{s-3}{2}} \boxplus \cdots \boxplus \pi|\det|^{\frac{1-s}{2}} \right\}$$

である．$\pi \in \Pi_\psi$ に対し $m_\psi(\pi) = 1$ である．ψ と ψ' が同値でないならば Π_ψ と $\Pi_{\psi'}$ は交わらないことに注意すると，$\pi \in \bigcup_{\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_n)} \Pi_\psi$ に対して $\sum_{\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_n)} m_\psi(\pi) = 1$ である．以上のことから，予想 2.22 は定理 2.6 の言い換えになっていることが分かる．

例 2.25. $G = \mathrm{SO}_5$ とする．$\mathrm{SO}_5 \cong \mathrm{PGSp}_4$ なので，SO_5 の保型表現は GSp_4 の保型表現で中心指標が自明なものとも考えることができる．$\widehat{G} = \mathrm{Sp}_4$ である．

$\tau \in \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGL}_2)$ をとり，τ に対応する 2 次元既約表現 $L_F \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ を同じ記号 τ で表す．また，χ を位数が高々 2 の Hecke 指標とし，Std を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の自然表現とする．以下のような A パラメータ $\psi \colon L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ を考える：

$$\psi = (\tau \boxtimes 1) \oplus (\chi \boxtimes \mathrm{Std}).$$

容易に分かるように，$C_\psi = S_\psi = \{\pm 1\} \times \{\pm 1\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ である．したがって $\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_5)$ であり，$\mathfrak{S}_\psi = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．また，

$$\varepsilon_\psi = \begin{cases} 1 & (\varepsilon(\frac{1}{2}, \tau \otimes \chi^{-1}) = 1 \text{ のとき}) \\ \mathrm{sgn} & (\varepsilon(\frac{1}{2}, \tau \otimes \chi^{-1}) = -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．

A パケット Π_ψ に属する保型表現は齋藤・黒川表現と呼ばれており，$(\widetilde{\mathrm{SL}}_2, \mathrm{SO}_3 = \mathrm{PGL}_2)$ および $(\widetilde{\mathrm{SL}}_2, \mathrm{SO}_5)$ のテータ対応を用いて構成することができる（[PS83], [Gan08] 参照）．

ここで，$\widetilde{\mathrm{SL}}_2$ は SL_2 の二重被覆を表す．また，Π_ψ に関する予想 2.22 は $\widetilde{\mathrm{SL}}_2$ の保型表現の near equivalence class に関する Waldspurger の結果 [Wal91] と深い関わりがある．[Gan08] 参照.

テータ対応による構成を用いると，Π_ψ に属する保型表現の多くが尖点的であることが分かる ([Gan08, Proposition 5.8])．一方，予想 2.22 におけるパラメータ付けからどの表現が尖点的であるかを見分ける方法は知られていないと思われる（[Art89b, §2] の最終段落を参照）．$\pi\in\Pi_\psi$ を尖点的保型表現とする．F の有限素点 v において τ_v, χ_v, π_v が全て不分岐であるとし，τ_v の佐武パラメータを $\mathrm{diag}(\alpha_v,\alpha_v^{-1})$ とすると，π_v の佐武パラメータは $\mathrm{diag}(\chi_v(\varpi_v)q_v^{1/2},\alpha_v,\alpha_v^{-1},\chi_v(\varpi_v)q_v^{-1/2})$ となることが容易に分かる（ϖ_v は F_v の素元，q_v は F_v の剰余体の元の個数）．$\chi_v(\varpi_v)q_v^{1/2}$ と $\chi_v(\varpi_v)q_v^{-1/2}$ の絶対値が等しくなることはないので，π_v は緩増加表現ではない．したがって，π は一般化された Ramanujan 予想を満たさない尖点的保型表現である．

§ 2.4. Arthur が証明したこと

Arthur は [Art13a] において，G が斜交群および準分裂直交群の場合に予想 2.12，予想 2.22 を適切な修正のもとで解決した．ここではその修正点について述べる．

最も大きな修正点は，大域 Langlands 群 L_F を使わずに予想 2.22 を定式化するというところである．まずこれについて説明しよう．整数 $N\geq 1$ を固定し，(GL_N,θ) の楕円的エンドスコピー群を以下で定義する．

定義 2.26. $N_S,N_O\geq 0$ を $N_S+N_O=N$ を満たす整数とし，N_S は偶数であると仮定する．さらに，$\eta\colon\Gamma_F\to\{\pm1\}$ を位数が高々 2 の指標とし，N_O が奇数なら $\eta=1$ と仮定する．このような 3 つ組 (N_S,N_O,η) に対し，以下のような F 上の代数群 H を考える：

$$H=\begin{cases}\mathrm{SO}_{N_S+1}\times\mathrm{SO}_{N_O,\eta} & (N_O\text{ が偶数のとき}),\\ \mathrm{SO}_{N_S+1}\times\mathrm{Sp}_{N_O-1} & (N_O\text{ が奇数のとき}).\end{cases}$$

ここで，$\mathrm{SO}_{N_O,\eta}$ は $\mathrm{Ker}\,\eta$ に対応する F の拡大体上でちょうど分裂する準分裂直交群を表す．$\widehat{H}=\mathrm{Sp}_{N_S}\times\mathrm{SO}_{N_O}\hookrightarrow\mathrm{GL}_N$ であり，この埋め込みによって H は (GL_N,θ) の（捻られた）エンドスコピー群となる．このような形のエンドスコピー群を (GL_N,θ) の楕円的エンドスコピー群という．埋め込み $\widehat{H}\hookrightarrow\mathrm{GL}_N$ は L 群の埋め込み $\xi_H\colon {}^LH\hookrightarrow{}^L\mathrm{GL}_N$ に自然に延長することができる[注 11].

N_S または N_O のいずれか一方が 0 であるような 3 つ組 (N_S,N_O,η) に対応する H のことを単純エンドスコピー群という．斜交群および準分裂直交群はある N に対する (GL_N,θ) の単純エンドスコピー群になる．

Arthur は以下の定理を A パラメータの定義の出発点として設定した．

[注 11] [Art13a] に従い，ここでの L 群は Weil 群ではなく Galois 群との半直積 ${}^LH=\widehat{H}\rtimes\Gamma_F$ のこととする．

定理 2.27 ([Art13a, Theorem 1.4.1]). μ を GL_N の尖点的保型表現とし，$\mu^\vee \cong \mu$ であると仮定する．このとき，以下のような (GL_N, θ) の楕円的エンドスコピー群 H が唯一存在する：

> μ は H のある離散的保型表現 π の弱リフトとなっている．すなわち，有限個を除いた有限素点 v において，（π_v, μ_v は不分岐であり）π_v の佐武パラメータの $\xi_H\colon {}^L H \hookrightarrow {}^L\mathrm{GL}_N$ での像が μ_v の佐武パラメータと一致する．

さらに，この H は単純エンドスコピー群である．

定理 2.27 は [Art13a] においては "seed theorem" と呼ばれており，他の定理と合わせた帰納法によって証明される．以下では，1 以上 N 以下の整数に対して定理 2.27 が成立すると仮定する．

GL_N の A パラメータ ψ を，形式和

$$\psi = l_1(\mu_1 \boxtimes \nu_1) \boxplus \cdots \boxplus l_r(\mu_r \boxtimes \nu_r)$$

のことと定める．ここで $l_i > 0$ は整数，μ_i は $\mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現，ν_i は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の n_i 次元既約表現であり，$(\mu_1, \nu_1), \ldots, (\mu_r, \nu_r)$ は相異なり，$N = \sum_{i=1}^r l_i m_i n_i$ が成り立つものとする．また，$(l_1, \mu_1, \nu_1), \ldots, (l_r, \mu_r, \nu_r)$ を並べ換えたものは同一視する．

A パラメータ $\psi^\vee$ を次で定義する：

$$\psi^\vee = l_1(\mu_1^\vee \boxtimes \nu_1) \boxplus \cdots \boxplus l_r(\mu_r^\vee \boxtimes \nu_r).$$

$\psi = \psi^\vee$ を満たす ψ を自己双対的な A パラメータであるという．GL_N の自己双対的な A パラメータ全体を $\widetilde{\Psi}(\mathrm{GL}_N)$ と書く．$\psi \in \widetilde{\Psi}(\mathrm{GL}_N)$ に対して，Langlands 群の代替物 $\mathcal{L}_\psi$ を以下のように定義する：

定義 2.28. $\psi \in \widetilde{\Psi}(\mathrm{GL}_N)$ とすると，$\mu_i^\vee \cong \mu_{i^\vee}, \nu_i \cong \nu_{i^\vee}$ を満たす全単射 $\{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, r\}; i \mapsto i^\vee$ が一意的に存在し，$l_i = l_{i^\vee}$ および $i^{\vee\vee} = i$ を満たす．$I_\psi = \{i \mid i = i^\vee\}$ とおき，$J_\psi \subset \{1, \ldots, r\} \setminus I_\psi$ を $\{1, \ldots, r\} \setminus I_\psi = J_\psi \sqcup J_\psi^\vee$ となるようにとる（$J_\psi^\vee = \{i^\vee \mid i \in J_\psi\}$ とおいた）．

$i \in I_\psi$ に対し，定理 2.27 から GL_{m_i} の単純エンドスコピー群 H_i が定まる．また，$i \in J_\psi$ に対し，$H_i = \mathrm{GL}_{m_i}$ とおく．${}^L H_i = \widehat{H}_i \rtimes \Gamma_F$ $(i \in I_\psi \sqcup J_\psi)$ の Γ_F 上のファイバー積を $\mathcal{L}_\psi$ と書く．

$i \in I_\psi$ に対し，$\xi_{H_i}\colon {}^L H_i \to {}^L\mathrm{GL}_{m_i}$ を $\widetilde{\mu}_i$ と書く．また，$i \in J_\psi$ に対し，$\widetilde{\mu}_i\colon {}^L H_i = \mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{C}) \times \Gamma_F \to \mathrm{GL}_{2m_i}(\mathbb{C}) \times \Gamma_F = {}^L\mathrm{GL}_{2m_i}$ を以下で定める：

$$(h, \sigma) \mapsto (h \oplus J\,{}^t h^{-1} J^{-1}, \sigma).$$

$\widetilde{\psi} = \bigoplus_{i \in I_\psi} (\widetilde{\mu}_i \boxtimes \nu_i)^{\oplus l_i} \oplus \bigoplus_{j \in J_\psi} (\widetilde{\mu}_j \boxtimes \nu_j)^{\oplus l_j}$ とおくことで，準同型

$$\widetilde{\psi}\colon \mathcal{L}_\psi \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^L\mathrm{GL}_N$$

が定まる．

この準同型 $\widetilde{\psi}$ を用いて A パラメータの代替物を定義することができる．

定義 2.29. G を GL_N の単純エンドスコピー群とする．以下を満たすような $\psi \in \widetilde{\Psi}(\mathrm{GL}_N)$ 全体を $\widetilde{\Psi}(G)$ と書く：

$\widetilde{\psi}\colon \mathcal{L}_\psi \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^L\mathrm{GL}_N$ を $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ 共役で適切にとりかえると $\widetilde{\psi}_G\colon \mathcal{L}_\psi \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$ を経由する．

$\psi \in \widetilde{\Psi}(G)$ に対し，$\operatorname{Im}\widetilde{\psi}_G \subset {}^LG$ の $\widehat{G}$ における中心化群を S_ψ と書き，$\mathfrak{S}_\psi = S_\psi/S_\psi^0 Z(\widehat{G})$ とおく（$Z(\widehat{G})$ への Γ_F の作用は自明なので，$Z(\widehat{G}) \subset S_\psi$ であることに注意）．S_ψ が有限群であるような $\psi \in \widetilde{\Psi}(G)$ を離散的であるという．これは $J_\psi = \varnothing$ かつ $l_1 = \cdots = l_r = 1$ となることと同値である．離散的な $\widetilde{\Psi}(G)$ の元全体を $\widetilde{\Psi}_{\mathrm{disc}}(G)$ と書く．

注意 2.30. $\psi \in \widetilde{\Psi}(G)$ であるとき，$\widetilde{\psi}_G$ の $\widehat{G}$ 共役類には $\mathrm{Norm}_{\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})}(\widehat{G})/\widehat{G}$ の分だけ任意性がある（Norm は正規化群を表す）．$\widehat{G}$ が斜交群あるいは奇数次直交群のときは $\mathrm{Norm}_{\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})}(\widehat{G}) = \widehat{G}$ なので，$\widetilde{\psi}_G$ の $\widehat{G}$ 共役類は well-defined であるが，$\widehat{G} = \mathrm{SO}_{2n}$ のときは $\mathrm{Norm}_{\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})}(\widehat{G}) = \mathrm{O}_{2n}$ となる．つまり，このときの $\widetilde{\Psi}(G)$ は $\Psi(G)$ の O_{2n} 軌道に相当するものになる．

以上で G の A パラメータの代替物，およびそれに対応する S 群を定義することができた．ε_ψ も定義 2.21 (i) において L_F, ψ を $\mathcal{L}_\psi, \widetilde{\psi}_G$ に置き換えることで定義される．次に，$\psi \in \widetilde{\Psi}(G)$ の局所化について考える．この際には以下の定理が必要になる：

定理 2.31 ([Art13a, Theorem 1.4.2])**.** 定理 2.27 の設定において，v を F の素点とし，μ_v の L パラメータを $\phi_v\colon L_{F_v} \to \mathrm{GL}_N \rtimes W_{F_v}$ とする (区別のため，局所的な L 群を半直積の形で書いている)．このとき，ϕ_v を $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ 共役で適切にとりかえると $\widehat{H} \rtimes W_{F_v}$ を経由する．ただし，H は定理 2.27 で存在が保証されている (GL_N, θ) の楕円的エンドスコピー群である．

この定理も定理 2.27 と同様，主定理と合わせた帰納法によって証明される．以下ではこの定理が 1 以上 N 以下の整数に対して成立すると仮定し，F の素点 v における $\psi \in \widetilde{\Psi}(G)$ の局所化を定義する．$\psi = l_1(\mu_1 \boxtimes \nu_1) \boxplus \cdots \boxplus l_r(\mu_r \boxtimes \nu_r)$ と書き，I_ψ, J_ψ を以前のように定める．このとき定理 2.31 より，$i \in I_\psi \sqcup J_\psi$ に対して $\mu_{i,v}$ の L パラメータは $\widehat{H}_i \rtimes W_{F_v}$ を経由する．これによって定まる準同型 $L_{F_v} \to \widehat{H}_i \rtimes W_{F_v}$ のファイバー積をとることで準同型 $L_{F_v} \to \mathcal{L}_{\psi,v} = (\prod_{i \in I_\psi \sqcup J_\psi} \widehat{H}_i) \rtimes W_{F_v}$ を得る．これと $\widetilde{\psi}_G$ から誘導される準同型 $\mathcal{L}_{\psi,v} \to \widehat{G} \rtimes W_{F_v}$ を合成して得られる準同型 $L_{F_v} \to \widehat{G} \rtimes W_{F_v}$ を ψ_v と書く．注意 2.30 と同様，ψ_v の $\widehat{G}$ 共役類は $\mathrm{Norm}_{\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})}(\widehat{G})/\widehat{G}$ の不定性を除いて well-defined である．

前小節では $\psi_v \in \Psi(G_v)$，すなわち $\psi_v|_{L_{F_v}}$ が有界であると仮定したが，一般にこれを証明するのは困難である．実際，$\psi = \mu \boxtimes 1$（μ は GL_N の尖点的保型表現）という形の場合，ψ_v は μ_v の L パラメータに他ならない．これが有界であることは μ_v が緩増加表現であることと同値であったが (定理 2.5 参照)，一般に GL_N の尖点的保型表現の局所成分が緩増加表現であるという主張は Ramanujan-Petersson 予想と呼ばれる有名な未解決問題

である．そこで $\psi_v|_{L_{F_v}}$ が有界でない場合にも適切に A パケット Π_{ψ_v} の定義を拡張しておく必要がある．これについてはやや技術的なので，ここでは述べない．[Art13a, p. 44] 参照．

以上の修正のもとで，次の定理が成り立つ．

定理 2.32 ([Art13a, Theorem 1.5.1, Theorem 1.5.2])**.** $G = \mathrm{Sp}_{2n}, \mathrm{SO}_{2n+1}$ に対し，予想 2.12，予想 2.22 が成り立つ．また，$\eta\colon \Gamma_F \to \{\pm 1\}$ を位数が高々 2 の指標とするとき，$G = \mathrm{SO}_{2n,\eta}$ に対し，予想 2.12，予想 2.22 を O_{2n} 軌道に関して平均化した主張が成り立つ．

注意 2.33. Arthur の著書 [Art13a] およびそれに引き続く研究により，定理 2.32 に加え，局所 A パケットについては期待される性質の多くが成り立つことが分かってきている．以下ではその一部を紹介する．v を代数体 F の素点とし，簡単のため G を斜交群または奇数次直交群とする．

(i) v が有限素点であり，G_v が不分岐であると仮定する．$\psi_v \in \Psi(G_v)$ が不分岐であるとき，Π_{ψ_v} は不分岐表現 π^{unr} を一つだけ含み，$\langle -, \pi^{\mathrm{unr}} \rangle = 1$ である．[Art13a, Lemma 7.3.4], [Taï17a, Lemma 4.1.1] 参照．
(ii) v が有限素点であるとき，$\psi_v \in \Psi(G_v)$ に対し，$\Pi_{\psi_v} \to \Pi_{\mathrm{unit}}(G_v)$ は単射である．[Mœg11], [Xu17] 参照．
(iii) $\phi_v \in \Phi_{\mathrm{bdd}}(G_v)$ とする．Π_{ϕ_v} が離散系列表現を含むことと ϕ_v が離散的であることは同値であり，さらにこのとき $\Pi_{\phi_v} \subset \Pi_{\mathrm{disc}}(G_v)$ となる．[Art13a, Corollary 6.7.5] の証明を参照．
(iv) $\phi_v \in \Phi_{\mathrm{bdd}}(G_v)$ に対し，Π_{ϕ_v} は固定した Whittaker データに関して生成的な表現 π^{gen} をただ一つ含む．さらに，この π^{gen} に対し $\langle -, \pi^{\mathrm{gen}} \rangle = 1$ である．[Art13a, Proposition 8.3.2], [Var17], [Ato15] を参照．
(v) v が有限素点であるとき，離散的な $\phi_v \in \Phi_{\mathrm{disc}}(G_v)$ に対し，$\pi \in \Pi_{\phi_v}$ が超尖点表現になるための条件を $\langle -, \pi \rangle$ を用いて表すことができる．[MT02], [Xu15b] 参照．
(vi) v が無限素点の場合，コホモロジー的な A パラメータ ψ_v（[Kot90, p. 194] 参照）に対応する A パケット Π_{ψ_v} は Adams-Johnson [AJ87] によって構成されたパケットと一致する．[AMR15] 参照．

