非可換 Lubin-Tate 理論の一般化に向けて

三枝 洋一

京都大学白眉センター／大学院理学研究科数学教室

2012 年 9 月 18 日

概要

概要

- Lubin-Tate 理論：
  p 進体の最大アーベル拡大（≒ 局所類体論）の幾何学的実現
  高さ 1 の 1 次元形式群を用いる

概要

- Lubin-Tate 理論：
  p 進体の最大アーベル拡大（$\fallingdotseq$ 局所類体論）の幾何学的実現
  高さ 1 の 1 次元形式群を用いる
- 非可換 Lubin-Tate 理論：
  GL_n の局所ラングランズ対応の幾何学的実現
  高さ n の 1 次元形式群の変形空間（Lubin-Tate 空間）を用いる

概要

- Lubin-Tate 理論：
  p 進体の最大アーベル拡大（≒ 局所類体論）の幾何学的実現
  高さ 1 の 1 次元形式群を用いる
- 非可換 Lubin-Tate 理論：
  GL_n の局所ラングランズ対応の幾何学的実現
  高さ n の 1 次元形式群の変形空間（Lubin-Tate 空間）を用いる
- 非可換 Lubin-Tate 理論の一般化：
  p 進簡約代数群に対する局所ラングランズ対応の幾何学的実現
  Rapoport-Zink 空間を用いる

Galois 群に関する記号

Galois 群に関する記号

- p : 素数
- $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$: 絶対 Galois 群

Galois 群に関する記号

- p : 素数
- $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$: 絶対 Galois 群

$$1 \longrightarrow I \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{(*)} \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \longrightarrow 1$$

Galois 群に関する記号

- p：素数
- $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$：絶対 Galois 群

$$1 \longrightarrow I \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{(*)} \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \longrightarrow 1$$

- $\mathrm{Frob} \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$：幾何学的 Frobenius 元（$x \longmapsto x^{1/p}$）

Galois 群に関する記号

- p : 素数
- $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$: 絶対 Galois 群

$$1 \longrightarrow I \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{(*)} \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \longrightarrow 1$$

- $\mathrm{Frob} \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$: 幾何学的 Frobenius 元（$x \longmapsto x^{1/p}$）
- $W \subset \Gamma$（$\mathbb{Q}_p$ の Weil 群）: $\mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}} \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ の $(*)$ での逆像

GL_n の局所ラングランズ対応

GL_n の局所ラングランズ対応

定理 (GL_n の局所ラングランズ対応，Harris-Taylor, Henniart)

次の 2 つの間に自然な一対一対応がある：

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の既約スムーズ表現
- Frobenius 半単純な Weil-Deligne 表現 $\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

GL_n の局所ラングランズ対応

定理 (GL_n の局所ラングランズ対応，Harris-Taylor, Henniart)

次の 2 つの間に自然な一対一対応がある：

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の既約スムーズ表現
- Frobenius 半単純な Weil-Deligne 表現 $\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

- 位相群 H の表現 (π, V) が**スムーズ**とは，任意の $x \in V$ に対し $\mathrm{Stab}_H(x) = \{h \in H \mid hx = x\}$ が H の開部分群となること．

GL_n の局所ラングランズ対応

定理 (GL_n の局所ラングランズ対応，Harris-Taylor, Henniart)

次の 2 つの間に自然な一対一対応がある：

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の既約スムーズ表現
- Frobenius 半単純な Weil-Deligne 表現 $\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

- 位相群 H の表現 (π, V) が**スムーズ**とは，任意の $x \in V$ に対し $\mathrm{Stab}_H(x) = \{h \in H \mid hx = x\}$ が H の開部分群となること．
- Weil-Deligne 表現 ϕ が **Frobenius 半単純**とは，任意の $w \in W$ に対し $\phi(w)$ が半単純となること．

GL_n の局所ラングランズ対応

定理 (GL_n の局所ラングランズ対応，Harris-Taylor, Henniart)

次の 2 つの間に自然な一対一対応がある：

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の既約スムーズ表現
- Frobenius 半単純な Weil-Deligne 表現 $\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

- 位相群 H の表現 (π, V) が**スムーズ**とは，任意の $x \in V$ に対し $\mathrm{Stab}_H(x) = \{h \in H \mid hx = x\}$ が H の開部分群となること．
- Weil-Deligne 表現 ϕ が **Frobenius 半単純**とは，任意の $w \in W$ に対し $\phi(w)$ が半単純となること．
- 素数 $\ell \neq p$ に対し，Weil-Deligne 表現は連続 ℓ 進表現 $W \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ と一対一に対応（Grothendieck のモノドロミー定理）．
  連続 ℓ 進表現 σ に対応する Weil-Deligne 表現を $\mathrm{WD}(\sigma)$ と書く．

GL_n の局所ラングランズ対応の例

GL_n の局所ラングランズ対応の例

例 ($n = 1$ のとき)

$\mathrm{Art}\colon \mathbb{Q}_p^\times \xrightarrow{\cong} W^{\mathrm{ab}}$: 局所類体論の同型とすると,

$\chi\colon\ \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ と $W \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow W^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\chi\circ\mathrm{Art}^{-1}} \mathbb{C}^\times$ が対応.

GL_n の局所ラングランズ対応の例

例 ($n=1$ のとき)

$\mathrm{Art}\colon \mathbb{Q}_p^\times \xrightarrow{\cong} W^{\mathrm{ab}}$: 局所類体論の同型とすると,

$\chi\colon\ \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)=\mathbb{Q}_p^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ と $W \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow W^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\chi\circ\mathrm{Art}^{-1}} \mathbb{C}^\times$ が対応.

例 (一般の n の場合)

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の自明表現 $\longleftrightarrow$ $W\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の（n 次元）自明表現

GL_n の局所ラングランズ対応の例

例 ($n = 1$ のとき)

$\mathrm{Art}\colon \mathbb{Q}_p^\times \xrightarrow{\cong} W^{\mathrm{ab}}$: 局所類体論の同型とすると,

$\chi\colon\ \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ と $W \twoheadrightarrow W^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\chi\circ\mathrm{Art}^{-1}} \mathbb{C}^\times$ が対応.

例 (一般の n の場合)

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の自明表現 $\longleftrightarrow$ $W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の（n 次元）自明表現
- Steinberg 表現 $\mathbf{St}_n \longleftrightarrow \phi\colon\ W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$: 既約, $\phi|_W = \mathbf{1}$
  このような ϕ を $\mathbf{Sp}_n$ と書く.
  $\mathbf{St}_n$: $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}\mathbf{1}$ の既約商（B : 上三角行列全体）

GL_n の局所ラングランズ対応の例

例 ($n = 1$ のとき)

$\mathrm{Art}\colon \mathbb{Q}_p^\times \xrightarrow{\cong} W^{\mathrm{ab}}$: 局所類体論の同型とすると，

$\chi\colon \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ と $W \twoheadrightarrow W^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\chi\circ\mathrm{Art}^{-1}} \mathbb{C}^\times$ が対応.

