ながれ, 1-2 (1982), 126-133

非圧縮性粘性流体と完全流体の非定常問題

儀 我 美 一

「ながれ」第1巻 第2号 別 刷
(昭和57年5月31日 発 行)

日 本 流 体 力 学 会

ながれ Vol. 1 (1982) 126—133.

非圧縮性粘性流体と完全流体の非定常問題

名大・理・数学　儀　我　美　一

流体力学の基礎方程式であるナヴィエ－ストークス方程式およびオイラー方程式についての非定常問題の「解の存在」について，解説を試みたい．読者の多数は，また数学屋の戯言が始まったか，と思われるかもしれない．しかし，「解の存在」という結果はともかくとしても，その証明の考え方というものは，言葉使いを別とすれば，実は流体力学者が日常肌で感じているものに近いのである．このことに配慮して本稿では数学的厳密さをある程度無視して，感覚を読者に伝えることを目的にする．なお付録では，本文中述べられている結果のいくつかが，数学の言葉で厳密に定理の形で記述されている．興味のある方は，そちらの方も参照されたい．

非圧縮性粘性流の運動を記述する方程式であるナヴィエ－ストークス方程式（以下 NS と略記）は

$$\partial u/\partial t-\nu\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=0,\ \operatorname{div} u=0$$

とかける．ここで ν は粘性係数である．この ν を零とした方程式

$$\partial u/\partial t+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=0,\ \operatorname{div} u=0$$

は，オイラー方程式（以下Eと略記）とよばれ，非圧縮性完全流体の運動を記述している．上記の問題はともに非定常問題なので，初期速度を与える必要がある．例えば

$$u(x,0)=a(x)$$

としょう．また，境界のある領域の内部（あるいは外部）で考えるときは当然境界条件を必要とする．NS の場合は，ふつう粘着条件すなわち，境界上で

$$u(x,t)=0$$

をつける．これに対して，Eについては，境界上で

$$u\cdot n=0$$

を要求する．ここで，n は境界上の法線ベクトルとする．流体の運動する部分が無限領域を占めるとき，例えば，物体をすぎる流れを扱う場合には，無限遠での条件が必要になる．ここでは，$|x|\to\infty$ のとき

$$u(x,t)\to 0$$

を課すことにする．すなわち，無限遠での速度を零とするのである．

以下，この２つの方程式の「解の存在」に関して数学で証明されていることをいくつか紹介する．本文を読むにあたって，読者は次のことに特に注目してほしい．

① NS の「解の存在」について空間次元が２次元のときと３次元のときでは，どのような差があるか．

② Eの「解の存在」については，２次元と３次元のとき，どのような差があるか．

③ 上記の①と②をひきおこす原因は，NS と E とでは，同じであろうか．

1.　NS の「解の存在」

1.1　「解の存在」とは

まず，「解の存在」という数学特有の言葉使いについて説明してみよう．次の常微分方程式の初期値問題

$$dy(t)/dt=(y(t))^2,\ y(0)=1$$

を考える．この方程式は，変数分離ですぐ解け，初期条件を考慮すると $y(t)=1/(1-t)$ となる．そのグラフは，図1のようになる．t が1よりも小さいときは，初期値問題の解 $y(t)$ は，グラフをみてもわかるように，時間に関して滑らかである．つまり，t が小さいところでは，普通の意味の解になっているのである．このような時，縮めて「滑らかな局所解がある」という．「任意の（正視）常微方程式の初期値問題が局所解をもつ」というのが，常微分方程式の解の存在定理である．

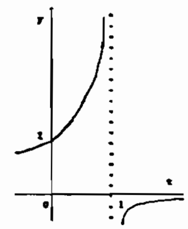

図1

さて，上の $y(t)$ は，t が1に近づくにつれて大きくなり，$t=1$ では無限大になっている．言いかえれば，$y(t)$ をある物理量とすると，有限時間でそれが爆発してしまうのである．したがって，「滑らかな大域解」はないといえる．