注意 2.34. ここでは Arthur による，斜交群および準分裂直交群に関する結果を紹介したが，同様の方法により，準分裂ユニタリ群の場合にも対応する結果を証明することができる ([Mok15])．また，斜交群・直交群に対する結果に帰着させることで，一般斜交群 (GSp) および一般直交群 (GSO) に対しても類似の結果が得られている ([Xu15a])．ユニタリ群の保型表現は GL_n の Galois 表現との関係が深く，また，一般斜交群の保型表現は Siegel モジュラー多様体との関係が深いため，これらの群に対する Arthur 分類にも重要な意義がある．

§ 2.5. 安定跡公式について

定理 2.32 の証明は，古典群の安定跡公式と，GL_n の捻られた安定跡公式を比較することによって行われる．この安定跡公式についてごく簡単に説明を行いたい．本小節では $F=\mathbb{Q}$ とする．Weil 制限を考えれば，このようにしても一般性を失わないことが分かる．

（Selberg 型の）跡公式とは，保型表現の指標と軌道積分を結び付ける等式である．G を $\mathbb{Q}$ 上の連結簡約代数群とする．まず，最も簡単な場合として，G が中心を法として非等方的である場合を考える．このとき，跡公式は $f\in C_c^\infty(G(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$ に対する以下のような等式である：

$$\sum_\pi m(\pi)\,\mathrm{tr}\,\pi(f)=\sum_{\gamma\in G(\mathbb{Q})/\sim}\mathrm{vol}\bigl(Z_G(\gamma)(\mathbb{Q})\backslash Z_G(\gamma)(\mathbb{A}_\mathbb{Q})^1\bigr)O_\gamma(f).$$

右辺の $G(\mathbb{Q})/{\sim}$ は $G(\mathbb{Q})$ の共役類全体の集合を表す．$Z_G(\gamma)(\mathbb{A}_\mathbb{Q})^1$ は γ の中心化群 $Z_G(\gamma)$ のアデール値点のうち，$\mathbb{Q}$ 上の任意の指標 $\chi\colon Z_G(\gamma)\to\mathbb{G}_m$ による像がノルム 1 になる元全体を表す．また，$O_\gamma(f)$ は §2.2 と同様，軌道積分を表す．

一方，G が中心を法として非等方的であるという仮定を外すと，跡公式は一気に複雑な形になってしまう．$G=\mathrm{GL}_2$ の場合は [GJ79] 等に解説がある．一般の簡約群に対しても Arthur による一連の研究があり，1990 年頃には以下のような等式が得られていた：

$$(*)\qquad I^G_{\mathrm{disc}}(f)+\sum_{M\in\mathcal{L}}(M\ \text{の寄与})=\sum_{\gamma\in G(\mathbb{Q})/\sim}a^G(\gamma)I(\gamma,f)+\sum_{M\in\mathcal{L}}(M\ \text{の寄与}).$$

ここで，$\mathcal{L}$ はあらかじめ固定された G の極小 Levi 部分群 M_0 を含む G の Levi 部分群全体の集合を表す．また，

$$I^G_{\mathrm{disc}}(f)=\sum_{M\in\mathcal{L}}\frac{\#W_0^M}{\#W_0^G}\sum_{s\in W(M)_{\mathrm{reg}}}\bigl|\det(s-1)_{\mathfrak{a}_M^G}\bigr|^{-1}\mathrm{tr}\bigl(M_P(s,0)\mathcal{I}_P(0,f)\bigr)$$

はスペクトル側の主要項である [注 12]．記号は以下の通りである．W_0^G, W_0^M は有理的な Weyl 群であり，$W(M)=\mathrm{Norm}_G(A_M)/M$ である（A_M は M の中心の最大分裂部分トーラスを表す）．$\mathbb{Q}$ 上定義された G の指標全体を $X^*(G)_\mathbb{Q}$ と書き，$\mathfrak{a}_G=\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(X^*(G)_\mathbb{Q},\mathbb{R})$ とおく．同様に $\mathfrak{a}_M=\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(X^*(M)_\mathbb{Q},\mathbb{R})$ とすると，自然な直和分解 $\mathfrak{a}_M=\mathfrak{a}_G\oplus\mathfrak{a}_M^G$ が定まる．$\mathfrak{a}_M^G$ には $W(M)$ が作用するが，$\det(s-1)_{\mathfrak{a}_M^G}\neq 0$ となる $s\in W(M)$ 全体を $W(M)_{\mathrm{reg}}$ と書く．P は M を Levi 部分群として含む G の放物型部分群であり，$\mathcal{I}_P(0,-)$ はおおむね M の離散スペクトル $L^2_{\mathrm{disc}}(M)$ を G へと放物型誘導したものであり，$M_P(s,0)$ は絡作用素である．

$a^G(\gamma)$ は定数であり，γ が楕円半単純ならば $\mathrm{vol}\bigl(Z_G(\gamma)(\mathbb{Q})\backslash Z_G(\gamma)(\mathbb{A}_\mathbb{Q})^1\bigr)$ に一致する．また，$f\mapsto I(\gamma,f)$ は不変超関数（共役不変な超関数）であり，γ が半単純ならば軌道積分に一致する．

注 12 [Art13a] においては，パラメータ t によって無限小指標を制限した項 $I_{t,\mathrm{disc}}(f)$ を考えている．

$(*)$ の左辺の「M の寄与」は指標の変種を用いて帰納的に定義される不変超関数であり，右辺の「M の寄与」は軌道積分の変種を用いて帰納的に定義される不変超関数である．これらはいずれも，保型表現の指標や軌道積分と直接結び付けるのは困難である．このように，Arthur の跡公式は具体的な計算が極めて困難な項を含んでおり，実際に使用する際には，多くの場合，以下のいずれかの手順を踏むことになる：

- f に制限を加え，計算が困難な項が 0 になるという状況を考える（跡公式の単純化）.
- 2 つの群に対する跡公式を比べ，保型表現に対する情報を引き出す（跡公式の比較）.

跡公式の単純化は §5.1 で登場する．跡公式の比較の典型例としては，Arthur-Clozel [AC89] による GL_n の底変換の構成が挙げられる．これは，代数体の巡回拡大 E/F に対し，$\mathrm{GL}_{n,F}$ に対する跡公式と，$\mathrm{GL}_{n,E} \rtimes \mathrm{Gal}(E/F)$ に対する捻られた跡公式を比較することによって達成された.

しかし，この跡公式の比較を GL_n 以外の群に対して行おうとすると，新たな困難が発生する．§2.2 でも述べたように，G とそのエンドスコピー群 H など，異なる群の間で自然に対応があるのは共役類ではなく安定共役類であるという問題である（GL_n の場合は共役類と安定共役類が一致するので，[AC89] ではこの問題は無視することができた）．そこで，Arthur の跡公式をさらに書き換え，G およびそのエンドスコピー群上の安定超関数（安定軌道積分が一致する関数を同じ値にうつす超関数）によって $I^G_{\mathrm{disc}}(f)$ を記述できるようにしたのが以下の安定跡公式である.

定理 2.35 (安定跡公式). G の楕円的なエンドスコピー群 H に対し，H のみに依存した安定超関数 $S^H_{\mathrm{disc}}(-)\colon C^\infty_c(H(\mathbb{A}_\mathbb{Q})) \to \mathbb{C}$ が定まり，任意の $f \in C^\infty_c(G(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$ に対して以下を満たす：

$$I^G_{\mathrm{disc}}(f) = \sum_H \iota(G,H) S^H_{\mathrm{disc}}(f^H).$$

$\iota(G,H)$ の定義は [Kot84, §8] 等を参照．また，f^H は f に対応する $C^\infty_c(H(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$ の元 (§2.2 参照）を表す.

例えば，半単純元 $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ に対し，軌道積分 $O_\gamma(f)$ は一般に安定的でない不変超関数であるが，G の各エンドスコピー群 H 上の安定軌道積分 $SO_{\gamma^H}(f^H)$（これは明らかに安定超関数である）の線型結合で表すことができる ([Kot86])．定理 2.35 は，このようなことが G の Arthur 跡公式に出てくる全ての項で可能であり，さらに安定化した結果が G に対し帰納的な構造をしていることを主張している．定理 2.35 は [Art02], [Art01], [Art03] によって，基本補題とその変種の成立を仮定した上で証明された.

§2.2 で考えたような「捻られた群」に対しても Arthur の跡公式は確立されている．これに対する定理 2.35 の類似は，[Art13a] が出版された時点では「自然な期待」として仮定されていたが，その後の Mœglin-Waldspurger の研究 [MW16a], [MW16b] により，基本補題とその変種の成立の仮定のもとで証明された.

注意 2.36. 既に述べたように基本補題は解決済みであるが，実は「重み付き基本補題」と呼ばれる基本補題の変種については，分裂的な代数群に対してしか証明が書かれてい

ない ([CL10], [CL12])．このため，定理 2.35 およびその類似の証明は（したがって Arthur 予想の証明自体も），現時点では未完成ということになる．このことに関する Mœglin と Waldspurger の見解が [MW16b] の序文の最後（xxviii ページ）に書かれているので，興味をお持ちの方はご覧いただきたい．

本稿ではこの問題にはこれ以上立ち入らず，以下では定理 2.35 およびその類似が正しいものとみなして話を進めることにする．

さて，捻られた群 (GL_N,θ) とそのエンドスコピー群の安定跡公式を比較することで，$I_{\mathrm{disc}}^{(\mathrm{GL}_N,\theta)}$ を $\{I_{\mathrm{disc}}^H \mid H$ は (GL_N,θ) のエンドスコピー群 $\}$ を用いて表すことができる．H が単純エンドスコピー群（定義 2.26 参照）でない場合には，帰納法の仮定から I_{disc}^H は十分に理解できているはずなので，結局 $I_{\mathrm{disc}}^{(\mathrm{GL}_N,\theta)}$ と単純エンドスコピー群 H に対する I_{disc}^H が結び付くことになる．この等式を適切なテスト関数に対して適用することで，GL_N の保型表現と古典群の保型表現の関係が分かり，定理 2.32 が証明できるというのが非常に大雑把な証明の流れである．

もちろん実際の証明はこれほど単純ではない．例えば，I_{disc}^H には H の Levi 部分群からの寄与があったため，その部分をコントロールするために，さらに帰納法の仮定を増やして議論を進める必要がある（[Art13a, §2.4] 参照）．しかし，著者の力不足のため，本稿では証明のアイデアをこれ以上説明するのは困難である．より詳細な内容については [Art13a] をご覧いただきたい．

§2.6. 準分裂的でない場合

本節の最後に，最近進展しつつある，準分裂でない連結代数簡約群 G に対する Arthur 分類について簡単に紹介する．大雑把に言うと，準分裂でない場合には以下の 2 点が問題となる：

- 移送因子をどのように正規化するのか．これが決まらないとエンドスコピー指標関係式が書けず，局所 Arthur 分類の定式化ができない．
- 準分裂でない場合には，局所 A パケット Π_ψ の元に $\widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ を用いたラベル付けができず，局所 Arthur 分類の主張に修正が必要である．例えば G が非アルキメデス局所体上の SL_2 の内部形式である場合に，L パラメータ ϕ に対し Π_ϕ と $\widehat{\mathfrak{S}}_\phi$ の元の個数が異なる例が存在する（[She79, §12] 参照）．

これらはともに局所的な問題であるため，以下では F を標数 0 の局所体とし，G を F 上の連結簡約代数群とする．上記の問題は，G に付加構造を付けることで解決できると考えられている．それを説明する前にまず，内部形式に関する事項を思い出しておこう．

定義 2.37. F を体とし，G を F 上の連結簡約代数群とする．

(i) G' を F 上の代数群とする．$\overline{F}$ 上の代数群の同型 $\xi\colon G\otimes_F \overline{F}\to G'\otimes_F\overline{F}$ が内部捻りであるとは，任意の $\sigma\in\Gamma_F$ に対し $\xi^{-1}\sigma(\xi)$ が $G\otimes_F\overline{F}$ の内部自己同型となることをいう．組 (G',ξ) を G の内部形式という．

(ii) 内部形式 (G', ξ) および $\sigma \in \Gamma_F$ に対し，$\xi^{-1}\sigma(\xi) = \mathrm{Ad}(g_\sigma)$ で $g_\sigma \in G_{\mathrm{ad}}(\overline{F})$ を定めると，$\sigma \mapsto g_\sigma$ は 1 コサイクルを定める．これを c_ξ と書き，そのコホモロジー類を $[c_\xi] \in H^1(F, G_{\mathrm{ad}})$ と表す．この対応により，G の内部形式の同型類は $H^1(F, G_{\mathrm{ad}})$ で分類されることが分かる．

さて，G に対する付加構造としては，Vogan による純内部形式，Kottwitz による拡大純内部形式，Kaletha によるリジッド内部形式の 3 つが知られており，この順に一般的になる．これらについて順に説明を行う．以下では，F 上の準分裂連結簡約代数群 G^* を固定する．

■純内部形式　G^* の純内部形式とは，G^* の内部形式 (G, ξ) および 1 コサイクル $z\colon \Gamma_F \to G^*(\overline{F})$ の組 (G, ξ, z) で，自然な写像 $H^1(F, G^*) \to H^1(F, G^*_{\mathrm{ad}})$ による $[z]$ の像が $[c_\xi]$ に一致するものをいう．純内部形式の同型を適切に定めると，その同型類が $H^1(F, G^*)$ で分類できるようになる（詳細は省略）．

$H^1(F, G^*) \to H^1(F, G^*_{\mathrm{ad}})$ は一般に単射ではないので，純内部形式は内部形式 (G, ξ) に新たなデータ z を付加したものと見ることができる．一方，$H^1(F, G^*) \to H^1(F, G^*_{\mathrm{ad}})$ は全射でもないので，全ての内部形式が純内部形式の構造を持つわけではない．

例 2.38.　F が非アルキメデス的であるとする．

(i) $G^* = \mathrm{GL}_n$ のとき，$H^1(F, \mathrm{GL}_n) = 1$ であるから，GL_n の純内部形式は全て自明なもの $(\mathrm{GL}_n, \mathrm{id}, 1)$ と同型である．一方 $H^1(F, \mathrm{PGL}_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ であるから，GL_n には非自明な内部形式も存在し，それらは純内部形式の構造を持たない．

(ii) G^* が奇数次準分裂ユニタリ群であるとき，$H^1(F, G^*) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H^1(F, G^*_{\mathrm{ad}}) = 1$ となるので，G^* の内部形式は全て自明なものと同型であるが，純内部形式の同型類は 2 つあることが分かる．

純内部形式 (G, ξ, z) が与えられたとき，G^* の移送因子の正規化に合わせて G の移送因子を正規化することができる（[Kal11, §2.2] 参照）．特に，G^* の Whittaker データを与えると G の移送因子も正規化することができる．

次に，$\widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ をどのように変更するかを述べる．Kottwitz 写像

$$\kappa_G\colon H^1(F, G^*) \to \pi_0(Z(\widehat{G}^*)^{\Gamma_F})^D$$

(π_0 は連結成分のなす群を表し，$(-)^D$ は有限群の Pontrjagin 双対 $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{C}^\times)$ を表す）により，$[z] \in H^1(F, G^*)$ は $\pi_0(Z(\widehat{G}^*)^{\Gamma_F}) = \pi_0(Z(\widehat{G})^{\Gamma_F})$ の指標 ω を定める．そこで，A パラメータ $\psi\colon L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$ に対し，$\pi_0(C_\psi)$ の既約指標 ρ で $\rho|_{\pi_0(Z(\widehat{G})^{\Gamma_F})} = (\dim \rho)\omega$ を満たすもの全体を $\mathrm{Irr}(\pi_0(C_\psi), \omega)$ と書き，$\widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ の代わりに $\mathrm{Irr}(\pi_0(C_\psi), \omega)$ を用いる．$(G, \xi, z) = (G^*, \mathrm{id}, 1)$ のときは $\omega = 1$ であり，$\pi_0(C_\psi)/\,\mathrm{Im}(\pi_0(Z(\widehat{G})^{\Gamma_F}) \to \pi_0(C_\psi)) = \pi_0(C_\psi/Z(\widehat{G})^{\Gamma_F}) = \mathfrak{S}_\psi$ であるから $\mathrm{Irr}(\pi_0(C_\psi), 1) = \widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ となって以前の定義と一致する．期待される指標関係式の形については [Kal11, §3.4] を参照．

最後に，大域的な理論との関係について述べる．F を代数体とし，G^* を F 上の準分裂連結簡約代数群とすると，G^* の純内部形式 (G,ξ,z) を同様に考えることができる．F の各素点 v に対し，v での局所化 (G_v,ξ_v,z_v) は F_v 上の純内部形式となる．$[z_v]$ の定める $\pi_0(Z(\widehat{G})^{\Gamma_{F_v}})$ の指標を ω_v とすると，z が大域的なコホモロジーの元から来ていることから，積公式 $\prod_v \omega_v|_{\pi_0(Z(\widehat{G})^{\Gamma_F})}=1$ が成り立つ．このことから，大域 A パラメータ ψ および $\pi\in\Pi_\psi$ に対し，写像 $\prod_v\langle(-)_v,\pi_v\rangle\colon \pi_0(C_\psi)\to\mathbb{C}$ は $\pi_0(C_\psi/Z(\widehat{G})^{\Gamma_F})$ を経由することが分かる．さらに $H^1(L_F,Z(\widehat{G}))\to\prod_v H^1(L_{F_v},Z(\widehat{G}))$ が単射ならば，注意 2.20 より $\pi_0(C_\psi/Z(\widehat{G})^{\Gamma_F})=\mathfrak{S}_\psi$ となり，写像 $\langle -,\pi\rangle\colon\mathfrak{S}_\psi\to\mathbb{C}$ が定まる．これについて予想 2.22 と同様のことが期待されている．

■拡大純内部形式　拡大純内部形式とは，純内部形式の定義における $H^1(F,G^*)$ をもっと大きな集合 $B(F,G^*)_{\mathrm{basic}}$ に置き換えることで，扱える内部形式の範囲を増やしたものである．F が非アルキメデス的であるとし，F の最大不分岐拡大の完備化を L と書く．F 上の連結簡約代数群 G に対し，$B(F,G)=H^1(W_F,G(\overline{L}))$ とおく．$B(F,G)_{\mathrm{basic}}$ は $B(F,G)$ の部分集合であり，以下の性質を満たすようなものである：