例 (一般の n の場合)

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の自明表現 $\longleftrightarrow$ $W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の（n 次元）自明表現
- Steinberg 表現 $\mathbf{St}_n \longleftrightarrow \phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$: 既約，$\phi|_W = \mathbf{1}$
  このような ϕ を $\mathbf{Sp}_n$ と書く.
  $\mathbf{St}_n$: $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)} \mathbf{1}$ の既約商（B : 上三角行列全体）
- 超尖点表現 $\longleftrightarrow \phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$: 既約，$\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$

超尖点表現とは，非自明な放物型誘導の部分商として得られない表現のこと.

p 進簡約代数群に対する局所ラングランズ対応

p 進簡約代数群に対する局所ラングランズ対応

G : $\mathbb{Q}_p$ 上の連結簡約代数群．簡単のため，$\mathbb{Q}_p$ 上分裂と仮定．
$\widehat{G}$: G の双対群．$\mathbb{C}$ 上の代数群，G のルートと余ルートを入れ換えたもの．

p 進簡約代数群に対する局所ラングランズ対応

G : $\mathbb{Q}_p$ 上の連結簡約代数群．簡単のため，$\mathbb{Q}_p$ 上分裂と仮定．
$\widehat{G}$: G の双対群．$\mathbb{C}$ 上の代数群，G のルートと余ルートを入れ換えたもの．

G に対する局所ラングランズ対応は一対一になるとは限らない！

p 進簡約代数群に対する局所ラングランズ対応

G : $\mathbb{Q}_p$ 上の連結簡約代数群．簡単のため，$\mathbb{Q}_p$ 上分裂と仮定．
$\widehat{G}$: G の双対群．$\mathbb{C}$ 上の代数群，G のルートと余ルートを入れ換えたもの．

G に対する局所ラングランズ対応は一対一になるとは限らない！

予想 (G に対する局所ラングランズ対応)

(1) 上から下に自然な全射があり，ファイバーは有限集合：
- $G(\mathbb{Q}_p)$ の既約スムーズ表現の同型類
- L パラメータ $\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \widehat{G}(\mathbb{C})$ の $\widehat{G}(\mathbb{C})$ 共役類

ϕ のファイバーを Π_ϕ^G と書き，L パケットと呼ぶ．

p 進簡約代数群に対する局所ラングランズ対応

G : $\mathbb{Q}_p$ 上の連結簡約代数群．簡単のため，$\mathbb{Q}_p$ 上分裂と仮定．
$\widehat{G}$: G の双対群．$\mathbb{C}$ 上の代数群，G のルートと余ルートを入れ換えたもの．

G に対する局所ラングランズ対応は一対一になるとは限らない！

予想 (G に対する局所ラングランズ対応)

(1) 上から下に自然な全射があり，ファイバーは有限集合：
- $G(\mathbb{Q}_p)$ の既約スムーズ表現の同型類
- L パラメータ $\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \widehat{G}(\mathbb{C})$ の $\widehat{G}(\mathbb{C})$ 共役類

ϕ のファイバーを Π_ϕ^G と書き，L パケットと呼ぶ．

(2) $\mathcal{S}_\phi = \pi_0\bigl(\mathrm{Cent}_{\widehat{G}(\mathbb{C})}(\phi)\bigr)$ とおくと，自然な全単射 $\mathrm{Irr}(\mathcal{S}_\phi) \cong \Pi_\phi^G$ がある．

p 進簡約代数群に対する局所ラングランズ対応

G : $\mathbb{Q}_p$ 上の連結簡約代数群．簡単のため，$\mathbb{Q}_p$ 上分裂と仮定．
$\widehat{G}$: G の双対群．$\mathbb{C}$ 上の代数群，G のルートと余ルートを入れ換えたもの．

G に対する局所ラングランズ対応は一対一になるとは限らない！

予想 (G に対する局所ラングランズ対応)

(1) 上から下に自然な全射があり，ファイバーは有限集合：
- $G(\mathbb{Q}_p)$ の既約スムーズ表現の同型類
- L パラメータ $\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \widehat{G}(\mathbb{C})$ の $\widehat{G}(\mathbb{C})$ 共役類

ϕ のファイバーを Π_ϕ^G と書き，L パケットと呼ぶ．

(2) $\mathcal{S}_\phi = \pi_0\bigl(\mathrm{Cent}_{\widehat{G}(\mathbb{C})}(\phi)\bigr)$ とおくと，自然な全単射 $\mathrm{Irr}(\mathcal{S}_\phi) \cong \Pi_\phi^G$ がある．

- SL_2 や $U(3)$ など，いくつかのサイズの小さい群では証明されている．
- 古典群の場合，最近大きな進展あり（Arthur の本）

$G = \mathrm{GSp}_4$ の局所ラングランズ対応

$G = \mathrm{GSp}_4$ の局所ラングランズ対応

$G = \mathrm{GSp}_4 \rightsquigarrow \widehat{G} = \mathrm{GSpin}_5 = \mathrm{GSp}_4$
この場合には，Gan-Takeda による局所ラングランズ対応の候補がある.

$G = \mathrm{GSp}_4$ の局所ラングランズ対応

$G = \mathrm{GSp}_4 \rightsquigarrow \widehat{G} = \mathrm{GSpin}_5 = \mathrm{GSp}_4$
この場合には，Gan-Takeda による局所ラングランズ対応の候補がある．

L パケットの分類

$r\colon\ \mathrm{GSp}_4 \hookrightarrow \mathrm{GL}_4$: 自然な埋め込み
$\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$: L パラメータ $\rightsquigarrow r \circ \phi$: Weil-Deligne 表現
Π_ϕ^G が $G(\mathbb{Q}_p)$ の超尖点表現を含むと仮定

$G = \mathrm{GSp}_4$ の局所ラングランズ対応

$G = \mathrm{GSp}_4 \rightsquigarrow \widehat{G} = \mathrm{GSpin}_5 = \mathrm{GSp}_4$
この場合には，Gan-Takeda による局所ラングランズ対応の候補がある．

L パケットの分類

$r\colon \mathrm{GSp}_4 \hookrightarrow \mathrm{GL}_4$: 自然な埋め込み
$\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$: L パラメータ $\rightsquigarrow r \circ \phi$: Weil-Deligne 表現
Π_ϕ^G が $G(\mathbb{Q}_p)$ の超尖点表現を含むと仮定

(I) $(r \circ \phi)|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$, $r \circ \phi$: 既約 $\rightsquigarrow \Pi_\phi^G = \{\pi\}$

$G = \mathrm{GSp}_4$ の局所ラングランズ対応

$G = \mathrm{GSp}_4 \rightsquigarrow \widehat{G} = \mathrm{GSpin}_5 = \mathrm{GSp}_4$
この場合には，Gan-Takeda による局所ラングランズ対応の候補がある．

L パケットの分類

$r\colon \mathrm{GSp}_4 \hookrightarrow \mathrm{GL}_4$: 自然な埋め込み
$\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$: L パラメータ $\rightsquigarrow r \circ \phi$: Weil-Deligne 表現
Π_ϕ^G が $G(\mathbb{Q}_p)$ の超尖点表現を含むと仮定

(I) $(r \circ \phi)|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$，$r \circ \phi$: 既約 $\rightsquigarrow \Pi_\phi^G = \{\pi\}$

(II) $(r \circ \phi)|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$，$r \circ \phi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$ （φ_i : 既約，$\varphi_1 \not\cong \varphi_2$, $\dim \varphi_i = 2$）
$\rightsquigarrow \Pi_\phi^G = \{\pi_1, \pi_2\}$，$\pi_1$, π_2 はともに超尖点表現