1.2　大域的弱解と局所解

局所解と大域解というものの意味がわかったところで，いよいよ NS について考えてみよう．$u=u(x,t)$ はある時刻での速度場を与えているとみることができる．そこで，速度場全体のつくる空間を F とすると，$u(x,t)$ は時刻 t に対して，F の元である速度場 $u(x,t)$ をきめるという F の中の‘道’を与える，と考えることができる．先程の常微分方程式の例では，Fは数直線とすればよい．

解の存在問題とは「NS をみたす速度場からつくられる‘道’は（時間）局所的また大域的に存在するか」ということになる．この問題は，1930 年代 Leray によって研究されて以来多くの数学者が取り組んできた．詳しくは，Ladyzhenskaya[1] および Temam[2] をみよ．この種の問題の質的な部分は境界のある場合もない場合もそれほどかわらないので，以下特にことわらないとする．この問題の最初の解答は Leray によって与えられ，境界のある場合は 20 年後の Hopf によって与えられた．彼らの与えた解は，今日，ルレイ - ホップの解と呼ばれている．彼らの解は大域的ではあるが，空間の次元が2次元のときを除いて時間に関して連続かどうかもわかっていないので，弱解とよばれている．不連続点の測度(面積)は零なことはわかるが，解の一意性にあたることもわかっていないので，それらについて，すべて悲観的な見方をすると解のグラフは図2のような状況になるであろう．F の中の‘道’はある時刻で切れてふたつの‘道’にわかれたりするという状況である．

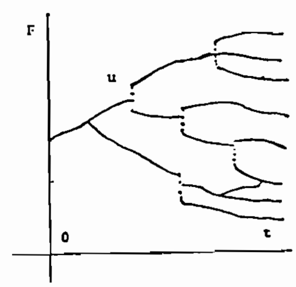

図2

一方，滑らかな局所解が存在することはその後の研究でわかっている．これについては前述の2冊の本や藤田 - 加藤[3] を参照されたい．最新の結果については著者と宮川[4] をみていいただきたい．これらの文献でいえていることとして，次のことがわかっている．初期速度が十分小さいとき，あるいは粘性係数が大きいとき，つまりレイノルズ数が小のときには，

滑らかな大域解の存在が知られている．つまり，F 内に滑らかな‘道’が，ずっとのびているということである．

ところで，ルレイ - ホップの弱解の存在はどのようにして示されるのであろうか．その本質は，「エネルギー評価」にある．以下それについて少し述べょう．まず $\|v\|^2/2$ を速度場 v のエネルギーとする．即ち

$$\|v\|^2=\int|v|^2dx \quad (\text{空間平均})$$

もし，u を NS の解とすると，次の式が成り立つ．

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2(t)+\nu\|\nabla u\|^2(t)=0$$

ここで，$\|\nabla u\|^2$ はエンストロフィーとよばれることもある．上式をエネルギー評価とここでは言っておこう．証明は簡単である．実際 NS の一番目の式に u をかけて，空間変数 x で積分をする．このとき

$$\int(u\cdot\nabla)u\cdot u\,dx=0$$

が $\operatorname{div} u=0$ とグリーンの公式より従う．また

$$-\int u\cdot\Delta u\,dx=\|\nabla u\|^2$$

もグリーンの公式よりわかるので，結局エネルギー評価が示せた．

ルレイ - ホップの解の存在の詳しい証明は前述の２冊の本を参照されるとよいが，NS の性質として最もきいてくるのが上のエネルギー評価である．現在までのところ，非線型項 $(u\cdot\nabla)u$ の性質として，使われたことは u について２次ということのほかは，２つ前の式が成り立つということだけである．ともかく粘性係数が正ということを活用して，エネルギーからいろいろな量を評価すれば，ルレイ - ホップの解の存在が言える．ここでは渦度等の考察は，全くなされていない．

1.3　2次元と3次元

ルレイ - ホップの大域的弱解は，空間次元によらずに存在する．しかし，滑らかさを問題にすると次元の差がでてくる．２次元の場合は滑らかな大域解になるが，３次元の場合がそうなるかどうかはわからない．次元による差は何によっておこるのであろうか．一言でいえば，粘性項と非線型項の強弱による．