(i) $G\to G'$ を F 上の連結簡約代数群の正規準同型（像が正規部分群となる準同型）とするとき，自然な写像 $B(F,G)\to B(F,G')$ は $B(F,G)_{\mathrm{basic}}\to B(F,G')_{\mathrm{basic}}$ を誘導する．

(ii) 自然な単射 $H^1(F,G)\to H^1(W_F,G(\overline{L}))$ の像は $B(F,G)_{\mathrm{basic}}$ に含まれる．

(iii) Kottwitz 写像 $\kappa_G\colon H^1(F,G)\to\pi_0(Z(\widehat{G})^{\Gamma_F})^D$ は $\kappa_G\colon B(F,G)\to X^*(Z(\widehat{G})^{\Gamma_F})$ に延長でき，その $B(F,G)_{\mathrm{basic}}$ への制限は同型である．

(iv) $G=G_{\mathrm{ad}}$ のとき，$H^1(F,G)=B(F,G)_{\mathrm{basic}}$ である．

(iv) は (iii) から容易に導かれる．実際，$G=G_{\mathrm{ad}}$ なら $Z(\widehat{G})$ は有限なので $\pi_0(Z(\widehat{G})^{\Gamma_F})^D=X^*(Z(\widehat{G})^{\Gamma_F})$ が成り立つ．

以前の通り，G^* を F 上の準分裂連結簡約代数群とする．(i) と (iv) から $B(F,G^*)_{\mathrm{basic}}\to B(F,G^*_{\mathrm{ad}})_{\mathrm{basic}}=H^1(F,G^*_{\mathrm{ad}})$ という写像が定まるので，$B(F,G^*)_{\mathrm{basic}}$ の元から G^* の内部形式の同型類が定まることになる．G^* の内部形式 (G,ξ) と 1 コサイクル $z\in Z^1(W_F,G^*(\overline{L}))$ の組 (G,ξ,z) で以下の条件を満たすものを G^* の拡大純内部形式と呼ぶ：

> z のコホモロジー類 $[z]$ は $B(F,G^*)_{\mathrm{basic}}$ の元であり，その $H^1(F,G^*_{\mathrm{ad}})$ における像は $[c_\xi]$ と一致する．

拡大純内部形式の同型を適切に定めると，その同型類が $B(F,G^*)_{\mathrm{basic}}$ で分類できるようになる．

例 2.39.　$G^*=\mathrm{GL}_n$ の場合，$X^*(Z(\widehat{G}^*)^{\Gamma_F})=X^*(\mathbb{G}_m)=\mathbb{Z}$ であるから，GL_n の拡大純内部形式は整数でパラメータ付けられる．写像 $\mathbb{Z}=B(F,\mathrm{GL}_n)_{\mathrm{basic}}\to H^1(F,\mathrm{PGL}_n)=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は自然な全射となる．特に，GL_n の内部形式は全て拡大純内部形式の構造を持つことが分かる．より一般に，$Z(G^*)$ が連結ならば $B(F,G^*)\to H^1(F,G^*_{\mathrm{ad}})$ は全射となることが知られているため ([Kot14, Proposition 10.4])，G^* の全ての内部形式は拡大純内部

形式の構造を持つ．

一方，$G^* = \mathrm{SL}_n$ の場合 $X^*(Z(\widehat{G}^*)^{\Gamma_F}) = 1$ であるから，SL_n の拡大純内部形式は自明なものしか存在しない．よって，SL_n の非自明な内部形式は拡大純内部形式の理論では扱うことができない．

拡大純内部形式に対しても，移送因子の正規化が可能である．[Kal14, §2.3] 参照．また，$\widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ の変更についても，$H^1(F, G^*)$ を $B(F, G^*)_{\mathrm{basic}}$ で置き換えることで同様になされる．すなわち，$[z] \in B(F, G^*)_{\mathrm{basic}}$ が $Z(\widehat{G})^{\Gamma_F}$ の指標 ω を定めるので，A パラメータ $\psi\colon L_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$ に対し，C_ψ の既約指標 ρ で $\rho|_{Z(\widehat{G})^{\Gamma_F}} = (\dim\rho)\omega$ を満たすもの全体を $\mathrm{Irr}(C_\psi, \omega)$ と書き，$\widehat{\mathfrak{S}}_\psi$ の代わりに $\mathrm{Irr}(C_\psi, \omega)$ を用いる．

ここでは F が非アルキメデス的としていたが，F が $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ の場合，および代数体の場合にも $B(F, G^*)_{\mathrm{basic}}$ に関する類似の理論が Kottwitz によって構築されており ([Kot14])，それを用いることで大域 Arthur 分類の予想を（$H^1(L_F, Z(\widehat{G})) \to \prod_v H^1(L_{F_v}, Z(\widehat{G}))$ が単射であるという仮定のもとで）定式化することが可能である．この定式化のもとで，Kaletha-Minguez-Shin-White [KMSW14] により，以下の定理がアナウンスされている：

定理 2.40. 準分裂とは限らないユニタリ群に対し，局所 Arthur 分類および大域 Arthur 分類が成り立つ．

注意 2.41. [KMSW14] では定理 2.40 の証明は完成していない（$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 成分への制限が非自明であるような A パラメータに対応する局所 A パケットを扱っておらず，また，大域の場合に扱っていないユニタリ群がある）．続編として Kaletha-Minguez-Shin による 2 つの論文が準備中であり，それらを合わせて完結するとのことである．以下では，定理 2.40 が成り立つものとして話を進める．

■リジッド内部形式 例 2.39 にもあるように，G^* の中心が連結でない場合には，拡大純内部形式の理論によって捉えられない内部形式が存在する可能性がある．また，純内部形式のところで述べたように，局所と大域を繋ぐためには，$H^1(L_F, Z(\widehat{G})) \to \prod_v H^1(L_{F_v}, Z(\widehat{G}))$ が単射であるという仮定が必要になる．これらの条件を外し，完全に一般の設定において内部形式を扱うために考案されたのがリジッド内部形式である．大雑把に言えば，これは純内部形式の定義における $H^1(F, G^*)$ を新たなコホモロジー $H^1(u \to W, Z \to G^*)$ に置き換えたものである．このコホモロジーについて簡単に説明する．

まず，u は可換な副代数群 $\varprojlim_{E/F,n} \mathrm{Coker}(\mu_n \to \mathrm{Res}_{E/F}\,\mu_n)$ (E/F は F の有限次 Galois 拡大を動く）である．$H^2(\Gamma_F, u)$ は F が非アルキメデス的なとき $\widehat{\mathbb{Z}}$ と，F が $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ のとき $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と自然に同型になる ([Kal16, Theorem 3.1])．この同型で -1 にうつる $H^2(\Gamma_F, u)$ の元を考え，それに対応する中心拡大を $1 \to u \to W \to \Gamma_F \to 1$ とおく．

$Z(G^*)$ の有限部分代数群 Z を固定し，連続 1 コサイクル $z\colon W \to G^*(\overline{F})$ で $z|_u$ が u から Z への代数的な準同型となるもの全体を $Z^1(u \to W, Z \to G^*)$ とおく．これをコバウンダリーによる同値関係で割って得られる基点付き集合を $H^1(u \to W, Z \to G^*)$ と書く．$\bar{G}^* = G^*/Z$ とおくと，自然な写像 $H^1(u \to W, Z \to G^*) \to H^1(F, \bar{G}^*)$ がある．

$H^1(F,\bar{G}^*)\to H^1(F,G^*_{\mathrm{ad}})$ と合成することで，写像 $H^1(u\to W,Z\to G^*)\to H^1(F,G^*_{\mathrm{ad}})$ が得られる．

G^* のリジッド内部形式とは，G^* の内部形式 (G,ξ) と，ある有限部分代数群 $Z\subset Z(G^*)$ に対する 1 コサイクル $z\in Z^1(u\to W,Z\to G^*)$ の組 (G,ξ,z) で，$[z]\in H^1(u\to W,Z\to G^*)$ の $H^1(F,G^*_{\mathrm{ad}})$ における像が $[c_\xi]$ に一致するようなもののこととする．

Z が G^* の導来群の中心を含むとき，写像 $H^1(u\to W,Z\to G^*)\to H^1(F,G^*_{\mathrm{ad}})$ は全射であることが知られている ([Kal16, Corollary 3.8])．したがって，全ての内部形式はリジッド内部形式の構造を持つことになる．そのため，現在ではこのリジッド内部形式の理論が決定版であると考えられているようである．

リジッド内部形式に対する移送因子の正規化については [Kal16, §5.3] を参照．パケットを記述する際には，C_ψ の代わりに，$C_\psi\subset\widehat{G}$ の $\widehat{\bar{G}}{}^*\to\widehat{G}^*=\widehat{G}$ による逆像が用いられる．詳細は [Kal16, §5.4] を参照されたい．SL_2 の内部形式の L パケットをリジッド内部形式の文脈でどのように捉えるかについては，[Kal16, §5.4, Example] に記述がある．また，局所と大域を結ぶ部分は，[Kal15] において扱われている．[Taï17b] も参照．

§ 3. 志村多様体のエタールコホモロジー

§ 3.1. 志村多様体の復習

本節では，Arthur 分類と志村多様体のエタールコホモロジーの関係について紹介する．まず，志村多様体についてごく簡単に復習を行う．詳細は [Del71], [Mil05] 等をご覧いただきたい．以下では $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ のことを単に $\mathbb{A}$ と書き，$\mathbb{A}^\infty$ で有限アデール環 $\widehat{\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ を表す．

(G,X) を志村データとする．これは以下のような 2 つ組であった：

- G は $\mathbb{Q}$ 上の連結簡約代数群．
- X は準同型 $h\colon \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m\to G_{\mathbb{R}}$ でいくつかの条件 ([Mil05, p. 302 の SV1, SV2, SV3]) を満たすものの $G(\mathbb{R})$ 共役類．Hermite 対称空間いくつかの直和となる．

合成 $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}\xrightarrow{z\mapsto(z,1)}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}\times\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}\cong(\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\xrightarrow{h_{\mathbb{C}}}G_{\mathbb{C}}$ を μ と書く．μ の $G(\mathbb{C})$ 共役類の定義体は $\mathbb{Q}$ の有限次拡大となることが知られている．これを (G,X) のレフレックス体と呼び，$E(G,X)$ または単に E と書く．

(G,X) に対し，志村多様体と呼ばれる E 上の代数多様体の射影系が自然に定まる．これは $G(\mathbb{A}^\infty)$ の十分小さなコンパクト開部分群 K で添字付けられた E 上滑らかな代数多様体の射影系 $\{\mathrm{Sh}_K\}_{K\subset G(\mathbb{A}^\infty)}$ であり，以下のような性質を持っている：

- $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})\cong G(\mathbb{Q})\backslash X\times G(\mathbb{A}^\infty)/K$．
- $\{\mathrm{Sh}_K\}_{K\subset G(\mathbb{A}^\infty)}$ は $G(\mathbb{A}^\infty)$ の右作用（Hecke 作用）を持ち，$g\in G(\mathbb{A}^\infty)$ の $\mathbb{C}$ 値点への作用は上の同型を通して

$$G(\mathbb{Q})\backslash X\times G(\mathbb{A}^\infty)/K\to G(\mathbb{Q})\backslash X\times G(\mathbb{A}^\infty)/g^{-1}Kg;\quad [x,a]\mapsto[x,ag]$$

  と一致する．

$\{\mathrm{Sh}_K\}_{K\subset G(\mathbb{A}^\infty)}$ を一意的に特徴付ける方法も知られているが（正準モデルの理論），ここでは述べない[注 13].

以下の例が示すように，志村多様体は種々のモジュラー多様体の一般化となっている．

例 3.1. $G=\mathrm{GL}_2$ とし，$h\colon \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m\to\mathrm{GL}_{2,\mathbb{R}}$ を $a+bi\mapsto\left(\begin{smallmatrix}a&b\\-b&a\end{smallmatrix}\right)$ で定める．このとき $X=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ となる．レフレックス体 E は $\mathbb{Q}$ に一致し，$\{\mathrm{Sh}_K\}_{K\subset\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty)}$ はモジュラー曲線となる．

例 3.2. $n\geq 1$ とし，$G=\mathrm{GSp}_{2n}$ とする．ただし，GSp_{2n} は交代行列 $\left(\begin{smallmatrix}0&1_n\\-1_n&0\end{smallmatrix}\right)$ から定まる斜交形式に伴う一般斜交群とする．$h\colon \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m\to\mathrm{GSp}_{2n,\mathbb{R}}$ を $a+bi\mapsto\left(\begin{smallmatrix}a1_n&b1_n\\-b1_n&a1_n\end{smallmatrix}\right)$ で定める．このとき $X=\mathfrak{H}_n^\pm$（n 次 Siegel 上半空間・下半空間の合併）となる．レフレックス体 E は $\mathbb{Q}$ に一致し，$\{\mathrm{Sh}_K\}_{K\subset\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{A}^\infty)}$ は Siegel モジュラー多様体となる．

上記の例以外に，Hilbert モジュラー多様体や志村曲線，Picard モジュラー曲面も志村多様体の一種とみなすことができる．

また，以下に挙げるユニタリ型志村多様体は，次節で解説する Galois 表現の構成に重要な役割を果たす．

例 3.3. E を虚二次体，F^+ を総実体とし，$F=EF^+$ とおく．E,F の複素共役を c で表す．埋め込み $E\hookrightarrow\mathbb{C}$ を固定しておく．B を F 上の中心的単純環とし，$*$ を B の正な対合で $*|_F=c$ を満たすものとする．$V\neq 0$ を F 上有限次元な B 加群とし，$\langle\ ,\ \rangle\colon V\times V\to\mathbb{Q}$ を $\langle x,y\rangle=-\langle y,x\rangle$, $\langle bx,y\rangle=\langle x,b^*y\rangle$ $(x,y\in V, b\in B)$ を満たす非退化ペアリングとする．

$\mathbb{Q}$ 上の代数群 G を以下で定める：$\mathbb{Q}$ 代数 R に対し，

$$G(R)=\{g\in\mathrm{GL}_B(V\otimes_{\mathbb{Q}}R)\mid \langle gx,gy\rangle=\lambda(g)\langle x,y\rangle \text{ となる } \lambda(g)\in R^\times \text{ が存在する }\}.$$

$G\to\mathbb{G}_m;\ g\mapsto\lambda(g)$ の核を G_0 と書く．$n=(\dim_F\mathrm{End}_B(V))^{1/2}$ とおくと，$G_{0,\mathbb{R}}\cong\prod_{\tau\colon F^+\hookrightarrow\mathbb{R}}\mathrm{U}(p_\tau,q_\tau)$ $(p_\tau+q_\tau=n)$ である．簡単のため，ある埋め込み $\tau_0\colon F^+\hookrightarrow\mathbb{R}$ に対して $p_{\tau_0},q_{\tau_0}>0$ であり，$\tau\neq\tau_0$ に対して $p_\tau=0$ であると仮定する．

$h\colon \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m\to G_{\mathbb{R}}=\mathrm{G}(\mathrm{U}(p_{\tau_0},q_{\tau_0})\times\mathrm{U}(0,n)^{[F^+:\mathbb{Q}]-1})$ を以下で定める：

$$z\mapsto\left(\begin{pmatrix}z1_{p_{\tau_0}}&0\\0&\overline{z}1_{q_{\tau_0}}\end{pmatrix},\overline{z},\ldots,\overline{z}\right).$$

このとき，h の $G(\mathbb{R})$ 共役類を X とおくと (G,X) は志村データとなる．レフレックス体は

$$\begin{cases}F\overset{\tau_0}{\hookrightarrow}\mathbb{C} & (p_{\tau_0}\neq q_{\tau_0}\text{ のとき})\\ F^+\overset{\tau_0}{\hookrightarrow}\mathbb{C} & (p_{\tau_0}=q_{\tau_0}\text{ のとき})\end{cases}$$

となる．$\dim\mathrm{Sh}_K=p_{\tau_0}q_{\tau_0}$ である．$F^+\neq\mathbb{Q}$ ならば志村多様体 Sh_K はコンパクトとなる．

[注 13] 正準モデルの定義には文献によって若干のずれがあるが，ここでは [Mil05] における定義を採用する．これは [Del79] における定義とは正規化が異なっている．

素数 ℓ および体の同型 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ を固定する．G の既約代数的表現 ξ である種の条件を満たすもの [注 14] に対し，Sh_K 上の ℓ 進エタール層 $\mathcal{L}_\xi$ を自然に定めることができる．$\mathcal{L}_\xi$ は $G(\mathbb{A}^\infty)$ の Hecke 作用に関して同変的になる．

Sh_K は極小コンパクト化と呼ばれる自然なコンパクト化 $j\colon \mathrm{Sh}_K \hookrightarrow \mathrm{Sh}_K^{\min}$ を持つことが知られている（$\mathrm{Sh}_K^{\min}$ は一般には滑らかとは限らない）．このコンパクト化に関する i 次交叉コホモロジー $IH^i(\mathrm{Sh}_{K,\overline{E}}, \mathcal{L}_\xi) = H^i(\mathrm{Sh}_{K,\overline{E}}^{\min}, j_{!*}\mathcal{L}_\xi)$ を考える．レベル K を動かした極限

$$IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}}, \mathcal{L}_\xi) = \varinjlim_K IH^i(\mathrm{Sh}_{K,\overline{E}}, \mathcal{L}_\xi)$$

は $G(\mathbb{A}^\infty) \times \Gamma_E$ の表現となる．この表現を Arthur 分類によって記述することが本節のテーマである．

まずはじめに，Γ_E の作用を忘れ，$IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}}, \mathcal{L}_\xi)$ を $G(\mathbb{A}^\infty)$ の表現と見るとどうなるかを考えよう．$G(\mathbb{A}^\infty)$ の作用は幾何学的なものであるから，$\mathbb{C}$ 上に移って考えればよい．$\mathbb{C}$ 上では志村多様体 Sh_K は複素多様体 $G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}^\infty)/K$ と同一視でき，後者は Hermite 対称空間の数論的商いくつかの直和となる．したがって Zucker 予想 ([SS90], [Loo88]) により，$IH^i(\mathrm{Sh}_{K,\overline{E}}, \mathcal{L}_\xi)$ は $G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}^\infty)/K$ の（適切な係数付き）L^2 コホモロジーと同型であることが分かる．このような L^2 コホモロジーは [BC83]（Sh_K がコンパクトな場合は [BW00, Chapter VII]）によって計算されている（[Art89b, §9.1] も参照）．以上をまとめると，次の定理を得る：