$G = \mathrm{GSp}_4$ の局所ラングランズ対応

$G = \mathrm{GSp}_4 \rightsquigarrow \widehat{G} = \mathrm{GSpin}_5 = \mathrm{GSp}_4$
この場合には，Gan-Takeda による局所ラングランズ対応の候補がある．

L パケットの分類

$r\colon \mathrm{GSp}_4 \hookrightarrow \mathrm{GL}_4$: 自然な埋め込み
$\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$: L パラメータ $\rightsquigarrow r \circ \phi$: Weil-Deligne 表現
Π_ϕ^G が $G(\mathbb{Q}_p)$ の超尖点表現を含むと仮定

(I) $(r \circ \phi)|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$， $r \circ \phi$: 既約 $\rightsquigarrow \Pi_\phi^G = \{\pi\}$

(II) $(r \circ \phi)|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$， $r \circ \phi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$ （φ_i : 既約，$\varphi_1 \not\cong \varphi_2$, $\dim \varphi_i = 2$）
$\rightsquigarrow \Pi_\phi^G = \{\pi_1, \pi_2\}$， π_1, π_2 はともに超尖点表現

(III) $r \circ \phi = \varphi \oplus (\chi \otimes \mathbf{Sp}_2)$， $\varphi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$， φ : 既約
$\rightsquigarrow \Pi_\phi^G = \{\pi_1, \pi_2\}$， π_1 は超尖点表現， π_2 は超尖点的でない

$G = \mathrm{GSp}_4$ の局所ラングランズ対応

$G = \mathrm{GSp}_4 \rightsquigarrow \widehat{G} = \mathrm{GSpin}_5 = \mathrm{GSp}_4$
この場合には，Gan-Takeda による局所ラングランズ対応の候補がある.

L パケットの分類

$r\colon\ \mathrm{GSp}_4 \hookrightarrow \mathrm{GL}_4$: 自然な埋め込み
$\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$: L パラメータ $\rightsquigarrow r \circ \phi$: Weil-Deligne 表現
Π_ϕ^G が $G(\mathbb{Q}_p)$ の超尖点表現を含むと仮定

(I) $(r \circ \phi)|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$，$r \circ \phi$: 既約 $\rightsquigarrow \Pi_\phi^G = \{\pi\}$

(II) $(r \circ \phi)|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$，$r \circ \phi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$ （φ_i : 既約，$\varphi_1 \not\cong \varphi_2$, $\dim \varphi_i = 2$）
$\rightsquigarrow \Pi_\phi^G = \{\pi_1, \pi_2\}$，$\pi_1$, π_2 はともに超尖点表現

(III) $r \circ \phi = \varphi \oplus (\chi \otimes \mathbf{Sp}_2)$，$\varphi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$，$\varphi$: 既約
$\rightsquigarrow \Pi_\phi^G = \{\pi_1, \pi_2\}$，$\pi_1$ は超尖点表現，π_2 は超尖点的でない

(IV) $r \circ \phi = (\chi_1 \otimes \mathbf{Sp}_2) \oplus (\chi_2 \otimes \mathbf{Sp}_2)$ $(\chi_1 \neq \chi_2)$
$\rightsquigarrow \Pi_\phi^G = \{\pi_1, \pi_2\}$，$\pi_1$ は超尖点表現，π_2 は超尖点的でない

$GU(2, D)$ の局所ラングランズ対応

$GU(2, D)$ の局所ラングランズ対応

D : $\mathbb{Q}_p$ 上の四元数体． $J = GU(2, D)$: $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_p)$ の内部形式．
この場合には，Gan-Tantono による局所ラングランズ対応の候補がある．

$GU(2,D)$ の局所ラングランズ対応

D : $\mathbb{Q}_p$ 上の四元数体．$J = GU(2,D)$: $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_p)$ の内部形式．
この場合には，Gan-Tantono による局所ラングランズ対応の候補がある．
$\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C}) \quad \rightsquigarrow \Pi_\phi^J$: L パケット
$\Pi_\phi^J = \varnothing$ かもしれない．ϕ が離散的なら $\Pi_\phi^J \neq \varnothing$.

$GU(2,D)$ の局所ラングランズ対応

D : $\mathbb{Q}_p$ 上の四元数体．$J = GU(2,D)$: $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_p)$ の内部形式．
この場合には，Gan-Tantono による局所ラングランズ対応の候補がある．
$\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C}) \quad \rightsquigarrow \Pi_\phi^J$: L パケット
$\Pi_\phi^J = \varnothing$ かもしれない．ϕ が離散的なら $\Pi_\phi^J \neq \varnothing$.

L パケットの分類

$\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$: L パラメータ，Π_ϕ^G が超尖点表現を含むと仮定．このとき，(I)∼(IV) の場合それぞれに対し以下が成立：

$GU(2,D)$ の局所ラングランズ対応

D : $\mathbb{Q}_p$ 上の四元数体．$J = GU(2,D)$: $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_p)$ の内部形式．
この場合には，Gan-Tantono による局所ラングランズ対応の候補がある．
$\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C}) \quad \rightsquigarrow \Pi_\phi^J$: L パケット
$\Pi_\phi^J = \varnothing$ かもしれない．ϕ が離散的なら $\Pi_\phi^J \neq \varnothing$.

L パケットの分類

$\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$: L パラメータ，Π_ϕ^G が超尖点表現を含むと仮定．このとき，(I)〜(IV) の場合それぞれに対し以下が成立：

(I) $\Pi_\phi^J = \{\rho\}$，ρ は超尖点表現

(II) $\Pi_\phi^J = \{\rho_1, \rho_2\}$，$\rho_1$，$\rho_2$ はともに超尖点表現

(III) $\Pi_\phi^J = \{\rho_1, \rho_2\}$，$\rho_1$ は超尖点表現，ρ_2 は超尖点的でない

(IV) $\Pi_\phi^J = \{\rho_1, \rho_2\}$，$\rho_1$，$\rho_2$ はともに超尖点的でない

知りたいこと

知りたいこと

- L パケットが自然に現れる理由を幾何学を通して理解したい.
- (I)〜(IV) の L パケットの違いを幾何学的観点から観察したい.

これらは GL_n の場合には現れない，新しい問題である.

GSp_{2n} の Rapoport-Zink 空間

GSp_{2n} の Rapoport-Zink 空間

- $\mathbb{X}$: $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の勾配 $1/2$ の n 次元 p 可除群
  （例えば，$\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の超特異楕円曲線 E に対し，$\mathbb{X} = E[p^\infty]^{\oplus n}$）
  $\lambda_0 \colon \mathbb{X} \xrightarrow{\cong} \mathbb{X}^\vee$: **偏極化**（$\lambda_0^\vee = -\lambda_0$）

GSp_{2n} の Rapoport-Zink 空間

- $\mathbb{X}$: $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の勾配 $1/2$ の n 次元 p 可除群
  （例えば，$\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の超特異楕円曲線 E に対し，$\mathbb{X} = E[p^\infty]^{\oplus n}$）
  $\lambda_0 \colon \mathbb{X} \xrightarrow{\cong} \mathbb{X}^\vee$: 偏極化（$\lambda_0^\vee = -\lambda_0$）
- **Nilp** : $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}$ 代数 A で $p \in A$ が冪零元となるもの全体のなす圏

