# 非可換Lubin-Tate理論の一般化に向けて

三枝　洋一　（京都大学）*

**概　要**

$p$進体上の一般線型群に対する局所ラングランズ対応を幾何学的に実現する方法として，形式群の変形空間のエタールコホモロジーを用いる非可換Lubin-Tate理論というものが知られている．この理論をより一般の$p$進簡約代数群へと拡張することが目標である．$p$進簡約代数群がシンプレクティック群$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_p)$である場合に，最近得られた結果について紹介する．

$p$を素数とし，$\Gamma_{\mathbb{F}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$, $\Gamma_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$を$\mathbb{F}_p$, $\mathbb{Q}_p$の絶対Galois群とする．幾何学的Frobenius元$\mathrm{Frob}\colon \overline{\mathbb{F}}_p \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p;\ x \longmapsto x^{1/p}$によって生成される$\Gamma_{\mathbb{F}_p}$の稠密部分群を$\mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}}$と書く．自然な全射$\Gamma_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \Gamma_{\mathbb{F}_p}$の核を$I_{\mathbb{Q}_p}$と書き，**惰性群**と呼ぶ．また，$\Gamma_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \Gamma_{\mathbb{F}_p}$によって$\mathrm{Frob}^{\mathbb{Z}}$の元にうつされる$\Gamma_{\mathbb{Q}_p}$の元全体を$W_{\mathbb{Q}_p}$と書き，$\mathbb{Q}_p$の**Weil群**と呼ぶ．$W_{\mathbb{Q}_p}$には自然に位相が定まり，局所コンパクト群となる．この位相に関し，$I_{\mathbb{Q}_p}$は$W_{\mathbb{Q}_p}$の開部分群となる．

## 1. 局所ラングランズ対応

### 1.1. $\mathbf{GL}_n$の局所ラングランズ対応

まずはじめに，$\mathrm{GL}_n$に対する局所ラングランズ対応について思い出しておく．ここでは簡単のため$\mathbb{Q}_p$上の場合に限って主張を述べるが，一般の非アルキメデス局所体に対しても同様の事実が知られている．$\mathrm{GL}_n$の局所ラングランズ対応とは，次の2つの集合の間に自然な一対一対応が存在することを主張するものである．

(A) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$の（$\mathbb{C}$上の）既約スムーズ表現の同型類$\mathbf{Irr}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p))$.

(B) Frobenius半単純な$n$次元Weil-Deligne表現$r\colon W_{\mathbb{Q}_p} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$の同型類.

(A)について，一般に位相群$G$の$\mathbb{C}$ベクトル空間$V$への表現が**スムーズ**であるとは，任意の$v \in V$の安定化群$\{g \in G \mid gv = v\}$が$G$の開部分群になることをいう．(B)においては，$r$は$W_{\mathbb{Q}_p}$上ではスムーズ表現，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$上では代数群の準同型となることを要求する．また，$r$が**Frobenius半単純**であるとは，任意の$w \in W_{\mathbb{Q}_p}$に対し$r(w,1)$が$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$の半単純元となることをいう．$\ell$を$p$と異なる素数とすると，$n$次元Weil-Deligne表現は$W_{\mathbb{Q}_p}$の$n$次元連続$\ell$進表現$W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$と一対一に対応することが知られている．したがって，$\mathrm{GL}_n$の局所ラングランズ対応は，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$の既約スムーズ表現と$W_{\mathbb{Q}_p}$の（Frobenius半単純な）$n$次元連続$\ell$進表現の間の対応と見ることもできる．

$n = 1$の場合には局所類体論の同型$\mathbb{Q}_p^\times \cong W_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$によって$\mathbb{Q}_p^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$のスムーズ指標と$W_{\mathbb{Q}_p}$のスムーズ指標の間に一対一対応が得られるが，これが$\mathrm{GL}_1$に対する局所ラングランズ対応である．

---

本研究は科研費（課題番号:24740019）の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 11F70, 14G35, 22E50
キーワード：局所ラングランズ対応，Rapoport-Zink空間，リジッド幾何，エタールコホモロジー
* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町　京都大学大学院理学研究科数学教室
e-mail: mieda@math.kyoto-u.ac.jp
web: http://math.kyoto-u.ac.jp/~mieda/

$n=2$ の場合には，(A), (B) 双方を完全に分類することで明示的にラングランズ対応を構成することができる．しかし，一般の $n$ に関してこのようなことを行うのは困難であり，現在知られている証明（Harris-Taylor，Henniart，Scholze による）においては，いずれも幾何学的手法と表現論的な手法を巧妙に組み合わせることで，具体的な分類を行うことなく一対一対応を構成している．

### 1.2. 一般の簡約代数群に対する局所ラングランズ対応

$\mathbf{G}$ を $\mathbb{Q}_p$ 上の連結簡約代数群とし，$G=\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$ とおく．簡単のため，$\mathbf{G}$ は $\mathbb{Q}_p$ 上分裂すると仮定する．$\widehat{\mathbf{G}}$ を $\mathbf{G}$ の双対群とする．このとき，次の 2 つの間に関係があることが予想されている：

(A) $G$ の既約スムーズ表現の同型類 $\mathbf{Irr}(G)$.