定理 3.4. $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とし，$h\colon \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m \to G_\mathbb{R}$ の $G(\mathbb{R})$ における安定化群を K_h とおくと，$G(\mathbb{A}^\infty)$ の表現として以下の同型がある：

$$IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}}, \mathcal{L}_\xi) \cong \bigoplus_{\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)} \pi^\infty \otimes H^i(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K_h; \pi_\infty \otimes \xi).$$

注意 3.5. 上の定理に現れる保型表現は中心指標がユニタリであるとは限らない．そのため，$\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ の定義は前節のものから修正が必要である（指標で捻ればよい）．次小節の内容のためには，これに合わせて Arthur 分類の定式化も修正する必要があるが，ここでは省略する．

§ 3.2. Kottwitz の予想

Kottwitz は [Kot90] において，$IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}}, \mathcal{L}_\xi)$ の $G(\mathbb{A}^\infty) \times \Gamma_E$ 表現としての既約分解を Arthur 分類を用いて記述する予想を提出した．本小節ではその主張を説明する．以下では再び，大域 Langlands 群の存在を仮定する．さらに，以下の 2 条件を仮定する：

- G の導来群は単連結である．
- $Z(G)$ の $\mathbb{Q}$ 上分裂的な部分トーラスで最大のものを $Z_0(G)$ とすると，$Z_0(G)_\mathbb{R}$ は $Z(G)_\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}$ 上分裂的な部分トーラスで最大のものとなる [注 15]．

[注 14] 次節以降で考察する志村多様体に対しては，任意の既約代数的表現 ξ がこの条件を満たすため，あまり気にしなくてよい．

[注 15] この条件は PEL 型志村多様体，あるいはより一般に Hodge 型志村多様体ならば満たされる．

志村データから余指標 $\mu\colon \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ が（共役を除いて）定まっているのであった．これは $\widehat{G}$ の極大トーラスの指標（これも μ と書く）と同一視できる．この指標を最高ウェイトに持つような $\widehat{G}$ の既約代数的表現を $r_\mu\colon \widehat{G} \to \mathrm{GL}(V_\mu)$ と書く．レフレックス体の定義より，r_μ は準同型 $\widehat{G} \rtimes \Gamma_E \to \mathrm{GL}(V_\mu)$ に延長することができる．この準同型も r_μ と書く．

$\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)$ および S_ψ の指標 ν で $\nu|_{Z(\widehat{G})} = \mu|_{Z(\widehat{G})}$ を満たすものをとる．このとき，まず

$$L_E \xrightarrow{\phi_\psi|_{L_E}} \widehat{G} \rtimes W_E \to \widehat{G} \rtimes \Gamma_E \xrightarrow{r_\mu} \mathrm{GL}(V_\mu)$$

の合成に $|-|^{d/2}$（d は志村多様体の次元）をテンソルすることによって L_E の有限次元半単純表現 $r_\mu(\psi)$ が得られる．ここで，$|-|$ は Hecke 指標 $|-|\colon \mathbb{A}_E^\times/E^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対応する L_E の指標である．次に $\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ によるウェイト分解 $r_\mu(\psi) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} r_\mu^i(\psi)$ を考える．さらに，$S_\psi \subset \widehat{G}$ が $\mathrm{End}_{L_E}(r_\mu^i(\psi))$ の元を与えることが確認できるので（[Kot90, p. 200] 参照），$r_\mu^i(\psi)$ の ν 部分 $r_\mu^i(\psi)[\nu]$ をとることができる．$r_\mu^i(\psi)[\nu]$ に対応する ℓ 進表現の双対が志村多様体の $d+i$ 次交叉コホモロジーに寄与すると期待されている．なお，大域 Langlands 群の表現と ℓ 進 Galois 表現の対応の定義は以下で与えられる：

定義 3.6. $\phi\colon L_E \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を半単純表現とする．半単純 ℓ 進表現 $R\colon \Gamma_E \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ が ϕ に対応するとは，E の有限個を除いた有限素点 v に対し以下の条件が成り立つことをいう：

> $\phi_v\colon L_{E_v} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ に対応する $\mathrm{GL}_n(E_v)$ の表現 π_v および $R_v\colon \Gamma_{E_v} \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ はともに不分岐であり，π_v の佐武パラメータと $R_v(\mathrm{Frob}_v)$ の固有値が一致する．

定理 3.4 から分かるように，$IH^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}}, \mathcal{L}_\xi)$ に寄与する保型表現 π はその無限成分 π_∞ が ξ に関してコホモロジー的なものに限る．これに対応する $\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)$ の条件を考える．

定義 3.7. $\psi \in \Psi(G)$ が ξ に関してコホモロジー的であるとは，以下の条件を満たすことをいう：

> ψ_∞ に対応する $G(\mathbb{R})$ の A パケット Π_{ψ_∞} の中に，$H^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_h; \pi_\infty \otimes \xi) \neq 0$ を満たす元 π_∞ が存在する．

この条件は ψ_∞ に関する代数的な条件で書き直すこともできる．[Kot90, p. 194] 参照．

ψ が ξ に関してコホモロジー的であるとき，ψ_∞ は離散的となり，さらに S_{ψ_∞} はアーベル群となることが知られている．したがって ψ も離散的であり，S_ψ もアーベル群となる．ξ に関してコホモロジー的な ψ 全体のなす $\Psi_{\mathrm{disc}}(G)$ の部分集合を $\Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi$ と書くことにする．

$\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi$ とする．このとき，$\pi_\infty \in \Pi_{\psi_\infty}$ および $\mu\colon \widehat{G} \to \mathbb{G}_m$ を用いて S_{ψ_∞} の指標 λ_{π_∞} を定義することができる．これの構成を $\psi_\infty|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = 1$ の場合に簡単に紹介する．

なお，このとき Π_{ψ_∞} は $\xi^\vee$ と同じ中心指標および無限小指標を持つような離散系列表現全体のなす離散的 L パケットである．

$G(\mathbb{R})$ が離散系列表現を持つことから，$G_{\mathbb{R}}$ には楕円的な極大トーラスが存在することが分かる．楕円的な極大トーラス T を一つとり固定し，$(G_{\mathbb{R}}, T)$ に関する Weyl 群を $\Omega_{\mathbb{R}}$ と書く．また，$T_{\mathbb{C}}$ を含む $G_{\mathbb{C}}$ の Borel 部分群全体を $\mathcal{B}$ と書く．このとき，Π_{ψ_∞} は $\Omega_{\mathbb{R}}\backslash\mathcal{B}$ でパラメータ付けられる．$\pi_\infty \in \Pi_{\psi_\infty}$ を与える $B \in \mathcal{B}$ をとると，$G_{\mathbb{C}}$ の Borel 対 $(T_{\mathbb{C}}, B)$ が得られる．

一方，L パラメータ $\psi_\infty\colon W_{\mathbb{R}} \to {}^LG$ から $\widehat{G}$ の Borel 対 $(\widehat{S}, \widehat{B})$ が以下のように定まる．$\widehat{S}$ は $\psi_\infty(W_{\mathbb{C}})$ の $\widehat{G}$ における中心化群である．$\psi_\infty|_{W_{\mathbb{C}}}\colon W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times \to \widehat{S}$ を

$$\psi_\infty(z) = z^{\Lambda}\overline{z}^{\Lambda'} := z^{\Lambda-\Lambda'}(z\overline{z})^{\Lambda'} \quad (\Lambda, \Lambda' \in X_*(\widehat{S}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C},\ \Lambda - \Lambda' \in X_*(\widehat{S}))$$

と書く．$\widehat{B}$ は $\widehat{S}$ を含む Borel 部分群で Λ が支配的になるようなものである．

(T, B), $(\widehat{S}, \widehat{B})$ から同型 $\widehat{T} \xrightarrow{\cong} \widehat{S}$ が定まり，これによって同型 $\widehat{T}^{\Gamma_{\mathbb{R}}}Z(\widehat{G}) \xrightarrow{\cong} S_{\psi_\infty}$ が誘導される．μ を $\widehat{T}$ の指標とみなして $\widehat{T}^{\Gamma_{\mathbb{R}}}Z(\widehat{G})$ に制限し，同型でうつすことで S_{ψ_∞} の指標が得られる．これを λ_{π_∞} と書く．構成より明らかに，$\lambda_{\pi_\infty}|_{Z(\widehat{G})} = \mu|_{Z(\widehat{G})}$ である．$\psi_\infty|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \neq 1$ の場合の構成もおおむね同様である．[Kot90, p. 195] 参照．

$\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi$ に対し，Π_{ψ^∞} を

$$\Pi_{\psi^\infty} = \Bigl\{ \bigotimes_{v<\infty} \pi_v \Bigm| \pi_v \in \Pi_{\psi_v},\ \text{ほとんど全ての } v \text{ に対し } \pi_v \text{ は不分岐} \Bigr\}$$

と定める．また，$\pi^\infty \in \Pi_{\psi^\infty}$ に対し，$\pi_\infty \in \Pi_{\psi_\infty}$ をとり，S_ψ の指標 ν_{π^∞} を

$$x \mapsto \lambda_{\pi_\infty}(x_\infty)\varepsilon_\psi(x)\langle x, \pi^\infty \otimes \pi_\infty\rangle$$

で定める．この指標は π_∞ のとり方によらず，$\nu_{\pi^\infty}|_{Z(\widehat{G})} = \mu|_{Z(\widehat{G})}$ を満たす．

以上の準備のもとで，Kottwitz の予想を述べることができる：

予想 3.8 ([Kot90, §10])**.**

(i) $\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi$, $\pi^\infty \in \Pi_{\psi^\infty}$ および整数 i に対し，$r_\mu^i(\psi)[\nu_{\pi^\infty}]$ に対応する半単純 ℓ 進表現 $r_\mu^i(\psi)[\nu_{\pi^\infty}]_\ell$ が存在する．

(ii) $d = \dim \mathrm{Sh}_K$ とおくと，整数 i に対し以下が成り立つ：

$$IH^{d+i}(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}}, \mathcal{L}_\xi)^{\mathrm{ss}} \cong \bigoplus_{\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi} \bigoplus_{\pi^\infty \in \Pi_{\psi^\infty}} \pi^\infty \otimes r_\mu^i(\psi)[\nu_{\pi^\infty}]_\ell^\vee.$$

ここで，$(-)^{\mathrm{ss}}$ は Γ_E の作用に関する半単純化を表す．

Kottwitz は [Kot92b] において PEL 型志村多様体の不分岐素点における滑らかな整モデルを構成し，その特殊ファイバーにおける「Hecke 作用素 $\times$ Frobenius 射」の固定点の数え上げを行った．その結果と Lefschetz 跡公式，Arthur 予想を組み合わせることで上記

の予想に到達したのである．G に対する Arthur 予想が解決済みであり，さらに Sh_K がコンパクトである場合には，Kottwitz の議論を辿ることで，予想 3.8 (ii) を i に関して交代和をとったものをバーチャル表現のレベルで証明することが可能である [注16]．

例としてユニタリ型志村多様体（例 3.3）を考えよう．この場合，G は一般ユニタリ群 GU となる．さらに G が奇数次である場合，すなわち例 3.3 における n が奇数である場合には，G はユニタリ群とトーラスの直積の商として書けることが分かり，その帰結として，G に対する Arthur 予想をユニタリ群の Arthur 予想（定理 2.40）から導くことができる（[CHL11b, §1.1] 参照）．このことから，次の定理を得る．

定理 3.9. (G, X) が奇数次一般ユニタリ群に伴う志村データであり，G が $\mathbb{Q}$ 上中心を法として非等方的であるとする．さらに，ξ の最高ウェイトが正則であると仮定する．このとき，予想 3.8 が成り立つ．

Proof. 概略を説明する．まず，ξ の最高ウェイトが正則であるという仮定から，$G(\mathbb{R})$ の既約本質的ユニタリ表現 π_∞ が $H^i(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K_h; \pi_\infty \otimes \xi) \neq 0$ を満たすならば，$i = d$ かつ，π_∞ は $\xi^\vee$ と同じ中心指標および無限小指標を持つような本質的離散系列表現となる（[VZ84], [Kot92a, p. 658] 参照）[注17]．このことから以下の 2 つが得られる：

- $H^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}}, \mathcal{L}_\xi) = 0$ $(i \neq d)$.
- $\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi$ ならば $\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = 1$.

$\pi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi$ および $\pi^\infty \in \Pi_{\psi^\infty}$ に対し，Γ_E の表現 $r^i_\mu(\psi)[\nu_{\pi^\infty}]_\ell$ を

$$r^0_\mu(\psi)[\nu_{\pi^\infty}]_\ell = H^d(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}}, \mathcal{L}_\xi)[\pi^\infty]^{\mathrm{ss}\vee}, \qquad r^i_\mu(\psi)[\nu_{\pi^\infty}]_\ell = 0 \quad (i \neq 0)$$

と定める．予想 3.8 (ii) がバーチャル表現のレベルで成立していることから，$r^i_\mu(\psi)[\nu_{\pi^\infty}]_\ell$ への Frobenius 元の冪の作用のトレースを ψ および π^∞ を用いて記述でき，予想 3.8 (i) が従う．予想 3.8 (ii) は定義より明らかである． $\square$

注意 3.10. PEL 型志村多様体に対する結果 [Kot92b] は [Kis17] によって Hodge 型志村多様体にも拡張されており，それを用いることで Hodge 型の場合に定理 3.9 の類似を証明することも可能であると思われる．また，志村多様体がコンパクトでない場合にも，[Mor08], [Mor10] 等の研究がある．

注意 3.11. 予想 3.8 の定式化においては，A パラメータ ψ の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 部分の情報はウェイト分解のみに用いられている．$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ のユニポテント元の作用は以下のように交叉コホモロジー上の Lefschetz 作用素と関係していると期待されている：

V_μ への $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の作用が定める L_E 準同型 $r^{i+2}_\mu(\psi)[\nu_{\pi^\infty}] \otimes |-|^{-1} \to r^i_\mu(\psi)[\nu_{\pi^\infty}]$ に対応して Γ_F 準同型 $r^{i+2}_\mu(\psi)[\nu_{\pi^\infty}]_\ell(-1) \to r^i_\mu(\psi)[\nu_{\pi^\infty}]_\ell$ が存在す

[注16] コンパクト性の仮定は Lefschetz 跡公式を用いる際に必要となる．予想 3.8 (i) は一般には証明できないため，$r^i_\mu(\psi)[\nu_{\pi^\infty}]_\ell$ の部分を保型表現側の言葉で適切に定式化する必要があるが，省略する．

[注17] 本質的ユニタリ表現とは，指標で捻るとユニタリとなるような表現のことをいう．本質的離散系列表現も同様の意味である．

る．これの双対 $r^i_\mu(\psi)[\nu_{\pi^\infty}]^\vee_\ell \to r^{i+2}_\mu(\psi)[\nu_{\pi^\infty}]^\vee_\ell(1)$ は予想 3.8 (ii) の同型を通して Lefschetz 作用素

$$L\colon IH^{d+i}(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}},\mathcal{L}_\xi) \to IH^{d+i+2}(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}},\mathcal{L}_\xi)(1)$$

と対応する．

§ 3.3.　諸例

本小節では，いくつかの具体的な場合に予想 3.8 および定理 3.9 がどのような形になるかを解説する．

例 3.12 (モジュラー曲線)．　(G,X) を例 3.1 の通りとする．このとき，$\mu\colon \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to \mathrm{GL}_{2,\mathbb{C}}$ は $z \mapsto \mathrm{diag}(z,1)$ で与えられ，$r_\mu\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の自然表現となる．$w \geq 2$ とし，GL_2 の $w-1$ 次元既約代数的表現 $\xi = \mathrm{Sym}^{w-2}\,\mathrm{Std}$ を考える．このとき，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の既約本質的ユニタリ表現で ξ に関してコホモロジー的なものは以下のように分類できる：

- 中心指標・無限小指標が $\xi^\vee$ と一致する唯一の本質的離散系列表現 D_w（これは適切な正規化のもとで，重さ w の正則保型形式に対応する保型表現の ∞ 部分となる)．
- $w=2$ すなわち $\xi=1$ のとき，自明表現 1 および $\mathrm{sgn}\circ\det$.

これより，$\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(\mathrm{GL}_2)_\xi$ は以下のいずれかの形であることが分かる：

(a) $\pi_\infty \cong D_w$ を満たす $\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{GL}_2)$ に対応する $L_\mathbb{Q}$ の 2 次元既約表現 ϕ_π.