GSp_{2n} の Rapoport-Zink 空間

- $\mathbb{X}$: $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の勾配 1/2 の n 次元 p 可除群
  (例えば，$\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の超特異楕円曲線 E に対し，$\mathbb{X} = E[p^\infty]^{\oplus n}$)
  $\lambda_0 \colon \mathbb{X} \xrightarrow{\cong} \mathbb{X}^\vee$: 偏極化 ($\lambda_0^\vee = -\lambda_0$)
- **Nilp** : $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}$ 代数 A で $p \in A$ が冪零元となるもの全体のなす圏

定義 (Rapoport-Zink 空間)

関手 $\mathcal{M} \colon \mathbf{Nilp} \longrightarrow \mathbf{Set}$ を以下のように定める：

$$\mathcal{M}(A) = \{(X, \lambda, \rho)\}/\cong$$

- X : A 上の p 可除群，λ : X の偏極化
- $\rho \colon \mathbb{X} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} A/pA \longrightarrow X \otimes_A A/pA$: 準同種写像 ($= p^{-m} \circ$ 同種写像)
- $\rho^{-1} \circ (\lambda \bmod p) \circ \rho \in \mathbb{Q}_p^\times \cdot \lambda_0$

$\mathcal{M}$ は $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}$ 上の形式スキームで表現可能．Rapoport-Zink 空間と呼ぶ．

GSp_{2n} の Rapoport-Zink 空間

$\mathcal{M}$ は巨大な形式スキーム.

- 連結成分は可算無限個（$\deg \rho$ に対応）.
- 各連結成分も準コンパクトでない. $n = 2$ のときは, $\mathcal{M}^{\mathrm{red}}$ は無限個の $\mathbb{P}^1$ の鎖.

GSp_{2n} の Rapoport-Zink 空間

$\mathcal{M}$ は巨大な形式スキーム.

- 連結成分は可算無限個（$\deg \rho$ に対応）.
- 各連結成分も準コンパクトでない. $n = 2$ のときは, $\mathcal{M}^{\mathrm{red}}$ は無限個の $\mathbb{P}^1$ の鎖.

$\mathcal{M}$ への群作用

$J = \mathrm{QIsog}(\mathbb{X}, \lambda_0)$：自己準同種写像の群 $\rightsquigarrow J = GU(n, D)$
$\mathcal{M} \curvearrowleft J$（右作用）: $(X, \lambda, \rho) \cdot h = (X, \lambda, \rho \circ h)$

GSp_{2n} の Rapoport-Zink 空間

$\mathcal{M}$ は巨大な形式スキーム.

- 連結成分は可算無限個（$\deg\rho$ に対応）.
- 各連結成分も準コンパクトでない. $n=2$ のときは, $\mathcal{M}^{\mathrm{red}}$ は無限個の $\mathbb{P}^1$ の鎖.

$\mathcal{M}$ への群作用

$J=\mathrm{QIsog}(\mathbb{X},\lambda_0)$: 自己準同種写像の群 $\rightsquigarrow J=GU(n,D)$
$\mathcal{M} \curvearrowleft J$（右作用）: $(X,\lambda,\rho)\cdot h=(X,\lambda,\rho\circ h)$

志村多様体との関係（p 進一意化）

Sh : GSp_{2n} の志村多様体（主偏極化付き n 次元アーベル多様体のモジュライ空間）
$\mathrm{Sh}^{\mathrm{ss}}\subset \mathrm{Sh}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$: 超特異部分, $\mathrm{Sh}|^{\wedge}_{\mathrm{Sh}^{\mathrm{ss}}}$: $\mathrm{Sh}^{\mathrm{ss}}$ に沿った形式完備化
$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Sh}|^{\wedge}_{\mathrm{Sh}^{\mathrm{ss}}}$ は $\mathcal{M}$ で一意化される : $\mathrm{Sh}|^{\wedge}_{\mathrm{Sh}^{\mathrm{ss}}}=\coprod_{i=1}^{k}\mathcal{M}/\Gamma_i$ $(\Gamma_i\subset J)$

GSp_{2n} の Rapoport-Zink 塔

M : $\mathcal{M}$ のリジッド一般ファイバー（$\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}$ 上のリジッド空間）

GSp_{2n} の Rapoport-Zink 塔

M : $\mathcal{M}$ のリジッド一般ファイバー（$\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}$ 上のリジッド空間）

Rapoport-Zink 塔

$\{M_K\}_K$: M のエタール被覆の射影系（Rapoport-Zink 塔）

- K は $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ のコンパクト開部分群をはしる
- （偏極化付き）普遍 p 可除群の K レベル構造を用いて定義

GSp_{2n} の Rapoport-Zink 塔

M : $\mathcal{M}$ のリジッド一般ファイバー（$\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}$ 上のリジッド空間）

Rapoport-Zink 塔

$\{M_K\}_K$: M のエタール被覆の射影系（Rapoport-Zink 塔）

- K は $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ のコンパクト開部分群をはしる
- （偏極化付き）普遍 p 可除群の K レベル構造を用いて定義
- $M_{\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)} = M$

GSp_{2n} の Rapoport-Zink 塔

M : $\mathcal{M}$ のリジッド一般ファイバー（$\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}$ 上のリジッド空間）

Rapoport-Zink 塔

$\{M_K\}_K$: M のエタール被覆の射影系（Rapoport-Zink 塔）

- K は $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ のコンパクト開部分群をはしる
- （偏極化付き）普遍 p 可除群の K レベル構造を用いて定義
- $M_{\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)} = M$
- K が合同部分群 $K_m = \mathrm{Ker}(\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}))$ のときは，K_m レベル構造 $=$ p^m 等分点の（偏極化を定数倍を除き保つ）自明化

GSp_{2n} の Rapoport-Zink 塔

M : $\mathcal{M}$ のリジッド一般ファイバー（$\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}$ 上のリジッド空間）

Rapoport-Zink 塔

$\{M_K\}_K$: M のエタール被覆の射影系（Rapoport-Zink 塔）

- K は $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ のコンパクト開部分群をはしる
- （偏極化付き）普遍 p 可除群の K レベル構造を用いて定義
- $M_{\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)} = M$
- K が合同部分群 $K_m = \mathrm{Ker}(\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}))$ のときは，K_m レベル構造 $=$ p^m 等分点の（偏極化を定数倍を除き保つ）自明化

Rapoport-Zink 塔への群作用

- J は M_K に作用（レベルを保つ）.