普通，熱方程式のような放物型方程式については，拡散あるいは散逸という効果により，解は時間がたつにつれてどんどん滑らかになり平衡状態に近づいていくと考えられる．もっとも，これは線型の方程式の話で，非線型項があると状況が異なってくる．非線型項と拡散項の強弱に関して次の藤田[5] の例がある．それは，

$$\partial f/\partial t=\Delta f+f^{1+\alpha},\quad f(x,0)=a(x)\geqslant 0$$

という拡散方程式である．これを全空間で考える．$\alpha>0$ ならば方程式は非線型となる．結論は，α が十分小であると，より正確には $2/\alpha$ が空間の次元より大であると，非負の解は必ず有限時間で爆発してしまう．つまり，ちょうど 1.1 節の常微分方程式の例の状況になる．$2/\alpha$ が空間次元より小さいときは，多くの初期値に対して滑らかな大域解がある．このように非線型項の強さと拡散項の強さは空間の次元によってその強弱がきまる．この問題では，考える空間が無限領域であるため，α が小さい方が爆発しやすくなっている．また，十分小さい初期値に対しても大域解がないというところも，NS と事情が異なるが，ともかく，拡

散項があっても滑らかな大域解が存在しないということが起りうることに注意してほしい.

さて話をNSにもどそう. 2次元の場合は非線型項より粘性項の方の効果が大きい. 言い換えれば, エネルギー評価が非線型項を統制できる. 滑らかな大域解の存在をいうのにルレイ-ホップの解の滑らかさをいうのもよいが, より素朴に, 滑らかな局所解をどんどん延長していくという方法で, 上の意味を説明しょう. 解をFでの'道'と思うとき, どんなに時間を経ても'道'はFの中の有界集合にとどまり, その有界集合があらかじめ与えられた初期値と時間に統制されているとする. このような状況のときには, ある時間ののち爆発するということはおこりえない. 数学の言葉では, ア・プリオリ評価(先験的評価)があればよいということである. 2次元のときは, エネルギー評価からア・プリオリ評価がだせるのである.

3次元のときは, 現在までのところ粘性項で非線型項の統制はできていない. つまり強力なア・プリオリ評価が開発されていない. こういう事情により, 3次元の場合は滑らかな大域解の存在は知られていない*. また, いままで述べた2次元と3次元の状況の差が技術的なものか, 現象として異なるものかは, 著者にはわからない.

1.4 乱流との関係

最近, 乱流という言葉が流行しているが, ここでは, 数学の本にでている乱流解について説明しょう. 3次元の場合, ルレイ-ホップの解は時間に対して連続になっていることが証明されていないが, 不連続になるような時刻の集合は前に述べたように大きくない(図2参照). そこで, Leray は解か不連続になる時刻の出現ということに注目して, ルレイ-ホップの解のことを乱流解と呼んだ. 彼の考え方は, 現在流行中のカオスの考え方とは根本的に異なる. 乱流をカオスとみるためには, 少くともFの中の'道'=解は, 時間無限大まで滑かに延びていないと困る. '道'のまきつき方を問題にするのだから当然である. Ladyzhenskaya は, 3次元でも NS の滑らかな大域解が存在すると信じているようである. したがって, もし乱流の定義を Leray のようにすると, 乱流というものは記述できなくなってNSが乱流現象を記述していないのではないかと考えた. 乱流の定義を Leray のようにするのは著者にも疑問である.

2. Eの「解の存在」

2.1 局 所 解

今度はオイラー方程式について1.2節と同じ問題を考えてみょう. EはNSとちがって粘性項がなく, みかけはやさしいが, 解の存在を考える場合には, かえって取扱いがめんどうになる. これから考える問題では, もちろん, ポテンシャル流(つまり渦度が恒等的に零)という仮定はつけない. ただ冒頭にかいたEのみを考える.