(b) $w=2$ のとき，$\psi=\psi_\chi=\chi\boxtimes\mathrm{Std}$（$\chi$ は $\mathbb{R}_{>0}$ 上自明な Hecke 指標，Std は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の自然表現)．$\mathbb{Q}$ の類体論 $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_{>0} \cong \Gamma_\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ より，χ は $\Gamma_\mathbb{Q}$ の指標とみなせる．

いずれの場合も $S_\psi = Z(\widehat{G})$ であるから，任意の $\pi^\infty \in \Pi_{\psi^\infty}$ に対して $\nu_{\pi^\infty} = \mu|_{Z(\widehat{G})}$ となり，$r^i_\mu(\psi)[\nu_{\pi^\infty}] = r^i_\mu(\psi)$ が成り立つ．

$\psi=\phi_\pi$ が (a) の形の場合，$i\neq 0$ ならば $r^i_\mu(\psi)=0$ である．$r^0_\mu(\psi)=r_\mu(\psi)$ は 2 次元であり，これへの $L_\mathbb{Q}$ の作用は $\phi_\pi\otimes|-|^{1/2}=\phi_{\pi\otimes|\det|^{1/2}}$ で与えられる．したがって，$r^0_\mu(\psi)$ に対応する半単純 ℓ 進表現 $r^0_\mu(\psi)_\ell$ とは，L 代数的な尖点的保型表現 $\pi\otimes|\det|^{1/2}$ に伴う Galois 表現 $R_{\pi\otimes|\det|^{1/2}}$ のことに他ならない [注 18]．f を π に属する重さ w の Hecke 固有新形式とし，f に伴う 2 次元 ℓ 進表現を ρ_f と書くと，$r^0_\mu(\psi)_\ell \cong \rho_f(1)$ が成り立つ．

$\psi=\psi_\chi$ が (b) の形の場合，$i\neq\pm1$ ならば $r^i_\mu(\psi)=0$ である．$r^1_\mu(\psi), r^{-1}_\mu(\psi)$ はいずれも 1 次元である．$r^{-1}_\mu(\psi)$ への $L_\mathbb{Q}$ の作用は χ で与えられる．したがって，$r^{-1}_\mu(\psi)$ に対応する ℓ 進表現は $\chi_\ell\colon \Gamma_\mathbb{Q} \twoheadrightarrow \Gamma_\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\chi} \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \cong \mathrm{GL}_1(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ で与えられる．$r^1_\mu(\psi)$ への $L_\mathbb{Q}$ の作用は $\chi|-|$ で与えられる．したがって，$r^1_\mu(\psi)$ に対応する ℓ 進表現は $\chi_\ell(1)$ である．

注 18 保型表現の L 代数性および保型表現に伴う Galois 表現の定義については次節で復習する．定義 4.1，定義 4.2 を参照．

以上のことから，モジュラー曲線に対する予想 3.8 (ii) は以下のようになる：

$$IH^0(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}},\mathcal{L}_\xi)\cong\begin{cases}\bigoplus_\chi \chi^\infty\otimes\chi_\ell^{-1} & (w=2\text{ のとき}),\\ 0 & (w\geq 3\text{ のとき}),\end{cases}$$

$$IH^1(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}},\mathcal{L}_\xi)\cong\bigoplus_{\pi\colon\pi_\infty\cong D_w}\pi^\infty\otimes R^\vee_{\pi\otimes|\det|^{1/2}},$$

$$IH^2(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{E}},\mathcal{L}_\xi)\cong\begin{cases}\bigoplus_\chi \chi^\infty\otimes\chi_\ell^{-1}(-1) & (w=2\text{ のとき}),\\ 0 & (w\geq 3\text{ のとき}).\end{cases}$$

これらはもちろん既に証明されている結果である．

例 3.13 (Kottwitz 型志村多様体)．　例 3.3 において，B が F 上の中心的斜体であり，$V=B$ であるとする．このとき，Sh_K はコンパクトである．この場合の志村データ (G,X) に対応する志村多様体は [Kot92a] において考察されており，ここでは Kottwitz 型志村多様体と呼ぶ（さらに $p_{\tau_0}=1$, $q_{\tau_0}=n-1$ の場合は [HT01] で詳細に扱われており，Harris-Taylor 型志村多様体と呼ばれる）．以下では n が奇数かつ ξ の最高ウェイトが正則であると仮定する．

$d=[F^+:\mathbb{Q}]$ とおく．$\mu\colon\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}\to G_\mathbb{C}=\mathrm{GL}^d_{n,\mathbb{C}}\times\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ は

$$z\mapsto\Bigl(\mathrm{diag}(\underbrace{z,\dots,z}_{p_{\tau_0}\text{ 個}},\underbrace{1,\dots,1}_{q_{\tau_0}\text{ 個}}),\underbrace{1,\dots,1}_{d-1\text{ 個}},z\Bigr)$$

で与えられるので，$r_\mu\colon\widehat{G}=\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^d\times\mathbb{C}^\times\to V_\mu$ は $(\bigwedge^{p_{\tau_0}}\mathrm{Std}_n)\boxtimes 1\boxtimes\cdots\boxtimes 1\boxtimes\mathrm{Std}_1$ となる（Std_m で GL_m の自然表現を表す）．r_μ は $\widehat{G}\rtimes\Gamma_F$ に自然に持ち上がる．

G は非自明なエンドスコピー群を持たないことが知られている（[Kot92a, Lemma 2] 参照）．したがって，$\psi\in\Psi(G)$ に対し $S_\psi=Z(\widehat{G})$, $\mathfrak{S}_\psi=1$ が成り立つ．A パラメータ $\psi\in\Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi$ をとる．各 $\pi^\infty\in\Pi_{\psi^\infty}$ に対して $\nu_{\pi^\infty}=\mu|_{Z(\widehat{G})}$，したがって $r^0_\mu(\psi)[\nu_{\pi^\infty}]=r^0_\mu(\psi)$ であることに注意すると，定理 3.9 とその証明より，Γ_F の ℓ 進表現 $R_\psi=r^0_\mu(\psi)_\ell$ が存在して，以下が成り立つ：

$$H^{p_{\tau_0}q_{\tau_0}}(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{F}},\mathcal{L}_\xi)^{\mathrm{ss}}\cong\bigoplus_{\psi\in\Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi}\ \bigoplus_{\pi^\infty\in\Pi_{\psi^\infty}}\pi^\infty\otimes R^\vee_\psi,\quad H^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{F}},\mathcal{L}_\xi)=0\ \ (i\neq p_{\tau_0}q_{\tau_0}).$$

R_ψ についてもう少し詳しく調べよう．$F=EF^+$ より $G\otimes_\mathbb{Q}E\cong\mathrm{Res}_{F/E}\mathrm{GL}_n\times\mathbb{G}_{m,E}$ であることに注意すると，$\psi|_{L_E}\colon L_E\to\widehat{G}\rtimes W_E$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)\times\mathbb{A}_E^\times$ の保型表現 $\Pi\boxtimes\chi$ に対応する．$\Pi\boxtimes\chi$ を ψ の底変換と呼ぶことにする．Π は $\Pi^\vee\cong\Pi^c$ を満たす（c は CM 体 F 上の複素共役であった）．B が F 上の中心的斜体であることから，Π は離散的保型表現となり，さらに $\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}=1$ より，Π は尖点的であることが分かる．合成

$$\psi'_F\colon L_F\xrightarrow{\psi|_{L_F}}\widehat{G}\rtimes W_F\to\widehat{G}\rtimes\Gamma_F=(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^d\times\mathbb{C}^\times)\rtimes\Gamma_F\xrightarrow{(*)}\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^\times$$

($(*)$ は $(g_1,\dots,g_d,a,w)$ を (g_1,a) にうつす準同型）は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)\times\mathbb{A}_F^\times$ の保型表現 $\Pi\boxtimes(\chi\circ\mathrm{Nr}_{F/E})$ に対応することが容易に分かる．$r_\mu(\psi)$ は ψ'_F と $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^\times\to\mathrm{GL}_{\binom{n}{p_{\tau_0}}}(\mathbb{C})$; $(g,a)\mapsto a\cdot(\wedge^{p_{\tau_0}}g)$ の合成であることに注意すると，F のほとんど全ての有限素点 v に対し以下が成り立つことが分かる：

> $R_\psi,\Pi_v,\chi\circ\mathrm{Nr}_{F/E}$ は v において不分岐であり，Π_v の佐武パラメータを $\alpha_{v,1},\dots,\alpha_{v,n}$ とおくと，$R_\psi(\mathrm{Frob}_v)$ の固有値は
>
> $$\Bigl\{q_v^{-p_{\tau_0}q_{\tau_0}/2}\chi(\mathrm{Nr}_{F/E}(\varpi_v))\prod_{i\in I}\alpha_{v,i}\Bigr\}_{I\subset\{1,\dots,n\},\#I=p_{\tau_0}}$$
>
> となる（ϖ_v は F_v の素元，q_v は F_v の剰余体の元の個数）．特に $p_{\tau_0}=1$ のときは，$R_\psi(\mathrm{Frob}_v)$ の固有値は
>
> $$q_v^{-(n-1)/2}\chi(\mathrm{Nr}_{F/E}(\varpi_v))\alpha_{v,1},\dots,q_v^{-(n-1)/2}\chi(\mathrm{Nr}_{F/E}(\varpi_v))\alpha_{v,n}$$
>
> となる．

例 3.14（ユニタリ型志村多様体）． 次に，例 3.3 において $B=F$, $V=F^n$ の場合を考える．$F^+\neq\mathbb{Q}$ と仮定する．このとき Sh_K はコンパクトである．さらに n は奇数かつ ξ の最高ウェイトが正則であるとし，$p_{\tau_0}=1$ と仮定する．定理 3.9 より，$i\neq n-1$ のとき $H^i(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{F}},\mathcal{L}_\xi)=0$ である．

A パラメータ $\psi\in\Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi$ をとる．ξ の最高ウェイトが正則であるという仮定から，$\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}=1$ である．上の例と同様，ψ の底変換 $\Pi\boxtimes\chi$ を考えることができる．

まず Π が尖点的である場合を考える．このとき $S_\psi=Z(\widehat{G})$ および $\mathfrak{S}_\psi=1$ が成り立つ．よって上の例と同じ議論によって，Γ_F の n 次元 ℓ 進表現 $R_\psi=r^0_\mu(\psi)_\ell$ が存在して，以下が成り立つ：

- $\pi^\infty\in\Pi_{\psi^\infty}$ に対し，$H^{n-1}(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{F}},\mathcal{L}_\xi)[\pi^\infty]^{\mathrm{ss}}\cong R_\psi^\vee$.
- F のほとんど全ての有限素点 v に対し以下が成り立つ：

  > R_ψ, Π_v, $\chi\circ\mathrm{Nr}_{F/E}$ は v において不分岐であり，Π_v の佐武パラメータを $\alpha_{v,1},\dots,\alpha_{v,n}$ とおくと，$R_\psi(\mathrm{Frob}_v)$ の固有値は
  >
  > $$q_v^{-(n-1)/2}\chi(\mathrm{Nr}_{F/E}(\varpi_v))\alpha_{v,1},\dots,q_v^{-(n-1)/2}\chi(\mathrm{Nr}_{F/E}(\varpi_v))\alpha_{v,n}$$
  >
  > となる（ϖ_v は F_v の素元，q_v は F_v の剰余体の元の個数）．

次に $\Pi=\Pi_1\boxplus\Pi_2$（Π_i は $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現で $\Pi_i^\vee\cong\Pi_i^c$ を満たし，$n_1+n_2=n$）と書ける場合を考える．$s=(\mathrm{diag}(I_{n_1},-I_{n_2}),\dots,\mathrm{diag}(I_{n_1},-I_{n_2}),1)\in\widehat{G}$ とおくと，$S_\psi=\langle s\rangle Z(\widehat{G})$, $\mathfrak{S}_\psi=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が成り立つ．$\nu^\pm\colon S_\psi\to\mathbb{C}^\times$ を $\nu^\pm|_{Z(\widehat{G})}=\mu|_{Z(\widehat{G})}$, $\nu^\pm(s)=\pm1$（複号同順）によって定める．このとき，$r_\mu(\psi)=r^0_\mu(\psi)=r^0_\mu(\psi)[\nu^+]\oplus r^0_\mu(\psi)[\nu^-]$ が成り立つ．定理 3.9 より，以下のことが分かる：

- ある $\psi\in\Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi$ および $\pi^\infty\in\Pi_{\psi^\infty}$ に対して $\nu^+=\nu_{\pi^\infty}$ となるならば，$r^0_\mu(\psi)[\nu^+]$ に対応する Γ_F の n_1 次元 ℓ 進表現 $R^+_\psi=r^0_\mu(\psi)[\nu^+]_\ell$ が存在する．F のほとんど全ての有限素点 v に対し，R^+_ψ は以下の条件を満たす：

  R^+_ψ, $\Pi_{1,v}$, $\chi\circ\mathrm{Nr}_{F/E}$ は v において不分岐であり，$\Pi_{1,v}$ の佐武パラメータを $\alpha_{v,1},\ldots,\alpha_{v,n_1}$ とおくと，$R^+_\psi(\mathrm{Frob}_v)$ の固有値は

  $$q_v^{-(n-1)/2}\chi(\mathrm{Nr}_{F/E}(\varpi_v))\alpha_{v,1},\ldots,q_v^{-(n-1)/2}\chi(\mathrm{Nr}_{F/E}(\varpi_v))\alpha_{v,n_1}$$

  となる．

- ある $\psi\in\Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi$ および $\pi^\infty\in\Pi_{\psi^\infty}$ に対して $\nu^-=\nu_{\pi^\infty}$ となるならば，$r^0_\mu(\psi)[\nu^-]$ に対応する Γ_F の n_2 次元 ℓ 進表現 $R^-_\psi=r^0_\mu(\psi)[\nu^-]_\ell$ が存在する．F のほとんど全ての有限素点 v に対し，R^-_ψ は以下の条件を満たす：

  R^-_ψ, $\Pi_{2,v}$, $\chi\circ\mathrm{Nr}_{F/E}$ は v において不分岐であり，$\Pi_{2,v}$ の佐武パラメータを $\beta_{v,1},\ldots,\beta_{v,n_2}$ とおくと，$R^-_\psi(\mathrm{Frob}_v)$ の固有値は

  $$q_v^{-(n-1)/2}\chi(\mathrm{Nr}_{F/E}(\varpi_v))\beta_{v,1},\ldots,q_v^{-(n-1)/2}\chi(\mathrm{Nr}_{F/E}(\varpi_v))\beta_{v,n_2}$$

  となる．

- $\psi\in\Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi$ および $\pi^\infty\in\Pi_{\psi^\infty}$ に対し，

  $$H^{n-1}(\mathrm{Sh}_{\infty,\overline{F}},\mathcal{L}_\xi)[\pi^\infty]^{\mathrm{ss}}\cong\begin{cases}R^{+\vee}_\psi & (\nu_{\pi^\infty}=\nu^+),\\ R^{-\vee}_\psi & (\nu_{\pi^\infty}=\nu^-).\end{cases}$$

Π がこれ以外の形の場合にも同様の考察が可能である．

§4. Galois 表現の構成

本節では，前節の結果を利用して GL_n の尖点的保型表現に対応する n 次元 ℓ 進表現を構成する．GL_n の尖点的保型表現と n 次元 ℓ 進表現の対応については定義 3.6 で既に述べたが，大域 Langlands 群を用いない形で再度述べておく．

定義 4.1. F を代数体とし，Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現とする．Γ_F の n 次元半単純 ℓ 進表現 $R\colon\Gamma_F\to\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ が Π に対応するとは，F の有限個を除いた有限素点 v に対し以下が成り立つことをいう：

$\Pi_v, R_v\colon\Gamma_{F_v}\to\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ はともに不分岐であり, Π_v の佐武パラメータと $R_v(\mathrm{Frob}_v)$ の固有値が一致する．

Chebotarev 密度定理から，Π に対応する R は存在すれば一意である．

本節の主定理および証明を述べるために，保型表現の無限素点における代数性と正則性の定義を導入しておく．

定義 4.2. F を代数体とし，Π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の保型表現とする．F の無限素点 v における Π_v の無限小指標を

- $(a_{v,1},\ldots,a_{v,n})\in\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$（$v$ が実素点のとき）
- $(a_{v,1},\ldots,a_{v,n};b_{v,1},\ldots,b_{v,n})\in\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n\times\mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$（$v$ が複素素点のとき）

とおく．

(i) 任意の v に対し，$(a_{v,1},\ldots,a_{v,n})\in\mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}_n$ あるいは $(a_{v,1},\ldots,a_{v,n};b_{v,1},\ldots,b_{v,n})\in\mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}_n\times\mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}_n$ であるとき，Π は L 代数的であるという（[BG14] 参照）．

(ii) 任意の v に対し以下が成り立つとき，Π は正則であるという：
- v が実素点のとき，$a_{v,1},\ldots,a_{v,n}$ が相異なる．
- v が複素素点のとき，$a_{v,1},\ldots,a_{v,n}$ および $b_{v,1},\ldots,b_{v,n}$ がそれぞれ相異なる．

(iii) Π が L 代数的であるとする．Π が強正則であるとは，任意の v に対し以下が成り立つことをいう：
- v が実素点のとき，$i\neq j$ に対し $|a_{v,i}-a_{v,j}|\geq 2$.
- v が複素素点のとき，$i\neq j$ に対し $|a_{v,i}-a_{v,j}|\geq 2$, $|b_{v,i}-b_{v,j}|\geq 2$.

また，Π が非常に強正則であるとは，任意の v に対し以下が成り立つことをいう[注 19]．
- v が実素点のとき，$i\neq j$ に対し $|a_{v,i}-a_{v,j}|\geq 4$.
- v が複素素点のとき，$i\neq j$ に対し $|a_{v,i}-a_{v,j}|\geq 4$, $|b_{v,i}-b_{v,j}|\geq 4$.