GSp_{2n} の Rapoport-Zink 塔

M : $\mathcal{M}$ のリジッド一般ファイバー（$\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}$ 上のリジッド空間）

Rapoport-Zink 塔

$\{M_K\}_K$: M のエタール被覆の射影系（Rapoport-Zink 塔）

- K は $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ のコンパクト開部分群をはしる
- （偏極化付き）普遍 p 可除群の K レベル構造を用いて定義
- $M_{\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)} = M$
- K が合同部分群 $K_m = \mathrm{Ker}(\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}))$ のときは，K_m レベル構造 $= p^m$ 等分点の（偏極化を定数倍を除き保つ）自明化

Rapoport-Zink 塔への群作用

- J は M_K に作用（レベルを保つ）．
- $G = \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q}_p)$ は塔 $\{M_K\}_K$ に作用（レベルを保たない）．
  $g \in G \rightsquigarrow M_K \longrightarrow M_{g^{-1}Kg}$（Hecke 作用）

GSp_{2n} の Rapoport-Zink 塔

志村多様体との関係

$\mathrm{Sh}^{[\mathrm{ss}]} \subset \mathrm{Sh}_{\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}}$：超特異還元を持つアーベル多様体からなる部分（リジッド局所閉部分集合）

$\mathrm{Sh}_{K,\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}}$：$K$ レベル付きの志村多様体，$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]} \subset \mathrm{Sh}_{K,\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}}$：$\mathrm{Sh}^{[\mathrm{ss}]}$ の逆像

$\rightsquigarrow \mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]}$ は M_K で一意化される

GSp_{2n} の Rapoport-Zink 塔

志村多様体との関係

$\mathrm{Sh}^{[\mathrm{ss}]} \subset \mathrm{Sh}_{\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}}$: 超特異還元を持つアーベル多様体からなる部分（リジッド局所所閉部分集合）
$\mathrm{Sh}_{K,\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}}$: K レベル付きの志村多様体，$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]} \subset \mathrm{Sh}_{K,\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}}$: $\mathrm{Sh}^{[\mathrm{ss}]}$ の逆像
$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]}$ は M_K で一意化される

Rapoport-Zink 塔の ℓ 進エタールコホモロジー

ℓ : p と異なる素数
$H^i_{\mathrm{RZ}} := \varinjlim_K H^i_c(M_K \otimes_{\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}} \widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ac}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$: $W \times G \times J$ の表現

GSp_{2n} の Rapoport-Zink 塔

志村多様体との関係

$\mathrm{Sh}^{[\mathrm{ss}]} \subset \mathrm{Sh}_{\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}}$: 超特異還元を持つアーベル多様体からなる部分（リジッド局所閉部分集合）

$\mathrm{Sh}_{K,\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}}$: K レベル付きの志村多様体，$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]} \subset \mathrm{Sh}_{K,\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}}$: $\mathrm{Sh}^{[\mathrm{ss}]}$ の逆像

$\rightsquigarrow \mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]}$ は M_K で一意化される

Rapoport-Zink 塔の ℓ 進エタールコホモロジー

ℓ : p と異なる素数

$H^i_{\mathrm{RZ}} := \varinjlim_K H^i_c(M_K \otimes_{\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}} \widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ac}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$: $W \times G \times J$ の表現

<u>目標</u> : H^i_{RZ} を G と J の局所ラングランズ対応で記述する.

GL_n の場合

GL_n の場合

Rapoport-Zink 空間の定義を次のように変更：

- $\mathbb{X}$: $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の勾配 $1/n$ の 1 次元 p 可除群（$\fallingdotseq$ 形式群）
- 「偏極化」を全て忘れる

GL_n の場合

Rapoport-Zink 空間の定義を次のように変更：

- $\mathbb{X}$: $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の勾配 $1/n$ の 1 次元 p 可除群（$\fallingdotseq$ 形式群）
- 「偏極化」を全て忘れる

$\rightsquigarrow$ Lubin-Tate 空間，Lubin-Tate 塔，コホモロジー H^i_{LT}

- $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, $J = D_n^\times$
  （D_n は $\mathbb{Q}_p$ 上の中心的可除代数で $\mathrm{inv}\, D_n = 1/n$ となるもの）

GL_n の場合

Rapoport-Zink 空間の定義を次のように変更：

- $\mathbb{X}$: $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の勾配 $1/n$ の 1 次元 p 可除群（≒ 形式群）
- 「偏極化」を全て忘れる

$\rightsquigarrow$ Lubin-Tate 空間，Lubin-Tate 塔，コホモロジー H^i_{LT}

- $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, $J = D_n^\times$
  （D_n は $\mathbb{Q}_p$ 上の中心的可除代数で $\mathrm{inv}\, D_n = 1/n$ となるもの）

定理 (非可換 Lubin-Tate 理論，Harris-Taylor)

π : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の超尖点表現，ϕ : $\Pi_\phi^{\mathrm{GL}_n} = \{\pi\}$ となる Weil-Deligne 表現

$\Pi_\phi^{D_n^\times} = \{\rho\}$（$\pi \longleftrightarrow \rho$: Jacquet-Langlands 対応）

$\sigma\colon W \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$: $\mathrm{WD}(\sigma) = \phi$ となる ℓ 進表現

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}(H^i_{\mathrm{LT}}, \pi) = \begin{cases} \sigma\left(\frac{1-n}{2}\right) \otimes \rho & (i = n-1) \\ 0 & (i \neq n-1) \end{cases}$$

GSp_4 の場合

（伊藤哲史氏との共同研究）

GSp_4 の場合

（伊藤哲史氏との共同研究）

- $G = \mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_p)$, $J = GU(2, D)$
- $\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$: L パラメータ
  Π_ϕ^G が超尖点表現を含むと仮定
- $\rho \in \Pi_\phi^J$ に対し，$H^i_{\mathrm{RZ}}[\rho] := \mathrm{Hom}_J(H^i_{\mathrm{RZ}}, \rho)^{G\text{-sm}}$ （$W \times G$ の表現）
- $H^i_{\mathrm{RZ}}[\rho]_{\mathrm{cusp}}$: $H^i_{\mathrm{RZ}}[\rho]$ の超尖点部分

GSp_4 の場合

（伊藤哲史氏との共同研究）

- $G = \mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_p)$, $J = GU(2, D)$
- $\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$: L パラメータ
  Π_ϕ^G が超尖点表現を含むと仮定
- $\rho \in \Pi_\phi^J$ に対し，$H^i_{\mathrm{RZ}}[\rho] := \mathrm{Hom}_J(H^i_{\mathrm{RZ}}, \rho)^{G\text{-sm}}$ （$W \times G$ の表現）
- $H^i_{\mathrm{RZ}}[\rho]_{\mathrm{cusp}}$: $H^i_{\mathrm{RZ}}[\rho]$ の超尖点部分

L パラメータの分類（再掲）

$r\colon \mathrm{GSp}_4 \hookrightarrow \mathrm{GL}_4$: 自然な埋め込み

(I) $(r \circ \phi)|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$, $r \circ \phi$: 既約

(II) $(r \circ \phi)|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$, $r \circ \phi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$ （φ_i : 既約，$\varphi_1 \not\cong \varphi_2$, $\dim \varphi_i = 2$）

(III) $r \circ \phi = \varphi \oplus (\chi \otimes \mathbf{Sp}_2)$, $\varphi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$, φ : 既約

(IV) $r \circ \phi = (\chi_1 \otimes \mathbf{Sp}_2) \oplus (\chi_2 \otimes \mathbf{Sp}_2)$ （$\chi_1 \neq \chi_2$）

GSp_4 の場合（$\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$ のとき）

まず，$\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$ の場合（(I), (II) 型）を考える.

GSp_4 の場合（$\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$ のとき）

まず，$\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} = \mathbf{1}$ の場合（(I), (II) 型）を考える.