(B) 準同型 $W_{\mathbb{Q}_p}\times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\longrightarrow \widehat{\mathbf{G}}(\mathbb{C})$ である条件を満たすもの（***L* パラメータ**）の共役類.

$\mathrm{GL}_n$ の場合との最も大きな違いは，(A) から (B) へファイバーが有限な全射が存在することしか期待できない点にある．別の言い方をすると，$L$ パラメータ $\phi$ に対して $\mathbf{Irr}(G)$ の空でない有限部分集合 $\Pi_\phi^G$（***L* パケット**）が自然に定まり，$\mathbf{Irr}(G)=\coprod_\phi \Pi_\phi^G$ となるというのが局所ラングランズ対応の大まかな主張である．

$G'$ が $G$ の内部形式であるときにも，$L$ パラメータ $\phi\colon W_{\mathbb{Q}_p}\times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\longrightarrow \widehat{\mathbf{G}}(\mathbb{C})$ に応じて $G'$ の既約スムーズ表現の有限集合 $\Pi_\phi^{G'}$ が定まり，$\mathbf{Irr}(G')=\coprod_\phi \Pi_\phi^{G'}$ となると期待されている．しかし，$\Pi_\phi^{G'}$ は空であることもあり得る．どのような $\phi$ に対して $\Pi_\phi^{G'}\neq\varnothing$ となるかについても精密な予想がある．特に，$\phi$ が**離散的**であるとき，すなわち，$\phi$ の $\widehat{\mathbf{G}}(\mathbb{C})$ における中心化群 $S_\phi$ が $\widehat{\mathbf{G}}(\mathbb{C})$ の中心を位数有限の部分群として持つときには $\Pi_\phi^{G'}\neq\varnothing$ であると予想されている．

近年の安定跡公式の理論の発展により，古典群に関する局所ラングランズ対応はかなり解決に近づいていると言われている．また，$\mathbf{G}$ が $\mathrm{GSp}_4$ およびその内部形式である場合には，テータ対応と $\mathrm{GL}_2$, $\mathrm{GL}_4$ の局所ラングランズ対応を用いることで局所ラングランズ対応が構成されている (Gan-Takeda, Gan-Tantono)．ただし，彼らの構成した $L$ パケットが期待される性質を満たしているかどうかはまだ完全には確かめられていない．

## 2. Rapoport-Zink 塔

ここでは，局所ラングランズ対応を幾何学的に実現すると期待されている Rapoport-Zink 塔を $\mathrm{GSp}_{2n}$ の場合に導入する．以下では，$n\geq 1$ を整数とする．$\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}$ を $\mathbb{Z}_p$ の強ヘンゼル化（最大不分岐拡大）の完備化とし，$\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}$ をその商体とする．

**定義 2.1.** $\mathbb{X}$ を $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の勾配 $1/2$ の $n$ 次元 $p$ 可除群とし，$\lambda_0\colon \mathbb{X}\xrightarrow{\cong}\mathbb{X}^\vee$ を $\lambda_0^\vee=-\lambda_0$ を満たす同型とする（このような $\lambda_0$ を $\mathbb{X}$ の**偏極化**と呼ぶ）．

**定義 2.2.** $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}$ 代数 $A$ で $p\in A$ が冪零元となるようなもの全体のなす圏を $\mathbf{Nilp}$ とおく．関手 $\mathcal{M}\colon \mathbf{Nilp}\longrightarrow \mathbf{Set}$ を以下で定める：$\mathcal{M}(A)=\{(X,\lambda,\rho)\}/\cong$；ここで

> $X$ : $A$ 上の $p$ 可除群，$\lambda : X$ の偏極化，$\rho\colon \mathbb{X}\otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} A/pA\longrightarrow X\otimes_A A/pA$ : 擬同種写像，$\rho^{-1}\circ(\lambda \bmod p)\circ\rho$ は $\lambda_0$ の $\mathbb{Q}_p^\times$ 倍.