注意 4.3. Π が正則 L 代数的であることは，$\Pi_\infty\otimes|\det|^{\frac{n-1}{2}}$ が $\prod_{v|\infty}\mathrm{GL}_{n,v}$ のある既約代数的表現 ξ と同じ中心指標・無限小指標を持つことと同値である．さらにこのとき，Π が強正則であることは，ξ の最高ウェイトが正則であることと同値である．

例 4.4. F を総実体とし，Hilbert モジュラー形式 f に伴う $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 Π を考える（中心指標がユニタリになるように正規化しておく）．このとき Π は L 代数的である．Π が正則であることは f の重さが全て 2 以上であることと同値であり，Π が強正則であることは f の重さが全て 3 以上であることと同値である．

一般に，尖点的保型表現 Π が L 代数的であるとき，Π に対応する n 次元半単純 ℓ 進表現が存在すると予想されている．本節の主定理は以下の通りである．

定理 4.5 ([HT01], [Shi11], [CH13], [HLTT16], [Sch15])**.** F を総実体または CM 体とし，Π を正則 L 代数的な $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現とする．このとき，Π に対応する n 次元半単純 ℓ 進表現 R_Π が存在する．

注意 4.6. R_Π については様々な性質が成り立つことが期待されている．そのうちのいくつかを例示する．

[注 19] これはここだけの用語である．

- R_Π は既約表現である．
- F の有限素点 $v \nmid \ell$ に対し，$R_{\Pi,v}$ の Frobenius 半単純化は Π_v と局所 Langlands 対応で対応する（局所・大域整合性）．
- F の有限素点 $v \mid \ell$ に対し，$R_{\Pi,v}$ は de Rham 表現であり，それに伴う Weil-Deligne 表現の Frobenius 半単純化は Π_v と局所 Langlands 対応で対応する．
- R を Γ_F の n 次元既約 ℓ 進表現とし，以下の条件を仮定する（このうちはじめの 2 つを満たす R を代数的な ℓ 進表現という）：
  - R はほとんど全ての素点において不分岐である．
  - F の任意の素点 $v \mid \ell$ において R_v は de Rham 表現である．
  - 上記の $v \mid \ell$ に対し，R_v の Hodge-Tate 重さは相異なる．

  このとき，正則 L 代数的な $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現 Π が存在し，$R_\Pi \cong R$ となる．

これらについても盛んに研究が行われており，部分的な結果が数多く存在する．

定理 4.5 の証明を説明する前に，この定理を用いて証明される [注 20]，代数的整数論の範疇で述べられる定理を 2 つ挙げる．

定理 4.7 (佐藤・Tate 予想，[CHT08], [HSBT10], [Tay08])． E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とする．E の判別式を割らない素数 p に対し，$a_p = 1 + p - \#\widetilde{E}(\mathbb{F}_p)$ とおき（$\widetilde{E}$ は E の $\mathbb{Z}_p$ 上の良還元モデルとする），2 次方程式 $T^2 - a_pT + p = 0$ の 2 解 α_p, β_p を考える（α_p の虚部が 0 以上になるようにとる）．Hasse の定理より，$|\alpha_p| = |\beta_p| = p^{1/2}$ であることが分かっている．

E が虚数乗法を持たないならば，p を動かしたとき，偏角 $\arg\alpha_p$ は $\frac{2}{\pi}\sin^2 x$ の形に分布する．すなわち，任意の $0 \le a < b \le \pi$ に対し，次が成り立つ：

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{p \le N \mid a \le \arg\alpha_p \le b\}}{\#\{p \le N\}} = \int_a^b \frac{2}{\pi}\sin^2 x\, dx.$$

佐藤・Tate 予想は，2006 年頃に部分的な解決がアナウンスされ，大きな話題となった．基本的な方針は次の通りである．E に伴う $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ の 2 次元 ℓ 進表現を ρ_E とおき，全ての m に対して総実体 F および $\mathrm{GL}_{m+1}(\mathbb{A}_F)$ の正則 L 代数的な尖点的保型表現 Π が存在して $(\mathrm{Sym}^m\rho_E)|_{\Gamma_F} \cong R_\Pi$ となることを示す（このような F, Π が存在することを，$\mathrm{Sym}^m\rho_E$ は潜在的に保型的であるという）．この部分には多くの革新的なアイデアが含まれているが，本題から逸れるのでここでは述べない．潜在的保型性が示せると，$\mathrm{Sym}^m\rho_E$ の L 関数がよい解析的性質を持つことが分かる．そのことから佐藤・Tate 予想が従うことは既に Tate によって指摘されていた．

解決が話題となった時点では，跡公式の安定化が完成していなかったため，エンドスコピーの理論が不要な，Kottwitz 型の志村多様体（例 3.13）のエタールコホモロジーしか

[注 20] 実際には，定理 4.5 だけではなく，R_Π の諸性質，特に Π が自己共役双対的な場合の局所・大域整合性も必要となるが，本稿の本題ではないので説明は行わない．

扱うことができていなかった．そのため，定理 4.5 が適用できる Π は自己共役双対的かつある有限素点で本質的離散系列表現であるようなものに限られていた．このような事情により，当時は楕円曲線の j 不変量が非整数であるという条件を課す必要があり，定理 4.5 の改良が佐藤・Tate 予想の完全解決を阻む最後の壁として残っているという状況であった．その後の，基本補題の解決に端を発する進展によって，この部分が克服され，$\mathbb{Q}$ 上の一般の楕円曲線を扱えるようになったのである．

定理 4.8 ([CC09]). S を $\mathbb{Q}$ の有限素点の有限集合とし，$\mathbb{Q}_S$ を $\mathbb{Q}$ の S 外不分岐最大拡大とする．素数 $p \in S$ に対し，代数閉包の埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定すると，Galois 群の間の準同型 $\Gamma_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q})$ が得られる．
$\#S \geq 2$ ならばこの準同型は単射である．

定理 4.8 の方針を大雑把に述べる．$\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ の n 次元既約スムーズ表現 r を $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q})$ の ℓ 進表現に延長することができれば単射性が従う．しかし，Galois 表現の世界でこのような問題を直接扱うのは難しいので，r に局所 Langlands 対応で対応する $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の既約超尖点表現 π を考え，これを大域化するという問題を考える．[CC09] においては，r を指標で捻り，$\pi^\vee$ が π の不分岐指標による捻りにならないという状況にした上で，$\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の尖点的保型表現 Π で以下の条件を満たすものの存在を跡公式を用いて証明している ([CC09, Théorème 3.2])：

- Π は正則 L 代数的である．
- $\Pi \cong \Pi^\vee$.
- Π は $S \cup \{\infty\}$ の外で不分岐．
- ある不分岐指標 $\chi\colon \mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対し，$\Pi_p \cong (\pi \otimes (\chi \circ \det)) \boxplus (\pi^\vee \otimes (\chi^{-1} \circ \det))$.

このとき，Π に伴う Galois 表現 R_Π が $\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$ の表現 $(r \otimes \chi) \oplus (r^\vee \otimes \chi^{-1})$ の延長を与えるので主張が従う．

以下では F を総実体または CM 体とし，c をその複素共役とする．定理 4.5 の証明は，大雑把には以下の 3 つのステップに分かれている：

(A) Π が自己共役双対的，すなわち $\Pi^\vee \cong \Pi^c$ であり，かつ Π の正則性が高い場合に R_Π を構成する ([HT01], [Shi11], [CHL11b]).
(B) Π が自己共役双対的であり，Π の正則性が高いとは限らない場合に R_Π の構成を拡張する ([CH13]).
(C) Π が自己共役双対的でない場合に R_Π の構成を拡張する ([HLTT16], [Sch15]).

(B), (C) は保型形式の合同を用いることによって達成されるが，本稿の主題から外れるので説明は省略する．(C) のうち [Sch15] の手法については [Ito14] に解説があるので，興味をお持ちの方はご覧いただきたい．

(A) は奇数次一般ユニタリ群に伴う志村多様体のエタールコホモロジーに関する結果（例 3.14）を用いることによって達成される．本節の残りの部分では，Π が自己共役双対的かつ非常に強正則（定義 4.2 (iii) 参照）であると仮定して，R_Π の構成を概観する．

まず，Galois 表現の貼り合わせの議論によって（[HT01], [Sor], [CHL11b, §5] 参照），以下の条件が成立する場合に帰着できる：

- F は CM 体であり，$F^+ = F^{c=1}$ とおくと，ある虚二次体 E に対して $F = EF^+$ が成り立つ．
- $F^+ \neq \mathbb{Q}$ である．
- $\mathrm{Spl}_{F/F^+,\mathbb{Q}} = \{p：素数 \mid p \text{ の上にある } F \text{ の素点は全て } F/F^+ \text{ において分解する}\}$ とおき，$F/\mathbb{Q}$ において分岐する素数全体の集合を $\mathrm{Ram}_{F/\mathbb{Q}}$ と書くと，$\mathrm{Ram}_{F/\mathbb{Q}} \subset \mathrm{Spl}_{F/F^+,\mathbb{Q}}$ である．
- Π の分岐素点の下にある素数全体の集合を $\mathrm{Ram}_{\mathbb{Q}}(\Pi)$ と書くと, $\mathrm{Ram}_{\mathbb{Q}}(\Pi) \subset \mathrm{Spl}_{F/F^+,\mathbb{Q}}$ が成り立つ．

以下では，n の偶奇によって場合分けを行う．

■ n が奇数のとき　例 3.3 において $B = F$, $V = F^n$ とする．n が奇数であるという仮定から，$\langle\ ,\ \rangle\colon V \times V \to \mathbb{Q}$ を以下の条件を満たすように選ぶことができる（[Clo91, §2], [CHL11a, Lemma 1.4.1] 参照）：

- $p_{\tau_0} = 1$, $q_{\tau_0} = n-1$.
- G は任意の有限素点において準分裂的.

E の代数的 Hecke 指標 χ をうまく選ぶと，以下が成り立つようにできる（この場合は Π が強正則であるという仮定のみで十分である）：

最高ウェイトが正則であるような G の既約代数的表現 ξ および $\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi$ が存在して，ψ の底変換が $\Pi \boxtimes \chi$ となる．

このとき, 例 3.14 における n 次元 ℓ 進表現 R_ψ の指標による捻り $R_\psi(-\frac{n-1}{2}) \otimes (\chi \circ \mathrm{Nr}_{F/E})_\ell^{-1}$ が Π に対応する ℓ 進表現を与える．ここで，$(\chi \circ \mathrm{Nr}_{F/E})_\ell$ は Hecke 指標 $\chi \circ \mathrm{Nr}_{F/E}$ に伴う Γ_F の 1 次元 ℓ 進表現を表す.

■ n が偶数のとき　$m = n+1$ は奇数であるから，上の設定を m に対して考える．F の代数的 Hecke 指標 $\Pi'\colon \mathbb{A}_F^\times \to \mathbb{C}^\times$ で $\Pi'^c = \Pi'^{-1}$ および $\mathrm{Ram}_{\mathbb{Q}}(\Pi') \subset \mathrm{Spl}_{F/F^+,\mathbb{Q}}$ を満たすものをとる．$\Pi \boxplus \Pi'$ が強正則ならば，E の代数的 Hecke 指標 χ をうまく選ぶと，以下が成り立つようにできる：

- 最高ウェイトが正則であるような G の既約代数的表現 ξ および $\psi \in \Psi_{\mathrm{disc}}(G)_\xi$ が存在して，ψ の底変換が $(\Pi \boxplus \Pi') \boxtimes \chi$ となる.
- $\mathrm{Ram}_{\mathbb{Q}}(\chi) \subset \mathrm{Spl}_{F/F^+,\mathbb{Q}}$.

$\mathrm{Ram}_{F/\mathbb{Q}}$, $\mathrm{Ram}_{\mathbb{Q}}(\Pi)$, $\mathrm{Ram}_{\mathbb{Q}}(\Pi')$, $\mathrm{Ram}_{\mathbb{Q}}(\chi)$ が $\mathrm{Spl}_{F/F^+,\mathbb{Q}}$ に含まれることから，任意の素数 p に対して以下のいずれかが成立することに注意する：

(a) $F/\mathbb{Q}$ は p で不分岐であり，かつ $(\Pi \boxplus \Pi') \boxtimes \chi$ を $\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}(G_E)(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の保型表現と見たものは p において不分岐である.

(b) $G_{\mathbb{Q}_p}$ は GL いくつかの直積である．

例 3.14 における R_ψ^+ を用いることで，Π に対応する Galois 表現を構成したい．そのためには次の補題が必要である．

補題 4.9. Π' を適切に選ぶと，$\nu_{\pi^\infty}=\nu^+$ となる $\pi^\infty\in\Pi_{\psi^\infty}$ が存在する．

Proof. 概略のみ説明する．

まず Π' を一つ固定し，各素数 p に対して $G(\mathbb{Q}_p)$ の既約表現 π_p を以下のように構成する．p が上記の (a) を満たすときは，Π_{ψ_p} の元のうち不分岐なものがただ一つ存在するので，それを π_p とする．p が上記の (b) を満たすときは，Π_{ψ_p} は一元集合であるから，その唯一の元を π_p とする．このとき，$\langle -,\pi_p\rangle=1$ となっている．実際，(a) の場合には π_p の不分岐性から従い，(b) の場合はそもそも $\mathfrak{S}_{\psi_p}=1$ である．$\pi^\infty=\bigotimes_p\pi_p$ とおくと，$\psi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}=1$ より $\varepsilon_\psi=1$ であるから，

$$\nu_{\pi^\infty}(s)=\lambda_{\pi_\infty}(s)\langle s,\pi^\infty\otimes\pi_\infty\rangle=\lambda_{\pi_\infty}(s)\langle s,\pi_\infty\rangle$$

が成り立つ．右辺は無限素点のみで決まる値であるから，具体的な計算が可能である ([Kot92a, §7], [Clo11], [CHL11a], [CHL11b])．その結果，$\lambda_{\pi_\infty}(s)\langle s,\pi_\infty\rangle$ は Π_∞ および Π'_∞ の無限小指標のみに依存することが分かる．より具体的には以下で与えられる．F の無限素点 v に対し，Π_v の無限小指標を $(a_{v,1},\ldots,a_{v,n};a'_{v,1},\ldots,a'_{v,n})$ $(a_{v,1}>\cdots>a_{v,n})$ とおき，Π'_v の無限小指標を $(b_v;b'_v)$ とおく．$\Pi\boxplus\Pi'$ が正則ならば $b_v\neq a_{v,i}$ $(1\le i\le n)$ である．$(a_{v,1},\ldots,a_{v,n},b_v)$ を大きい順に並べ換える置換を σ_v とおく．このとき，$\lambda_{\pi_\infty}(s)\langle s,\pi_\infty\rangle$ は $\prod_{v|\infty}\operatorname{sgn}\sigma_v$ と定数倍を除いて一致する．

F の無限素点 v_0 を一つ固定する．$a_{v_0,n}-2\ge b_{v_0}$ となるように b_{v_0} をとると $\operatorname{sgn}\sigma_{v_0}=1$ である．一方，Π は非常に強正則であると仮定していたので $a_{v_0,n-1}-a_{v_0,n}\ge 4$ であるから，$a_{v_0,n-1}-2\ge b_{v_0}\ge a_{v_0,n}+2$ となるように b_{v_0} をとることができ，このとき $\operatorname{sgn}\sigma_{v_0}=-1$ である．代数的 Hecke 指標 $\Pi'_1,\Pi'_2\colon\mathbb{A}_F^\times\to\mathbb{C}^\times$ を，v_0 において上記それぞれの無限小指標をとり，v_0 と異なる無限素点において同じ無限小指標をとるように選ぶ．このとき $\Pi\boxplus\Pi'_i$ は強正則である．Π'_1, Π'_2 双方に対し前述の条件を満たすような E の代数的 Hecke 指標 χ をとる．$(\Pi\boxplus\Pi'_i)\boxtimes\chi$ に対応する A パラメータを ψ_i とおき，$\pi_i^\infty\in\Pi_{\psi_i^\infty}$ を上で考えていた形の表現とすると，$\nu_{\pi_1^\infty}(s)=-\nu_{\pi_2^\infty}(s)$ が成り立つ．これより主張が従う． $\square$

補題 4.9 より n 次元 ℓ 進表現 R_ψ^+ の存在が分かるので，$R_\psi^+(-\frac{n}{2})\otimes(\chi\circ\mathrm{Nr}_{F/E})_\ell^{-1}$ を考えることで Π に対応する ℓ 進表現が得られる．

注意 4.10. n が偶数の場合の上記の構成は，Hilbert モジュラー形式の場合の Blasius-Rogawski による構成 [BR89] の一般化にあたる．これに対し，保型形式の合同を用いて強正則性を外す [CH13] の結果は，Taylor による結果 [Tay89] の類似であると見ることもできる（ただし，[CH13] では固有値多様体を用いるので，全く同じ手法というわけではない）．

注意 4.11. ここで解説した R_Π の構成は，証明が完結していない定理 2.40 に依存しているが，安定化された単純跡公式を用いてユニタリ群に対する Arthur 予想を部分的に証明することで，定理 2.40 を用いることなく R_Π の存在を証明することも可能である．[Lab11], [CHL11a], [CHL11b] を参照．

注意 4.12. [Shi11] においては，無限素点における議論をもう少し注意深く行うことで，上記の手法が以下のような条件のもとで適用可能であることを証明している：

- n が奇数の場合は，（自己共役双対的，正則 L 代数的以外の）条件なし．
- n が偶数の場合は，F のある無限素点 v における Π_v の無限小指標
  - $(a_{v,1},\ldots,a_{v,n})$ $(a_{v,1}>\cdots>a_{v,n})$（v が実素点のとき）
  - $(a_{v,1},\ldots,a_{v,n};b_{v,1},\ldots,b_{v,n})$ $(a_{v,1}>\cdots>a_{v,n})$（v が複素素点のとき）

  およびある奇数 i に対して，$a_{v,i}-a_{v,i+1}\geq 2$ が成り立つ．

この結果は局所・大域整合性の証明の観点からも重要なものである．

§5. その他の応用

ここまでは志村多様体や Langlands 対応と関係した応用を述べてきたが，Arthur 分類にはそれ以外の応用もたくさんある．ここではそのうちの 2 つを紹介する．

§5.1. 尖点的保型形式の次元の計算

レベル 1 の尖点的な楕円正則モジュラー形式のなすベクトル空間の次元公式は古典的な話題であり，保型形式の教科書の多くに記載されている．また，低次の Siegel 保型形式に対する類似の結果も知られている（[Igu62], [Tsu83], [Tsu84], [Tsu86] 等）．Arthur 分類を利用することで，同様の問題を，よりサイズの大きな群 G の保型形式に対して考察することが可能になる．この方向の研究としては，

- G が $\mathbb{Q}$ 上の n 次直交群（$n=7,8,9$）で，$G_\mathbb{R}$ がコンパクトである場合 ([CR15])
- G が $\mathbb{Q}$ 上分裂的な直交群または斜交群で，$G_\mathbb{R}$ が離散系列表現を持つ場合 ([Taï17a])

の 2 つがある．前者の方が先行研究であるが，ここでは後者について述べることにする．以下では G を $\mathbb{Q}$ 上分裂的な直交群または斜交群とし，$G_\mathbb{R}$ が離散系列表現を持つと仮定する．すなわち，G は Sp_{2n}, SO_{2n+1}, SO_{2n} のいずれかであるとし，$G=\mathrm{SO}_{2n}$ の場合には n が偶数であると仮定する．これらの群の行列による具体的な実現については [Taï17a, §2] を参照．T を対角行列からなる G の分裂極大トーラスとし，$e_i\in X^*(T)$ $(1\leq i\leq n)$ を第 i 成分への射影とする．$\xi\in X^*(T)$ を支配的ウェイトとし，それに対応する G の有限次元既約表現を V_ξ と書く．

定義 5.1. 以下の条件を満たす $\psi\in\widetilde{\Psi}_{\mathrm{disc}}(G)$ 全体のなす集合を $\widetilde{\Psi}^{\xi,\mathrm{unr}}_{\mathrm{disc}}(G)$ と書く．

- A パケット Π_{ψ_∞} に属する全ての表現が V_ξ と同じ無限小指標を持つ [注 21].
- ψ は全ての有限素点において不分岐である.

さらに，以下の条件を満たす $\psi \in \widetilde{\Psi}^{\xi,\mathrm{unr}}_{\mathrm{disc}}(G)$ 全体のなす集合を $\widetilde{\Psi}^{\xi,\mathrm{unr}}_{\mathrm{sim}}(G)$ と書く.

- N を $\widehat{G}$ の自然表現の次元とし，ψ を $\widetilde{\Psi}(\mathrm{GL}_N)$ の元と見て $\psi = l_1(\mu_1 \boxtimes \nu_1) \boxplus \cdots \boxplus l_r(\mu_r \boxtimes \nu_r)$（§2.4 参照）と書いたとき，$r=1, l_1=1, \dim\nu_1 = 1$ である（つまり，ψ は GL_N の尖点的保型表現である）.