主定理 A

ϕ : (I) 型または (II) 型，$\rho \in \Pi_\phi^J$: 超尖点表現

(1) $i \neq 3$ のとき $H^i_{\mathrm{RZ}}[\rho]_{\mathrm{cusp}} = 0$

(2) $H^3_{\mathrm{RZ}}[\rho]_{\mathrm{cusp}} = \bigoplus_{\pi \in \Pi^G_\phi} \sigma_\pi \otimes \pi$

σ_π : W の既約 ℓ 進表現，$\bigoplus_{\pi \in \Pi^G_\phi} \mathrm{WD}(\sigma_\pi) = r \circ \phi$

- ϕ が (II) 型のとき，$\mathrm{WD}(\sigma_\pi)$ が φ_1, φ_2 のどちらになるかも記述可能.
- 上の定理は $\sum_i (-1)^i H^i_{\mathrm{RZ}}$ に対する Kottwitz の予想の精密化.

GSp_4 の場合（$\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \neq \mathbf{1}$ のとき）

次に $\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \neq \mathbf{1}$ の場合（(III), (IV) 型）を考える.

GSp_4 の場合（$\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \neq \mathbf{1}$ のとき）

次に $\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \neq \mathbf{1}$ の場合（(III), (IV) 型）を考える.

主定理 A′

ϕ : (III) 型，すなわち $r \circ \phi = \varphi \oplus (\chi \otimes \mathbf{Sp}_2)$ と仮定
$\rho \in \Pi^J_\phi$: 超尖点表現（一意）

(1) $i \neq 3$ のとき $H^i_{\mathrm{RZ}}[\rho]_{\mathrm{cusp}} = 0$

(2) $H^3_{\mathrm{RZ}}[\rho]_{\mathrm{cusp}} = \sigma_\pi \otimes \pi$
$\pi \in \Pi^G_\pi$: 超尖点表現（一意），$\mathrm{WD}(\sigma_\pi) = \varphi$

GSp$_4$ の場合（$\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \neq \mathbf{1}$ のとき）

次に $\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \neq \mathbf{1}$ の場合（(III), (IV) 型）を考える.

主定理 A′

ϕ : (III) 型，すなわち $r \circ \phi = \varphi \oplus (\chi \otimes \mathbf{Sp}_2)$ と仮定
$\rho \in \Pi_\phi^J$: 超尖点表現（一意）

(1) $i \neq 3$ のとき $H^i_{\mathrm{RZ}}[\rho]_{\mathrm{cusp}} = 0$

(2) $H^3_{\mathrm{RZ}}[\rho]_{\mathrm{cusp}} = \sigma_\pi \otimes \pi$
$\pi \in \Pi_\pi^G$: 超尖点表現（一意），$\mathrm{WD}(\sigma_\pi) = \varphi$

主定理 B

ϕ : (III) 型または (IV) 型，$\pi \in \Pi_\phi^G$: 超尖点表現（一意）
このとき，π は H^4_{RZ} の部分商に現れる.

GSp_4 の場合（$\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})} \neq 1$ のとき）

より精密に，次が期待される．（現在，研究が進行中）

期待

ϕ : (III) 型または (IV) 型，$\chi \otimes \mathbf{Sp}_2 \subset r \circ \phi$
$\pi \in \Pi_\phi^G$: 超尖点表現（一意），$\rho \in \Pi_\phi^J$: 超尖点的ではない表現

- $\chi \otimes \pi^\vee \otimes \rho$ は H^3_{RZ} に現れる．
- $\chi \otimes \pi^\vee \otimes \mathrm{Zel}(\rho)^\vee$ は H^4_{RZ} に現れる．
  （Zel : Zelevinsky 対合，$\mathrm{Zel}(\rho)^\vee$: 緩増加ではない表現）

- $H^2_{\mathrm{RZ}} = 0$ と予想している．
- $\Pi_\phi^J = \{\rho, \rho'\}$ とすると，$\{\rho', \mathrm{Zel}(\rho)^\vee\}$ は J の非緩増加 A パケット．

証明について

主定理 B の証明を紹介する.

主定理 B（再掲）

ϕ : (III) 型または (IV) 型, $\pi \in \Pi_{\phi}^{G}$: 超尖点表現
このとき, π は H_{RZ}^{4} の部分商に現れる.

証明について

主定理 B の証明を紹介する.

主定理 B（再掲）

ϕ : (III) 型または (IV) 型, $\pi \in \Pi_\phi^G$: 超尖点表現
このとき, π は H^4_{RZ} の部分商に現れる.

H^i_{RZ} を志村多様体のコホモロジーと結び付ける.
$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]}$ は M_K で一意化される $\rightsquigarrow$Hochschild-Serre スペクトル系列が存在

証明について

主定理 B の証明を紹介する.

主定理 B（再掲）

ϕ : (III) 型または (IV) 型, $\pi \in \Pi_\phi^G$: 超尖点表現
このとき, π は H^4_{RZ} の部分商に現れる.

H^i_{RZ} を志村多様体のコホモロジーと結び付ける.
$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]}$ は M_K で一意化される $\rightsquigarrow$Hochschild-Serre スペクトル系列が存在

Hochschild-Serre スペクトル系列 (Harris, Fargues)

$$E_2^{i,j} = \mathrm{Ext}^j_{J\text{-sm}}(H^{6-j}_{\mathrm{RZ}}, \mathcal{A})(-3) \Longrightarrow \varinjlim_K H^{i+j}(\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

$\mathcal{A}$: $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times J$ 上の保型形式の空間

証明について

主定理 B の証明を紹介する.

主定理 B（再掲）

ϕ : (III) 型または (IV) 型, $\pi \in \Pi_{\phi}^{G}$: 超尖点表現
このとき, π は H^4_{RZ} の部分商に現れる.

H^i_{RZ} を志村多様体のコホモロジーと結び付ける.
$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]}$ は M_K で一意化される $\rightsquigarrow$Hochschild-Serre スペクトル系列が存在

Hochschild-Serre スペクトル系列 (Harris, Fargues)

$$E_2^{i,j} = \mathrm{Ext}^j_{J\text{-sm}}(H^{6-j}_{\mathrm{RZ}}, \mathcal{A})(-3) \Longrightarrow \varinjlim_{K} H^{i+j}(\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

$\mathcal{A}$: $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}^{\infty,p}) \times J$ 上の保型形式の空間

$H^i(\mathrm{Sh}_\infty^{[\mathrm{ss}]}) := \varinjlim_K H^{i+j}(\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$

証明について

$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]}$: 超特異還元を持つ部分
$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{good}]}$: よい還元を持つ部分

$$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]} \subset \mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{good}]} \subset \mathrm{Sh}_K$$

証明について

$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]}$: 超特異還元を持つ部分
$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{good}]}$: よい還元を持つ部分

$$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]} \subset \mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{good}]} \subset \mathrm{Sh}_K$$

$$\rightsquigarrow IH^i(\mathrm{Sh}_\infty) \quad \longrightarrow H^i(\mathrm{Sh}_\infty) \quad \longrightarrow H^i(\mathrm{Sh}_\infty^{[\mathrm{good}]}) \quad \longrightarrow H^i(\mathrm{Sh}_\infty^{[\mathrm{ss}]})$$

証明について

$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]}$: 超特異還元を持つ部分
$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{good}]}$: よい還元を持つ部分

$$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]} \subset \mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{good}]} \subset \mathrm{Sh}_K$$

$$\rightsquigarrow IH^i(\mathrm{Sh}_\infty)_{\mathrm{cusp}} \xrightarrow{\cong} H^i(\mathrm{Sh}_\infty)_{\mathrm{cusp}} \xrightarrow{\cong} H^i(\mathrm{Sh}_\infty^{[\mathrm{good}]})_{\mathrm{cusp}} \xrightarrow{\cong} H^i(\mathrm{Sh}_\infty^{[\mathrm{ss}]})_{\mathrm{cusp}}$$