$\mathcal{M}$ は $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}$ 上の形式スキームで表現されることが知られている．この形式スキームを **Rapoport-Zink 空間**と呼び，同じ記号 $\mathcal{M}$ で表す．

$J = \mathrm{QIsog}(\mathbb{X}, \lambda_0)$ を，偏極化 $\lambda_0$ を定数倍を除いて保つ $\mathbb{X}$ の自己擬同種写像全体のなす群とする．$J$ は（$\rho$ に右から合成することで）$\mathcal{M}$ に自然に作用する．

**注意 2.3.** $D$ を $\mathbb{Q}_p$ 上の四元数体とすると，$J \cong GU(n, D)$ であることが容易に分かる．これは $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q}_p)$ の内部形式である．

$\mathcal{M}$ のリジッド一般ファイバーを $M$ とおく．これは $\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}$ 上のリジッド空間である．$\mathcal{M}$ 上の普遍 $p$ 可除群が $M$ 上に誘導する $p$ 可除群を $\widetilde{X}$ と書くと，これは $M$ 上エタールであり，自然に偏極化 $\widetilde{\lambda}$ を持つ．この組 $(\widetilde{X}, \widetilde{\lambda})$ へのレベル構造を利用することで，$\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)$ のコンパクト開部分群 $K$ を添字集合に持つ $M$ のエタール被覆の射影系 $\{M_K\}_{K \subset \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)}$ を構成することができる．これを **Rapoport-Zink 塔**と呼ぶ．例えば $K$ が合同部分群 $K_m = \mathrm{Ker}(\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}))$ の場合には，$M_{K_m}$ は偏極化を定数倍を除いて保つ同型 $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \widetilde{X}[p^m]$ を分類する空間である．特に $M = M_{\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)}$ である．

Rapoport-Zink 塔には次の 2 種類の群作用がある：

- $J$ の作用．これはレベル $K$ を保つ作用であり，定義 2.2 で定めた $M = M_{\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Z}_p)}$ への作用の自然な拡張である．
- $G = \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q}_p)$ の作用（**Hecke 作用**）．これはレベル $K$ を変える作用である．$g \in G$ に対して同型 $M_K \longrightarrow M_{g^{-1}Kg}$ が定まる．

したがって，Rapoport-Zink 塔のコンパクト台エタールコホモロジーをとることで $G, J$ が作用するベクトル空間を得ることができる：

**定義 2.4.** $\ell$ を $p$ と異なる素数とし，$H^i_{\mathrm{RZ}} = \varinjlim_{K \subset \mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{Q}_p)} H^i_c(M_K \otimes_{\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}} \widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ac}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ とおく（$\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ac}}$ は $\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}$ の代数閉包）．これは $\mathrm{Gal}(\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ac}}/\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}) \times G \times J$ の表現である．$\mathrm{Gal}(\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ac}}/\widehat{\mathbb{Q}}_p^{\mathrm{ur}}) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}) = I_{\mathbb{Q}_p}$ の作用は $W_{\mathbb{Q}_p}$ へと自然に延長でき，$H^i_{\mathrm{RZ}}$ は $W_{\mathbb{Q}_p} \times G \times J$ の表現となる．

この表現 $H^i_{\mathrm{RZ}}$ を $G, J$ に対する局所ラングランズ対応を用いて記述することが本研究の目標である．結果を述べる前に，$\mathrm{GL}_n$ の場合に知られていることについて簡単に復習しておく．

**注意 2.5.** 上記の Rapoport-Zink 空間の定義において，$\mathbb{X}$ を勾配 $1/n$ の 1 次元 $p$ 可除群に置き換え，偏極化に関する条件を取り除いて得られる形式スキームを **Lubin-Tate 空間**と呼ぶ．Lubin-Tate 空間に対して上と同様の手続きを行うことで，コンパクト開部分群 $K \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ で添字付けられたリジッド空間の射影系（**Lubin-Tate 塔**）およびそのエタールコホモロジー $H^i_{\mathrm{LT}}$ が定義される．この場合，$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, $J = D_n^\times$（$D_n$ は $\mathbb{Q}_p$ 上の中心的斜体で Hasse 不変量が $1/n$ のもの）となるので，$H^i_{\mathrm{LT}}$ は $W_{\mathbb{Q}_p} \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \times D_n^\times$ の表現となる．

$H^i_{\mathrm{LT}}$ には，局所ラングランズ対応と局所 Jacquet-Langlands 対応（$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の表現と $D_n^\times$ の表現の間の対応）が現れる．$W_{\mathbb{Q}_p}$ の $n$ 次元 $\ell$ 進表現 $\sigma$，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の既約スムーズ表現 $\pi$，$D_n^\times$ の既約スムーズ表現 $\rho$ が下のような関係にあるとする（$\mathrm{WD}(\sigma)$ は $\sigma$ に対応する Weil-Deligne 表現）．

$$\mathrm{WD}(\sigma) \xleftrightarrow{\text{局所ラングランズ対応}} \pi \xleftrightarrow{\text{局所 Jacquet-Langlands 対応}} \rho$$