$J \subset \{1,\ldots,n\}$ に対し，$C_J \subset X^*(T)$ を以下で定める：$(k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し，

$$k_1e_1 + \cdots + k_ne_n \in C_J \iff k_1 \geq \cdots \geq k_n \geq 0 \text{ かつ } J = \{1 \leq j \leq n \mid k_j > k_{j+1}\}.$$

ただし，$k_{n+1} = 0$ とおく.

定理 5.2 ([Taï17a, Theorem 4.3.1]). $J = \{j_1,\ldots,j_r\} \subset \{1,\ldots,n\}$ に対し，以下のような 3 つ組の有限族 $\{(m_a, P_a, \Lambda_a)\}_{a\in A}$ が存在する：

- m_a は 1 以上の整数.
- $P_a \in \mathbb{Q}(\zeta_{m_a})[X_1,\ldots,X_r]$（$\zeta_{m_a}$ は 1 の原始 m_a 乗根）.
- $\Lambda_a \colon (\mathbb{Z}/m_a\mathbb{Z})^r \to \mathbb{Z}/m_a\mathbb{Z}$ は全射準同型.
- 任意の $\xi = k_1e_1 + \cdots + k_re_r \in C_J$ に対し，以下が成り立つ：

$$(*) \qquad \#\widetilde{\Psi}^{\xi,\mathrm{unr}}_{\mathrm{sim}}(G) = \sum_{a\in A} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_{m_a})/\mathbb{Q}}\bigl(P_a(k_{j_1},\ldots,k_{j_r})\zeta_{m_a}^{\Lambda_a(k_{j_1},\ldots,k_{j_r})}\bigr).$$

さらに，$n \leq 6$ または $G = \mathrm{Sp}_{14}$ の場合には，$\{(m_a,P_a,\Lambda_a)\}_{a\in A}$ は具体的に計算できる [注 22].

定理 5.2 の証明について簡単に説明を行う．証明は $\widehat{G}$ の自然表現の次元に関する帰納法によってなされる．以下，簡単のため $G \neq \mathrm{SO}_{2n}$ として考える.

素数 p に対し $f_p = \mathrm{vol}(G(\mathbb{Z}_p))^{-1}\mathbf{1}_{G(\mathbb{Z}_p)} \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_p))$ と定める．また，支配的ウェイト $\xi = k_1e_1 + \cdots + k_ne_n \in X^*(T)$ を固定し，ξ に伴う Euler-Poincaré 関数 ([CD90, Théorème 3]) を f_∞ と書く．$f = \bigotimes_{v\leq\infty} f_v$ に対して Arthur 跡公式を用いると，これは単純化された形になっている（[Art89a] 参照）．この跡公式の幾何側（軌道積分側）を具体的に計算する手法が [Taï17a, §3] において考案されており，その結果として，

$$(**) \qquad \sum_{\pi\in\mathcal{A}^{\mathrm{unr}}_{\mathrm{disc}}(G)} m(\pi)\,\mathrm{EP}(\pi_\infty \otimes V_\xi^\vee) = ((*) \text{ の右辺のような形})$$

という等式が得られる．ここで，$\mathcal{A}^{\mathrm{unr}}_{\mathrm{disc}}(G) \subset \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(G)$ は全ての有限素点において不分岐な元のなす部分集合を表し，$\mathrm{EP}(\pi_\infty \otimes V_\xi^\vee) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K_\infty; \pi_\infty \otimes V_\xi^\vee)$ は $\pi_\infty \otimes V_\xi^\vee$ の Euler-Poincaré 標数を表す.

[注 21] この条件は ψ_∞ を用いて代数的に記述することもできる．[Taï17a, Lemma 4.1.3] 参照.

[注 22] これは計算機における実装の問題であり，これよりサイズが大きくなると理論的な問題が起こるわけではない．なお，$G = \mathrm{Sp}_6$, $J = \{1,2,3\}$ の場合には $\#A = 370$ になるとのことである ([Taï17a, Remark 4.3.2]).

一方，大域 Arthur 分類を用いると，$(**)$ の左辺は

$$\sum_{\psi\in\widetilde{\Psi}^{\mathrm{unr},\xi}_{\mathrm{disc}}(G)}\ \sum_{\substack{\pi_\infty\in\Pi_{\psi_\infty}\\ \langle -,\pi_\infty\rangle=\varepsilon_\psi}} \mathrm{EP}(\pi_\infty\otimes V_\xi^\vee)$$

と表すことができる（π_∞ と V_ξ の無限小指標が一致しない場合は $\mathrm{EP}(\pi_\infty\otimes V_\xi^\vee)=0$ であることに注意）．

$\psi\in\widetilde{\Psi}^{\mathrm{unr},\xi}_{\mathrm{sim}}(G)$ の場合には，$\pi_\infty\in\Pi_{\psi_\infty}$ は離散系列表現となり ([Taï17a, p. 311])，[BW00, Chapter III, Theorem 5.1] より $\mathrm{EP}(\pi_\infty\otimes V_\xi^\vee)=(-1)^{q(G(\mathbb{R}))}$ である（$q(G(\mathbb{R}))=(\dim G(\mathbb{R})-\dim K_\infty)/2$ とおいた）．また，$\#\Pi_{\psi_\infty}$ は ψ_∞ に依存しない定数である（§3.2 の記号を用いると $\#\Pi_{\psi_\infty}=\#(\Omega_{\mathbb{R}}\backslash\mathcal{B})$ である）．これを C と書くと，

$$\sum_{\psi\in\widetilde{\Psi}^{\mathrm{unr},\xi}_{\mathrm{sim}}(G)}\ \sum_{\substack{\pi_\infty\in\Pi_{\psi_\infty}\\ \langle -,\pi_\infty\rangle=\varepsilon_\psi}} \mathrm{EP}(\pi_\infty\otimes V_\xi^\vee)=(-1)^{q(G(\mathbb{R}))}C\cdot\#\widetilde{\Psi}^{\mathrm{unr},\xi}_{\mathrm{sim}}(G)$$

を得る．一方，$\psi\in\widetilde{\Psi}^{\mathrm{unr},\xi}_{\mathrm{disc}}(G)\setminus\widetilde{\Psi}^{\mathrm{unr},\xi}_{\mathrm{sim}}(G)$ に関する和は G のエンドスコピー群からの寄与とみなせるので，帰納法の仮定によって $(*)$ の右辺のような形となっていることが示せる（この部分に，Adams-Johnson [AJ87] による A パケットの構成と，それが Arthur の A パケットと一致しているという結果 [AMR15] を用いる）．以上のことから，$\#\widetilde{\Psi}^{\mathrm{unr},\xi}_{\mathrm{sim}}(G)$ も $(*)$ の右辺のような形となっていることが従うので，証明が完了する．

定理 5.2 から，レベル 1 の Siegel 尖点形式の次元についての結果を導くことができる．$k_1\ge k_2\ge\cdots\ge k_n$ を満たす整数の組 $\underline{k}=(k_1,\dots,k_n)$ に対し，$(k_1,\dots,k_n)$ を最高ウェイトに持つ $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の有限次元既約表現を $r_{\underline{k}}$ と書き，種数 n，重さ $r_{\underline{k}}$，レベル 1 の Siegel 尖点形式の空間を $S_{\underline{k}}(\Gamma_n)$ と書く．

定理 5.3 ([Taï17a, Theorem A])．　整数 $n\ge 1$ に対し，以下のような 3 つ組の有限族 $\{(m_a,P_a,\Lambda_a)\}_{a\in A}$ が存在する：

- m_a は 1 以上の整数．
- $P_a\in\mathbb{Q}(\zeta_{m_a})[X_1,\dots,X_r]$（$\zeta_{m_a}$ は 1 の原始 m_a 乗根）．
- $\Lambda_a\colon(\mathbb{Z}/m_a\mathbb{Z})^r\to\mathbb{Z}/m_a\mathbb{Z}$ は全射準同型．
- $k_1\ge k_2\ge\cdots\ge k_n>n+1$ を満たす整数の組 $\underline{k}=(k_1,\dots,k_n)$ に対し，以下が成り立つ：
$$\dim S_{\underline{k}}(\Gamma_n)=\sum_{a\in A}\mathrm{tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_{m_a})/\mathbb{Q}}\bigl(P_a(k_{j_1},\dots,k_{j_r})\zeta_{m_a}^{\Lambda_a(k_{j_1},\dots,k_{j_r})}\bigr).$$

さらに，$n\le 7$ の場合には，$\{(m_a,P_a,\Lambda_a)\}_{a\in A}$ は具体的に計算できる．

証明の方針は以下の通りである．種数 n の Siegel 保型形式と PGSp_{2n} の保型表現の対応（[AS01], [Taï17a, §5.2] 参照）により，以下の条件を満たす $\pi\in\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGSp}_{2n})$ にわたる $m(\pi)$ の和が $\dim S_{\underline{k}}(\Gamma_n)$ と等しいことが分かる：

- 任意の素数 p に対し π_p は不分岐.
- $\pi_\infty \cong \pi_\xi^{\mathrm{hol}}$．ここで π_ξ^{hol} は，支配的ウェイト $\xi = (k_1-n-1)e_1+\cdots+(k_n-n-1)e_n$ に伴う PGSp_{2n} の有限次元既約表現と同じ無限小指標を持つ $\mathrm{PGSp}_{2n}(\mathbb{R})$ の正則離散系列表現を表す.

[Wal84, Theorem 4.3] より，$\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{PGSp}_{2n})\setminus\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGSp}_{2n})$ ならば π_∞ は緩増加ではなく，したがって $\pi_\infty \not\cong \pi_\xi^{\mathrm{hol}}$ なので，上記の π は $\mathcal{A}_{\mathrm{cusp}}(\mathrm{PGSp}_{2n})$ 内ではなく $\mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{PGSp}_{2n})$ 内を動かしてもよいことが分かる．さらに，Sp_{2n} と PGSp_{2n} の保型表現を比較することで，以下の条件を満たす $\pi \in \mathcal{A}_{\mathrm{disc}}(\mathrm{Sp}_{2n})$ にわたる $m(\pi)$ の和を求めればよいことが分かる ([CR15, §4.3], [Taï17a, Remark 5.2.2])：

- 任意の素数 p に対し π_p は不分岐.
- $\pi_\infty \cong \pi_{\xi,+}^{\mathrm{hol}}$．ここで $\pi_{\xi,+}^{\mathrm{hol}}$ は，支配的ウェイト $\xi = (k_1-n-1)e_1+\cdots+(k_n-n-1)e_n$ に伴う Sp_{2n} の有限次元既約表現と同じ無限小指標を持つ $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ の正則離散系列表現のうちの一方を表す（[Taï17a, §5.1] 参照).

このような π は，ある $\psi \in \widetilde{\Psi}_{\mathrm{disc}}^{\mathrm{unr},\xi}(\mathrm{Sp}_{2n})$ に対する A パケット Π_ψ に属している．$\widetilde{\Psi}_{\mathrm{disc}}^{\mathrm{unr},\xi}(\mathrm{Sp}_{2n})$ の元はいくつかの群 G に対する $\widetilde{\Psi}_{\mathrm{sim}}^{\mathrm{unr},\xi_G}(G)$ の元の和で書くことができ，さらにそれぞれの場合に応じて A パケットにいつ上記 2 条件を満たす π が属するかを決定することができる ([Taï17a, §5.3] に $n=4$ の場合の例が載っている)．このことと定理 5.2 の $J=\{1,\ldots,n\}$ の場合から，定理 5.3 のうち $k_1>k_2>\cdots>k_n>n+1$ の場合が従う.

定理 5.3 の証明を完成させるためには，上で選んだ $\{(m_a,P_a,\Lambda_a)\}_{a\in A}$ および $k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_n>n+1$ となる $\underline{k}=(k_1,\ldots,k_n)$ に対して

$$\dim S_{\underline{k}}(\Gamma_n) = \sum_{a\in A} \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_{m_a})/\mathbb{Q}}\bigl(P_a(k_{j_1},\ldots,k_{j_r})\zeta_{m_a}^{\Lambda_a(k_{j_1},\ldots,k_{j_r})}\bigr)$$

が成り立つことを証明する必要があるが，ここではふれない．[Taï17a, §5.4] を参照.

§ 5.2. Galois 表現の Selmer 群の階数

ここでは，GL_n の保型表現に伴う Galois 表現の Selmer 群の階数と L 関数の中心値との関係に関する Bellaïche-Chenevier [BC09] の結果についてごく簡単に述べる.

まず，Galois 表現の Selmer 群について簡単に復習する．E を代数体とする．F を p 進体とし，p 進 Galois 表現 $R\colon \Gamma_E \to \mathrm{GL}_n(F)$ を考える．R は代数的であると仮定する（注意 4.6 参照)．E の各有限素点 v に対し，

- $H^1(E,R)\to H^1(E_v,R)\to H^1(I_{E_v},R)$ （$v\nmid p$ のとき）
- $H^1(E,R)\to H^1(E_v,R)\to H^1(E_v,B_{\mathrm{crys}}\otimes R)$ （$v\mid p$ のとき）

という準同型を考える．これらの準同型で 0 にうつる $H^1(E,R)$ の元全体を $\mathrm{Sel}(R)$ と書き，R の Selmer 群という [注 23]．これは楕円曲線に対する Selmer 群の一般化となっている.

楕円曲線に対する BSD 予想の一般化として，以下の予想が知られている：

[注 23] $H_f^1(E,R)$ と書かれることもある.

予想 5.4 (Bloch-Kato 予想).

$$\operatorname{ord}_{s=0} L(s,R) = \dim_F \operatorname{Sel}(R^\vee(1)) - \dim_F H^0(E, R^\vee(1)).$$

以下では E を虚二次体とし，その複素共役を c と書く．n を 4 で割り切れない整数とし，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$ の自己共役双対的な尖点的保型表現 Π で以下を満たすものを考える [注 24]：

- $\Pi \otimes |\det|^{1/2}$ は正則 L 代数的である．
- Π の無限小指標を $(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n)$ とすると，$a_i \neq \pm 1/2$ である．
- $E/\mathbb{Q}$ で非分解である E の素点 v に対し，Π_v は [BC09, 6.9.1 (iii)] にある条件を満たす（詳細は省略）．

定理 4.5 より，$\Pi \otimes |\det|^{1/2}$ に対応する Galois 表現 $R\colon \Gamma_E \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ が存在する．Γ_E の連続表現に関する一般論から，$\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 F で $\operatorname{Im} R \subset \mathrm{GL}_n(F)$ を満たすものが存在するので，R は上で考えていた p 進 Galois 表現 $\Gamma_E \to \mathrm{GL}_n(F)$ を与える．R が代数的であることも証明済みである．

この Galois 表現に対し，以下が成り立つ：

定理 5.5. $\varepsilon(0,R) = -1$ ならば $\operatorname{Sel}(R) \neq 0$ である．

ここで，$\varepsilon(0,R)$ は R の完備化 L 関数 $\Lambda(s,R)$ [注 25] の関数等式 [注 26]

$$\Lambda(s,R) = \varepsilon(s,R)\Lambda(-s, R^\vee(1))$$

における ε 因子の中心値である．Π が自己共役双対的であるという仮定から，$R^\vee(1) \cong R^c$ となるので，上記の関数等式は $\Lambda(s,R) = \varepsilon(s,R)\Lambda(-s,R^c) = \varepsilon(s,R)\Lambda(-s,R)$ となる．$s=0$ における Laurent 展開を比較することで $\varepsilon(0,R) = \pm 1$ が分かるが，定理 5.5 ではそのうち $\varepsilon(0,R) = -1$ となる場合を考えるということである．

定理 5.5 と予想 5.4 との関係について述べよう．関数等式に $s=0$ を代入すると $\Lambda(0,R) = \varepsilon(0,R)\Lambda(0,R)$ となるので，$\varepsilon(0,R) = -1$ から $\Lambda(0,R) = 0$ すなわち $L(0,R) = 0$ が分かる．よって，予想 5.4 が正しいならば $\dim_F \operatorname{Sel}(R) = \dim_F \operatorname{Sel}(R^c) = \dim_F \operatorname{Sel}(R^\vee(1)) > 0$ となるはずであるが，これが実際に証明されているということである（なお，この R に対しては $H^0(E, R^\vee(1)) = H^0(E, R^c) = H^0(E,R) = 0$ となることが容易に分かるので，予想 5.4 の等式は $\operatorname{ord}_{s=0} L(s,R) = \dim_F \operatorname{Sel}(R)$ となる）．

最後に，定理 5.5 の証明の概要を説明する．$\operatorname{Sel}(R)$ は $H^1(E,R) = \operatorname{Ext}^1_{\Gamma_E}(\mathbf{1}, R)$ の部分群なので，$\operatorname{Sel}(R)$ の元を与えるためには，Γ_E の表現の拡大 $0 \to R \to U \to \mathbf{1} \to 0$ で，適切な性質を満たすものを構成すればよい．基本的な考え方は，自明な拡大 $R \oplus \mathbf{1}$ を p 進

[注 24] [BC09] では，さらに Π が緩増加であることが仮定されているが，自己共役双対的かつ正則 L 代数的な尖点的保型表現に対する Ramanujan-Petersson 予想が証明されていることから ([Car12, Corollary 5.9])，この仮定は現在では不要である．

[注 25] $L(s,R)$ に適切な Γ 因子をかけたものである．Γ 因子の具体的な形は [Tat79] 等を参照．

[注 26] もちろん，この関数等式は R が保型表現に伴うことを用いて証明されるのであって，一般の Galois 表現 R に対する直接証明は非常に困難であると考えられている．

的に動かして非自明な拡大 U を作ろうというものである．しかし，Galois 表現の世界で直接このような変形を扱うのは困難であるため，保型表現の世界に移り，保型表現（正確にはその Hecke 固有値）の p 進族をパラメータ付ける空間である固有値多様体の理論を使うことによって目的を達成することを考える．

以下では簡単のため，n が偶数の場合を考える．$m = n + 2$ とおき，

$$U(m)(\mathbb{Q}) = \{g \in \mathrm{GL}_m(E) \mid gc({}^t g) = 1\}$$

となるようなユニタリ群 $U(m)$ を考える．これは無限素点においてコンパクトなユニタリ群である．Π の L パラメータを $\psi_\Pi\colon L_E \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ と書き，A パラメータ $\psi_\Pi \oplus (1 \boxtimes \mathrm{Std})\colon L_E \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ を考える．これは $U(m)$ の A パラメータ ψ' の $L_E \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ への制限とみなすことができる．$\mathbb{Q}$ の各素点 v に対し，$U(m)(\mathbb{Q}_v)$ の局所 A パケットの元 $\pi_v^n \in \Pi_{\psi'_v}$ を適切に定め（[BC09, §6.9] 参照），それらの制限テンソル積をとることで得られる $U(m)(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の表現を π^n と書く．これは $U(m)$ の大域 A パケット $\Pi_{\psi'}$ の元であり，$\varepsilon(0, R) = -1$ という仮定より $\langle -, \pi^n \rangle = \varepsilon_{\psi'}$ となるので，大域 Arthur 分類から π^n は $U(m)(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現であることが分かる（[BC09, §A.13] を参照）．なお，π^n の右上の n は "non-tempered" を表しており，$\psi'|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ が非自明であることと対応している．