証明について

$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]}$: 超特異還元を持つ部分
$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{good}]}$: よい還元を持つ部分

$$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]} \subset \mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{good}]} \subset \mathrm{Sh}_K$$

$$\rightsquigarrow IH^i(\mathrm{Sh}_\infty)_{\mathrm{cusp}} \xrightarrow[(1)]{\cong} H^i(\mathrm{Sh}_\infty)_{\mathrm{cusp}} \xrightarrow[(2)]{\cong} H^i(\mathrm{Sh}_\infty^{[\mathrm{good}]})_{\mathrm{cusp}} \xrightarrow[(3)]{\cong} H^i(\mathrm{Sh}_\infty^{[\mathrm{ss}]})_{\mathrm{cusp}}$$

証明について

$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]}$: 超特異還元を持つ部分
$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{good}]}$: よい還元を持つ部分

$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]} \subset \mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{good}]} \subset \mathrm{Sh}_K$

$$\rightsquigarrow IH^i(\mathrm{Sh}_\infty)_{\mathrm{cusp}} \xrightarrow[(1)]{\cong} H^i(\mathrm{Sh}_\infty)_{\mathrm{cusp}} \xrightarrow[(2)]{\cong} H^i(\mathrm{Sh}_\infty^{[\mathrm{good}]})_{\mathrm{cusp}} \xrightarrow[(3)]{\cong} H^i(\mathrm{Sh}_\infty^{[\mathrm{ss}]})_{\mathrm{cusp}}$$

(1) $\mathbb{C}$ 上の佐武コンパクト化を使う．任意の志村多様体で成立．

証明について

$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]}$：超特異還元を持つ部分
$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{good}]}$：よい還元を持つ部分

$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]} \subset \mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{good}]} \subset \mathrm{Sh}_K$

$$\rightsquigarrow IH^i(\mathrm{Sh}_\infty)_{\mathrm{cusp}} \xrightarrow[(1)]{\cong} H^i(\mathrm{Sh}_\infty)_{\mathrm{cusp}} \xrightarrow[(2)]{\cong} H^i(\mathrm{Sh}_\infty^{[\mathrm{good}]})_{\mathrm{cusp}} \xrightarrow[(3)]{\cong} H^i(\mathrm{Sh}_\infty^{[\mathrm{ss}]})_{\mathrm{cusp}}$$

(1) $\mathbb{C}$ 上の佐武コンパクト化を使う．任意の志村多様体で成立．
(2) 今井直毅氏との共同研究．かなり一般の志村多様体で成立．

証明について

$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]}$：超特異還元を持つ部分
$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{good}]}$：よい還元を持つ部分

$\mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{ss}]} \subset \mathrm{Sh}_K^{[\mathrm{good}]} \subset \mathrm{Sh}_K$

$$\rightsquigarrow IH^i(\mathrm{Sh}_\infty)_{\mathrm{cusp}} \xrightarrow[(1)]{\cong} H^i(\mathrm{Sh}_\infty)_{\mathrm{cusp}} \xrightarrow[(2)]{\cong} H^i(\mathrm{Sh}_\infty^{[\mathrm{good}]})_{\mathrm{cusp}} \xrightarrow[(3)]{\cong} H^i(\mathrm{Sh}_\infty^{[\mathrm{ss}]})_{\mathrm{cusp}}$$

(1) $\mathbb{C}$ 上の佐武コンパクト化を使う．任意の志村多様体で成立．
(2) 今井直毅氏との共同研究．かなり一般の志村多様体で成立．
(3) Boyer のトリック．GSp_4 の特殊事情（GSp_{2n}, $n \geq 3$ では証明が機能しない）

証明について

もう一つの鍵は次の非尖点性.

定理 (非尖点性)

$i \neq 2, 3, 4$ ならば，G の超尖点表現は H^i_{RZ} の部分商には現れない.

証明について

もう一つの鍵は次の非尖点性.

定理 (非尖点性)

$i \neq 2, 3, 4$ ならば, G の超尖点表現は H^i_{RZ} の部分商には現れない.

- $\dim M = 3$ より, $H^i_{\mathrm{RZ}} \neq 0$ となるのは $0 \leq i \leq 6$ の場合に限る.
- $2 = 3 - 1 = \dim M - \dim \mathcal{M}^{\mathrm{red}}$, $4 = 3 + 1 = \dim M + \dim \mathcal{M}^{\mathrm{red}}$

証明について

もう一つの鍵は次の非尖点性.

定理 (非尖点性)

$i \neq 2, 3, 4$ ならば，G の超尖点表現は H^i_{RZ} の部分商には現れない.

- $\dim M = 3$ より，$H^i_{\mathrm{RZ}} \neq 0$ となるのは $0 \leq i \leq 6$ の場合に限る.
- $2 = 3 - 1 = \dim M - \dim \mathcal{M}^{\mathrm{red}}$, $4 = 3 + 1 = \dim M + \dim \mathcal{M}^{\mathrm{red}}$
- この定理は純局所的な手法で証明される.
- Lubin-Tate 空間に対する非尖点性の純局所的証明と方針は同様だが，$\mathcal{M}$ が巨大であるため様々な困難が発生する.

証明について

もう一つの鍵は次の非尖点性.

定理 (非尖点性)

$i \neq 2, 3, 4$ ならば，G の超尖点表現は H^i_{RZ} の部分商には現れない.

- $\dim M = 3$ より，$H^i_{\mathrm{RZ}} \neq 0$ となるのは $0 \leq i \leq 6$ の場合に限る.
- $2 = 3 - 1 = \dim M - \dim \mathcal{M}^{\mathrm{red}}$，$4 = 3 + 1 = \dim M + \dim \mathcal{M}^{\mathrm{red}}$
- この定理は純局所的な手法で証明される.
- Lubin-Tate 空間に対する非尖点性の純局所的証明と方針は同様だが，$\mathcal{M}$ が巨大であるため様々な困難が発生する.
- 証明のため，形式隣接輪体関手の変種を導入.
  （「見えない境界」をとらえるため）

証明について

主定理 B（再掲）

ϕ : (III) 型または (IV) 型，$\pi \in \Pi_\phi^G$: 超尖点表現
このとき，π は H^4_{RZ} の部分商に現れる.

主定理 B の証明

証明について

主定理 B（再掲）

ϕ : (III) 型または (IV) 型，$\pi \in \Pi_\phi^G$: 超尖点表現
このとき，π は H^4_{RZ} の部分商に現れる.

主定理 B の証明

$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現 Π を次を満たすようにとる：

- Π は $IH^2(\mathrm{Sh}_\infty)$ に現れる（Π_∞ の条件）
- $\Pi_p \cong \pi^\vee$

（ϕ が (III) 型または (IV) 型であることを使う）

証明について

主定理 B（再掲）

ϕ : (III) 型または (IV) 型，$\pi \in \Pi_\phi^G$: 超尖点表現
このとき，π は H^4_{RZ} の部分商に現れる.