さらに，$\dim\rho > 1$ と仮定する（このとき $\pi$ は超尖点表現，$\sigma$ は既約表現となる）．このとき，次が成り立つ（**非可換 Lubin-Tate 理論**）：

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}(H^i_{\mathrm{LT}}, \pi) = \begin{cases} \sigma\Bigl(\dfrac{1-n}{2}\Bigr)\otimes\rho & (i = n-1), \\ 0 & (i \neq n-1). \end{cases}$$

より精密に $H^i_{\mathrm{LT}}$ 全体の既約分解も得られている（Boyer による）が，ここでは述べない．

## 3. $\mathbf{GSp_4}$ の場合

ここでは，$\mathrm{GSp}_4$ の場合に得られた結果について述べる．本節の結果は伊藤哲史氏との共同研究によるものである．

前述の通り，$G = \mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}_p)$ および $J = GU(2, D)$ に対しては局所ラングランズ対応が構成されている．$\phi\colon W_{\mathbb{Q}_p} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \widehat{\mathrm{GSp}_4}(\mathbb{C}) = \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C})$ を離散的な $L$ パラメータとし，$\Pi^G_\phi, \Pi^J_\phi$ を $\phi$ に対応する $G$, $J$ の $L$ パケットとする．

まず，$\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ が自明である場合を考える．この場合，$\Pi^G_\phi, \Pi^J_\phi$ はともに超尖点表現からなり，次が成り立つ：

**定理 3.1.** $\rho \in \Pi^J_\phi$ に対し，$H^i_{\mathrm{RZ}}[\rho] = \mathrm{Hom}_J(H^i_{\mathrm{RZ}}, \rho)^{G\text{-sm}}$ とおく．これは $W_{\mathbb{Q}_p} \times G$ の表現である．$H^i_{\mathrm{RZ}}[\rho]$ の超尖点部分を $H^i_{\mathrm{RZ}}[\rho]_{\mathrm{cusp}}$ とする．

i) $i \neq 3$ のとき $H^i_{\mathrm{RZ}}[\rho]_{\mathrm{cusp}} = 0$ である．

ii) $H^3_{\mathrm{RZ}}[\rho]_{\mathrm{cusp}}$ は次のような既約分解を持つ：

$$H^3_{\mathrm{RZ}}[\rho]_{\mathrm{cusp}} = \bigoplus_{\pi\in\Pi^G_\phi} \sigma_\pi \otimes \pi,\ \sigma_\pi \text{ は } W_{\mathbb{Q}_p} \text{ の } \ell \text{ 進表現で } \bigoplus_{\pi\in\Pi^G_\phi} \mathrm{WD}(\sigma_\pi) = r\circ\phi \text{ を満たす．}$$

ただし，$r\colon \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ は自然な埋め込みである．

この定理は $\mathrm{GL}_n$ の場合の非可換 Lubin-Tate 理論の自然な一般化であり，また，Rapoport-Zink 空間のコホモロジーに関する Kottwitz の予想の精密化ともなっている．

次に，$\phi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$ が非自明であり，かつ $\Pi^G_\phi$ が超尖点表現を含む場合を考える．このとき，$\Pi^G_\phi$ は超尖点表現と超尖点的ではない離散系列表現からなる 2 元集合である．この場合には，次が成り立つ：

**定理 3.2.** $\pi \in \Pi^G_\phi$ を超尖点表現とする．このとき，$\pi$ は $H^3_{\mathrm{RZ}}, H^4_{\mathrm{RZ}}$ の部分商に現れる．

これは $\mathrm{GL}_n$ のときには起こらなかった新しい現象であり，$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$ の CAP 表現が $\mathrm{GSp}_4$ の志村多様体の $H^2, H^4$ に現れることの局所的な類似と見ることもできる．ただし，この場合には $\pi$ は $H^2_{\mathrm{RZ}}$ には現れないと予想している（より強く，$H^2_{\mathrm{RZ}} = 0$ であると期待している）．$\pi$ と対になって $H^3_{\mathrm{RZ}}, H^4_{\mathrm{RZ}}$ に現れる $W_{\mathbb{Q}_p}$ や $J$ の表現についても精密な予想を立てており，現在はその解決に向けた研究が進行中である．

定理 3.1，定理 3.2 の証明はいずれも $\mathrm{GSp}_4$ の志村多様体（Siegel モジュラー多様体）のコホモロジーと $H^i_{\mathrm{RZ}}$ を結び付けることによって行われる．大まかな方針は非可換 Lubin-Tate 理論の場合と類似しているが，Rapoport-Zink 空間 $\mathcal{M}$ がとても大きな空間であること，Siegel モジュラー多様体がコンパクトでないこと，$J$ が中心を法としてコンパクトでないこと，$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$ の保型表現に対して強重複度 1 定理が成り立たないことなど，幾何学，表現論の両側面において様々な困難が発生する．