Bellaïche-Chenevier により，π^n を含む固有値多様体 X が構成されている．前述の通り，これは $U(m)$ の保型表現の Hecke 固有値を p 進的に補間して得られるリジッド空間である．$\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_E)$ への持ち上げと定理 4.5 を組み合わせることで，（無限小指標に関する適切な仮定のもとで）$U(m)$ の保型表現に Γ_E の Galois 表現を対応させることができるが，その指標を p 進的に補間することで，X 上に擬指標 (pseudocharacter) $\Gamma_E \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ というものを構成することができる．これがいわば，X 上の p 進保型表現の普遍族に対応する Galois 表現の族にあたるものとなっている．擬指標 $\Gamma_E \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ の $\pi^n \in X$ の近傍への制限を利用して所望の拡大 $0 \to R \to U \to \mathbf{1} \to 0$ が得られるのだが，本題から外れるのでこれ以上の説明は行わない．擬指標の理論および拡大の構成に関する一般論は [BC09, §1] にまとまっているので，興味をお持ちの方はそちらをご覧いただきたい．

この証明の面白いところは，L 関数の中心値が消えることを保証する $\varepsilon(0, R) = -1$ という条件が，$U(m)(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の表現 π^n の保型性を保証する $\langle -, \pi^n \rangle = \varepsilon_{\psi'}$ という，一見全く関わりのないような条件と繋がっているという点にあると思う．このような関係が偶発的なものなのか，それとも，より大きな理論の一端となっているのかは興味を惹かれるところである．

謝辞

本稿の内容に関する私の理解は，第 1 回〜第 6 回倉敷整数論集会（2010 年〜2015 年）で学んだことと 2015 年度整数論サマースクール「志村多様体とその応用」で講演したことがもとになっています．倉敷整数論集会の主催者である伊藤哲史氏（京大理）と講演者・参加者の皆様に感謝します．また，2015 年度整数論サマースクールを私とともに主催してくださった伊藤哲史氏，千田雅隆氏（東北大理）に感謝します．千田氏には，5.2

節の内容についても有益なご教示をいただきました．また，跡部発氏（東大数理）には，関連分野の最近の進展について，数多くの文献を教えていただきました．伊藤氏，千田氏，跡部氏に加え，阿部紀行氏（北大理），大井雅雄氏（東大数理），越川皓永氏（京大数理研），谷口隆氏（神戸大理）は，完成前の本稿を読んで有益なコメントや指摘を送ってくださいました．ここに感謝の意を表します．最後になりましたが，研究集会「代数的整数論とその周辺 2016」の世話人の皆様には，講演および本講究録執筆の機会をくださったことを深く感謝いたします．

References

[AC89] J. Arthur and L. Clozel, *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Annals of Mathematics Studies, vol. 120, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[AJ87] J. Adams and J. F. Johnson, *Endoscopic groups and packets of nontempered representations*, Compositio Math. **64** (1987), no. 3, 271–309.

[AMR15] N. Arancibia, C. Mœglin, and D. Renard, *Paquets d'Arthur des groupes classiques et unitaires*, preprint, arXiv:1507.01432, 2015.

[Art89a] J. Arthur, *The L^2-Lefschetz numbers of Hecke operators*, Invent. Math. **97** (1989), no. 2, 257–290.

[Art89b] ———, *Unipotent automorphic representations: conjectures*, Astérisque (1989), no. 171-172, 13–71, Orbites unipotentes et représentations, II.

[Art01] ———, *A stable trace formula. II. Global descent*, Invent. Math. **143** (2001), no. 1, 157–220.

[Art02] ———, *A stable trace formula. I. General expansions*, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), no. 2, 175–277.

[Art03] ———, *A stable trace formula. III. Proof of the main theorems*, Ann. of Math. (2) **158** (2003), no. 3, 769–873.

[Art05] ———, *An introduction to the trace formula*, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, Clay Math. Proc., vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 1–263.

[Art13a] ———, *The endoscopic classification of representations: Orthogonal and symplectic groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 61, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[Art13b] ———, *Classifying automorphic representations*, Current developments in mathematics 2012, Int. Press, Somerville, MA, 2013, pp. 1–58.

[AS01] M. Asgari and R. Schmidt, *Siegel modular forms and representations*, Manuscripta Math. **104** (2001), no. 2, 173–200.

[Ato15] H. Atobe, *On the uniqueness of generic representations in an L-packet*, arXiv:1511.08897, 2015.

[BC83] A. Borel and W. Casselman, *L^2-cohomology of locally symmetric manifolds of finite volume*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 3, 625–647.

[BC09] J. Bellaïche and G. Chenevier, *Families of Galois representations and Selmer groups*, Astérisque (2009), no. 324, xii+314.

[BG14] K. Buzzard and T. Gee, *The conjectural connections between automorphic representations and Galois representations*, Automorphic Forms and Galois Representations. Volume 1, Cambridge University Press, Cambridge, 2014, pp. 135–187.

[BJ79] A. Borel and H. Jacquet, *Automorphic forms and automorphic representations*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, With a supplement "On the notion of an automorphic representation" by R. P. Langlands, pp. 189–207.

[Bla94] D. Blasius, *On multiplicities for* $\mathrm{SL}(n)$, Israel J. Math. **88** (1994), no. 1-3, 237–251.

[BR89] D. Blasius and J. Rogawski, *Galois representations for Hilbert modular forms*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **21** (1989), no. 1, 65–69.

[BW00] A. Borel and N. Wallach, *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, second ed., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 67, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[Car12] A. Caraiani, *Local-global compatibility and the action of monodromy on nearby cycles*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 12, 2311–2413.

[CC09] G. Chenevier and L. Clozel, *Corps de nombres peu ramifiés et formes automorphes autoduales*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), no. 2, 467–519.

[CD90] L. Clozel and P. Delorme, *Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs. II*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **23** (1990), no. 2, 193–228.

[CH13] G. Chenevier and M. Harris, *Construction of automorphic Galois representations, II*, Camb. J. Math. **1** (2013), no. 1, 53–73.

[CHL11a] L. Clozel, M. Harris, and J.-P. Labesse, *Endoscopic transfer*, On the stabilization of the trace formula, Stab. Trace Formula Shimura Var. Arith. Appl., vol. 1, Int. Press, Somerville, MA, 2011, pp. 475–496.

[CHL11b] ———, *Construction of automorphic Galois representations, I*, On the stabilization of the trace formula, Stab. Trace Formula Shimura Var. Arith. Appl., vol. 1, Int. Press, Somerville, MA, 2011, pp. 497–527.

[CHT08] L. Clozel, M. Harris, and R. Taylor, *Automorphy for some l-adic lifts of automorphic mod l Galois representations*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2008), no. 108, 1–181, With Appendix A, summarizing unpublished work of Russ Mann, and Appendix B by Marie-France Vignéras.

[CL10] P.-H. Chaudouard and G. Laumon, *Le lemme fondamental pondéré. I. Constructions géométriques*, Compos. Math. **146** (2010), no. 6, 1416–1506.

[CL12] ———, *Le lemme fondamental pondéré. II. énoncés cohomologiques*, Ann. of Math. (2) **176** (2012), no. 3, 1647–1781.

[Clo91] L. Clozel, *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de* $\mathrm{GL}(n)$, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1991), no. 73, 97–145.

[Clo11] ———, *Identités de caractères en la place archimédienne*, On the stabilization of the trace formula, Stab. Trace Formula Shimura Var. Arith. Appl., vol. 1, Int. Press, Somerville, MA, 2011, pp. 351–367.

[CR15] G. Chenevier and D. Renard, *Level one algebraic cusp forms of classical groups of small rank*, Mem. Amer. Math. Soc. **237** (2015), no. 1121, v+122.

[Del71] P. Deligne, *Travaux de Shimura*, Séminaire Bourbaki, 23ème année (1970/71), Exp. No. 389, Springer, Berlin, 1971, pp. 123–165. Lecture Notes in Math., Vol. 244.

[Del79] ———, *Variétés de Shimura: interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 247–289.

[FQ73] A. Fröhlich and J. Queyrut, *On the functional equation of the Artin L-function for characters of real representations*, Invent. Math. **20** (1973), 125–138.

[Gan08] W. T. Gan, *The Saito-Kurokawa space of* PGSp_4 *and its transfer to inner forms*, Eisenstein series and applications, Progr. Math., vol. 258, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2008, pp. 87–123.

[GGJ02] W. T. Gan, N. Gurevich, and D. Jiang, *Cubic unipotent Arthur parameters and multiplicities of square integrable automorphic forms*, Invent. Math. **149** (2002), no. 2, 225–265.

[GJ79] S. Gelbart and H. Jacquet, *Forms of* $\mathrm{GL}(2)$ *from the analytic point of view*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 213–251.

[Hal93] T. C. Hales, *A simple definition of transfer factors for unramified groups*, Representation theory of groups and algebras, Contemp. Math., vol. 145, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 109–134.

[HLTT16] M. Harris, K.-W. Lan, R. Taylor, and J. Thorne, *On the rigid cohomology of certain Shimura varieties*, Res. Math. Sci. **3** (2016), Paper No. 37, 308.

[HSBT10] M. Harris, N. Shepherd-Barron, and R. Taylor, *A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy*, Ann. of Math. (2) **171** (2010), no. 2, 779–813.

[HT01] M. Harris and R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, With an appendix by Vladimir G. Berkovich.

[Hir00] 平賀郁，Arthur の予想について，数理解析研究所講究録 1173「代数群上の保型形式・保型表現と保型的 L 関数」，2000.

[Igu62] J. Igusa, *On Siegel modular forms of genus two*, Amer. J. Math. **84** (1962), 175–200.

[Ito14] 伊藤哲史，Perfectoid 空間論の整数論への応用，数理解析研究所講究録別冊「代数的整数論とその周辺 2014」，2014.

[JS81a] H. Jacquet and J. A. Shalika, *On Euler products and the classification of automorphic representations. I*, Amer. J. Math. **103** (1981), no. 3, 499–558.

[JS81b] ———, *On Euler products and the classification of automorphic forms. II*, Amer. J. Math. **103** (1981), no. 4, 777–815.

[Kal11] T. Kaletha, *Endoscopic character identities for depth-zero supercuspidal L-packets*, Duke Math. J. **158** (2011), no. 2, 161–224.

[Kal14] ———, *Supercuspidal L-packets via isocrystals*, Amer. J. Math. **136** (2014), no. 1, 203–239.

[Kal15] ———, *Global rigid inner forms and multiplicities of discrete automorphic representations*, arXiv:1501.01667, 2015.

[Kal16] ———, *Rigid inner forms of real and p-adic groups*, Ann. of Math. (2) **184** (2016), no. 2, 559–632.

[Kis17] M. Kisin, *Mod p points on Shimura varieties of abelian type*, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), no. 3, 819–914.

[KMSW14] T. Kaletha, A. Minguez, S. W. Shin, and P.-J. White, *Endoscopic Classification of Representations: Inner Forms of Unitary Groups*, arXiv:1409.3731, 2014.

[Kot84] R. E. Kottwitz, *Stable trace formula: cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. **51** (1984), no. 3, 611–650.

[Kot86] ———, *Stable trace formula: elliptic singular terms*, Math. Ann. **275** (1986), no. 3, 365–399.

[Kot90] ———, *Shimura varieties and λ-adic representations*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math., vol. 10, Academic Press, Boston, MA, 1990, pp. 161–209.

[Kot92a] ———, *On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties*, Invent. Math. **108** (1992), no. 3, 653–665.

[Kot92b] ———, *Points on some Shimura varieties over finite fields*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 2, 373–444.

[Kot14] ———, *B(G) for all local and global fields*, arXiv:1401.5728, 2014.

[KS99] R. E. Kottwitz and D. Shelstad, *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque (1999), no. 255, vi+190.

[Lab11] J.-P. Labesse, *Changement de base CM et séries discrètes*, On the stabilization of the trace formula, Stab. Trace Formula Shimura Var. Arith. Appl., vol. 1, Int. Press, Somerville, MA, 2011, pp. 429–470.

[LL79] J.-P. Labesse and R. P. Langlands, *L-indistinguishability for* $\mathrm{SL}(2)$, Canad. J. Math. **31** (1979), no. 4, 726–785.

[LN08] G. Laumon and B. C. Ngô, *Le lemme fondamental pour les groupes unitaires*, Ann. of Math. (2) **168** (2008), no. 2, 477–573.

[Loo88] E. Looijenga, *L^2-cohomology of locally symmetric varieties*, Compositio Math. **67** (1988), no. 1, 3–20.

[LS87] R. P. Langlands and D. Shelstad, *On the definition of transfer factors*, Math. Ann. **278** (1987), no. 1-4, 219–271.

[Mil05] J. S. Milne, *Introduction to Shimura varieties*, Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, Clay Math. Proc., vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 265–378.

[Mœg11] C. Mœglin, *Multiplicité 1 dans les paquets d'Arthur aux places p-adiques*, On certain L-functions, Clay Math. Proc., vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 333–374.

[Mok15] C. P. Mok, *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **235** (2015), no. 1108, vi+248.

[Mor08] S. Morel, *Complexes pondérés sur les compactifications de Baily-Borel: le cas des variétés de Siegel*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), no. 1, 23–61 (electronic).

[Mor10] ———, *On the cohomology of certain noncompact Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 173, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2010, With an appendix by Robert Kottwitz.

[MT02] C. Mœglin and M. Tadić, *Construction of discrete series for classical p-adic groups*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 3, 715–786 (electronic).

[MW89] C. Mœglin and J.-L. Waldspurger, *Le spectre résiduel de* $\mathrm{GL}(n)$, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **22** (1989), no. 4, 605–674.

[MW16a] ———, *Stabilisation de la formule des traces tordue, Volume 1*, Progress in Mathematics, vol. 316, Birkhäuser Basel, 2016.

[MW16b] ———, *Stabilisation de la formule des traces tordue, Volume 2*, Progress in Mathematics, vol. 317, Birkhäuser Basel, 2016.

[Ngô10] B. C. Ngô, *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2010), no. 111, 1–169.

[PS83] I. I. Piatetski-Shapiro, *On the Saito-Kurokawa lifting*, Invent. Math. **71** (1983), no. 2, 309–338.

[Rog92] J. D. Rogawski, *Analytic expression for the number of points mod p*, The zeta functions of Picard modular surfaces, Univ. Montréal, Montreal, QC, 1992, pp. 65–109.

[Sch15] P. Scholze, *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*, Ann. of Math. (2) **182** (2015), no. 3, 945–1066.

[She79] D. Shelstad, *Notes on L-indistinguishability (based on a lecture of R. P. Langlands)*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 193–203.

[Shi11] S. W. Shin, *Galois representations arising from some compact Shimura varieties*, Ann. of Math. (2) **173** (2011), no. 3, 1645–1741.

[Sor] C. M. Sorensen, *A patching lemma*, preprint, `http://www.imj-prg.fr/fa/bpFiles/Sorensen.pdf`.

[SS90] L. Saper and M. Stern, *L_2-cohomology of arithmetic varieties*, Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 1, 1–69.

[Taï17a] O. Taïbi, *Dimensions of spaces of level one automorphic forms for split classical groups using the trace formula*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **50** (2017), no. 2, 269–344.

[Taï17b] ———, *On rigid inner forms*, arXiv:1701.01330, 2017.

[Tat79] J. Tate, *Number theoretic background*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 3–26.

[Tay89] R. Taylor, *On Galois representations associated to Hilbert modular forms*, Invent. Math. **98** (1989), no. 2, 265–280.

[Tay08] ———, *Automorphy for some l-adic lifts of automorphic mod l Galois representations. II*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2008), no. 108, 183–239.

[Tsu83] R. Tsushima, *An explicit dimension formula for the spaces of generalized automorphic forms with respect to* $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{Z})$, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **59** (1983), no. 4, 139–142.

[Tsu84] ———, *An explicit dimension formula for the spaces of generalized automorphic forms with respect to* $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{Z})$, Automorphic forms of several variables (Katata, 1983), Progr. Math., vol. 46, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1984, pp. 378–383.

[Tsu86] S. Tsuyumine, *On Siegel modular forms of degree three*, Amer. J. Math. **108** (1986), no. 4, 755–862.

[Var17] S. Varma, *On descent and the generic packet conjecture*, Forum Math. **29** (2017), no. 1, 111–155.

[VZ84] D. A. Vogan, Jr. and G. J. Zuckerman, *Unitary representations with nonzero cohomology*, Compositio Math. **53** (1984), no. 1, 51–90.

[Wal84] N. R. Wallach, *On the constant term of a square integrable automorphic form*, Operator algebras and group representations, Vol. II (Neptun, 1980), Monogr. Stud. Math., vol. 18, Pitman, Boston, MA, 1984, pp. 227–237.

[Wal91] J.-L. Waldspurger, *Correspondances de Shimura et quaternions*, Forum Math. **3** (1991), no. 3, 219–307.

[Wal97] ———, *Le lemme fondamental implique le transfert*, Compositio Math. **105** (1997), no. 2, 153–236.

[Wal06] ———, *Endoscopie et changement de caractéristique*, J. Inst. Math. Jussieu **5** (2006), no. 3, 423–525.

[Wal08] ———, *L'endoscopie tordue n'est pas si tordue*, Mem. Amer. Math. Soc. **194** (2008), no. 908, x+261.

[Xu15a] B. Xu, *L-packets of quasisplit $GSp(2n)$ and $GO(2n)$*, preprint, arXiv:1503.04897, to appear in Math. Ann., 2015.

[Xu15b] ———, *On the cuspidal support of discrete series for p-adic quasisplit $Sp(N)$ and $SO(N)$*, preprint, arXiv:1504.08364, to appear in Manuscripta Math., 2015.

[Xu17] ———, *On Mœglin's Parametrization of Arthur Packets for p-adic Quasisplit $Sp(N)$ and $SO(N)$*, Canad. J. Math. **69** (2017), no. 4, 890–960.