主定理 B の証明

$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現 Π を次を満たすようにとる :

- Π は $IH^2(\mathrm{Sh}_\infty)$ に現れる（Π_∞ の条件）
- $\Pi_p \cong \pi^\vee$

（ϕ が (III) 型または (IV) 型であることを使う）

Hochschild-Serre スペクトル系列より，$i+j=2$ を満たすある i,j に対し，Π_p は $\mathrm{Ext}^i_{J\text{-sm}}(H^{6-j}_{\mathrm{RZ}}, \mathcal{A})$ に寄与する.

非尖点性より $6-j \neq 5,6$ なので，Π_p は $\mathrm{Hom}_J(H^4_{\mathrm{RZ}}, \mathcal{A})$ に寄与する.
したがって π は H^4_{RZ} に現れる.

証明について

主定理 A, A$'$ もこれと似た議論で示す.
π, ρ を大域化する際に工夫が必要.

証明について

主定理 A, A′ もこれと似た議論で示す.
π, ρ を大域化する際に工夫が必要.

Π : $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現を次を満たすようにとる :

- Π は $IH^3(\mathrm{Sh}_\infty)$ に現れる（Π_∞ の条件）
- $\Pi_p \cong \pi$
- Π は p において強重複度 1 定理を満たす．すなわち，$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$ の保型表現 Π' が $\Pi^p = (\Pi')^p$ を満たすなら $\Pi = \Pi'$ となる.

（cf. Arthur の重複度予想）

証明について

主定理 A, A$'$ もこれと似た議論で示す.
π, ρ を大域化する際に工夫が必要.

Π : $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$ の尖点的保型表現を次を満たすようにとる :

- Π は $IH^3(\mathrm{Sh}_\infty)$ に現れる（Π_∞ の条件）
- $\Pi_p \cong \pi$
- Π は p において強重複度 1 定理を満たす．すなわち，$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$ の保型表現 Π' が $\Pi^p = (\Pi')^p$ を満たすなら $\Pi = \Pi'$ となる.

（cf. Arthur の重複度予想）

ρ に関しても類似の条件を満たすように Π^J へと大域化.
$\Pi^{\infty,p} = (\Pi^J)^{\infty,p}$ を満たすようにしておく.

Hochschild-Serre スペクトル系列の両辺の「$\Pi^{\infty,p}$ 部分」をとる.

局所的な方法

大域的な方法では，L パケットが自然に現れる理由がはっきりしない.
開リジッド空間の Lefschetz 跡公式を用いた局所的な研究も行った.

局所的な方法

大域的な方法では，L パケットが自然に現れる理由がはっきりしない．
開リジッド空間の Lefschetz 跡公式を用いた局所的な研究も行った．

定理 (開リジッド空間の Lefschetz 跡公式)

X : $\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ac}}$ 上の準コンパクトかつスムーズな adic 空間
$X \subset \overline{X}$: コンパクト化
$f \colon X \longrightarrow X$: 固有射，$\overline{f} \colon \overline{X} \longrightarrow \overline{X}$ へと延長可能と仮定
任意の $x \in \overline{X} \setminus X$ に対し，x と $\overline{f}(x)$ は $\overline{X}$ の構成可能閉部分集合で分離できると仮定
このとき，

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(f^*; H_c^i(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) = \# \operatorname{Fix}(f)$$

局所的な方法

大域的な方法では，L パケットが自然に現れる理由がはっきりしない．
開リジッド空間の Lefschetz 跡公式を用いた局所的な研究も行った．

定理 (開リジッド空間の Lefschetz 跡公式)

X : $\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ac}}$ 上の準コンパクトかつスムーズな adic 空間
$X \subset \overline{X}$: コンパクト化
$f\colon X \longrightarrow X$: 固有射，$\overline{f}\colon \overline{X} \longrightarrow \overline{X}$ へと延長可能と仮定
任意の $x \in \overline{X} \setminus X$ に対し，x と $\overline{f}(x)$ は $\overline{X}$ の構成可能閉部分集合で分離できると仮定
このとき，

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(f^*; H_c^i(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) = \#\operatorname{Fix}(f)$$

これを M_K の準コンパクト開部分集合に適用．

局所的な方法

定理

$\phi\colon W \times SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow GSp_4(\mathbb{C})$: (I) 型または (II) 型の L パラメータ

- Π_ϕ^G と Π_ϕ^J の間の指標関係を仮定
  （安定跡公式で証明できると期待している．TRSELP の場合など，証明されている場合もある.）
- $\rho \in \Pi_\phi^J$ に対し，$H^i_{\mathrm{RZ}}[\rho]$ が有限生成 G 加群になると仮定

局所的な方法

定理

$\phi\colon W \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$: (I) 型または (II) 型の L パラメータ

- Π_ϕ^G と Π_ϕ^J の間の指標関係を仮定
（安定跡公式で証明できると期待している．TRSELP の場合など，証明されている場合もある.）
- $\rho \in \Pi_\phi^J$ に対し，$H_{\mathrm{RZ}}^i[\rho]$ が有限生成 G 加群になると仮定

このとき，任意の楕円正則半単純元 $g \in G$ に対し

$$\sum_{\rho \in \Pi_\phi^J} \theta_{H_{\mathrm{RZ}}[\rho]}(g) = 4 \sum_{\pi \in \Pi_\phi^G} \theta_\pi(g)$$

- $H_{\mathrm{RZ}}[\rho] = \sum_i (-1)^i H_{\mathrm{RZ}}^i[\rho]$
- $\theta_{H_{\mathrm{RZ}}[\rho]}, \theta_\pi$: 指標超関数．G の正則半単純元上で局所定数関数となる.

局所的な方法

- GL_n の場合には，Faltings, Strauch による先行研究あり.
- W の H^i_{RZ} への作用については何も分からない.

局所的な方法

- GL_n の場合には，Faltings, Strauch による先行研究あり.
- W の H^i_{RZ} への作用については何も分からない.
- M_K における固定点を数える際には，p 進周期写像（p 可除群にその Dieudonné 加群の Hodge フィルトレーションを対応させる写像）を用いる
  $\rightsquigarrow$ p 進 Hodge 理論を介して，安定共役類やその移送が自然に現れる（これらは L パケットと表裏一体の関係にある）

局所的な方法

- GL_n の場合には，Faltings, Strauch による先行研究あり．
- W の H^i_{RZ} への作用については何も分からない．
- M_K における固定点を数える際には，p 進周期写像（p 可除群にその Dieudonné 加群の Hodge フィルトレーションを対応させる写像）を用いる
  $\rightsquigarrow$ p 進 Hodge 理論を介して，安定共役類やその移送が自然に現れる（これらは L パケットと表裏一体の関係にある）
- さらに精密な分析を行うことで，次が示せると期待：

$$\theta_{H_{\mathrm{RZ}}[\rho]}(g) = \frac{4}{\#\Pi^G_\phi} \sum_{\pi \in \Pi^G_\phi} \theta_\pi(g)$$

他の群の場合について

- 同様の手法は，$GU(2,1)$ や GL_4 で勾配 $1/2$ の場合にも適用可能.
- $GU(n-1,1)$ でも Boyer のトリックは適用可能 (Mantovan, Shen)
  $\rightsquigarrow H^i_{\mathrm{RZ}}$ の交代和については類似の結果が得られる可能性が高い.
  非尖点性の証明はそのままでは機能しない.
- $GU(2,D)$ の場合（GSp_4 の双対塔）も同時に考えるのが重要だと思われる（cf. Faltings 同型）