最初に注意すべき点は, Eは方程式の分類からすると双曲型の部類に属するということである. つまり, Eは波動方程式的なものである. したがって, NSと同じ問題を考えるといっても, Eのときは初期速度がある程度滑かになっていないとEを普通の意味で満たす解は作りえないのである. NSの場合は放物型, つまり熱方程式的なので, 初期速度が滑らかで

* 最近 S. Kaniel, On the existence of a global solution to the Cauchy problem for Euler and Navier-Stokes equations, (preprint) によって証明されたという話もあるが著者はまだ正しいかどうか確認していない.

なくても，時間が少したつとすぐに滑らかになってしまうのである．波動現象と拡散現象の差というべきであろうか．

滑かな局所解の存在は，1920 年代に Lichtenstein によって示されている．その後，多くの改良が加えられている．これらについては Bardos[6] をみよ．3 次元に問題を限ると，滑らかな大域解の存在は言えていない．NS の場合と異なるのは，大域的な弱解の存在すらわかっていないということである（前ページ脚注参照）．

証明は，NS の時と比較してどうなのであろうか．NS のときは，ともかく速度場のみを考察してきた．今度は粘性項という頼りになるものがないから，渦度 $\omega=\mathrm{rot}\,u$ を考えることになる．渦度の方程式は，E の両辺の rot をとることによって得られ，3 次元では，

$$\partial\omega/\partial t+(u\cdot\nabla)\omega-(\omega\cdot\nabla)u=0,\quad \omega(x,0)=\mathrm{rot}\,a(x)$$

となる．一方，速度と渦度は

$$\Delta u=\mathrm{rot}\,\omega$$

で結ばれている．この 2 つからともかく逐次代入法によって解の近似列をつくり，解を構成するのである．後で，2 次元の場合について，より詳しく述べることにする．

さて，3 次元の場合，数学で証明されているのは，NS と E で似ているが，予想される結論は実は随分とちがうということである．NS の 3 次元では，滑らかな大域解があることが証明されたとしても不自然ではないが，E の場合はそういうことが証明されないはずなのである．E ではどうして滑らかな大域解が存在しそうもないのかを述べよう．まず，“流れ”の方向の微分を D/Dt であらわすと，先程の渦度の方程式は，

$$\mathrm{D}\,\omega/\mathrm{D}\,t-(\omega\cdot\nabla)u=0$$

と書ける．ここで，おおざっぱに，∇u を ω だとおもってみると，ω については 1.1 節にでてきた例の常微分方程式に似た形になる．したがって，ある有限時間の後，渦度は爆発するのではないかと考えられる．これが，滑らかな大域解はあるまいという感触であるが，証明されたわけではない．現在いえていることは，数学者が滑らかな解の存在を保証している時間は，初期渦度の大きさの逆数に比例するということである．1.1 の例では初期値の逆数の時刻で確かに爆発がおこることを注意しておく．

2.2　2　次　元

3 次元のときと異なり，2 次元のときは E は滑らかな大域解をもつことが，加藤[7] によって示されている．以下，2 次元のときの証明の重要な部分を解説し，なぜ 3 次元の時は，いえないのかをみよう．

前と同様に渦度 ω を導入する．そうすると，$\mathrm{div}\,u=0$ と $\omega=\mathrm{rot}\,u$（スカラー）から前述の Δu と ω の関係がでてくる．境界条件をあわせてかくと，

（a）　$\Delta u=\mathrm{rot}\,\omega$，　境界条件：$u\cdot n=0$

一方，E の両辺の rot をとって渦度の方程式をつくる．今度は，3 次元のときと異なり，渦をのばす効果をおよぼす項 $(\omega\cdot\nabla)u$ はない．すなわち，

（b）　$\partial\omega/\partial t+(u\cdot\nabla)\omega=0$，　初期条件：$\omega(x,0)=\mathrm{rot}\,a(x)$

これだけの方程式系（a），（b）を解けば，E は解ける．解の構成は次の逐次代入法による．

A_0：$\omega_0(x,t)=\mathrm{rot}\,a(x)$ とおいて（a）の $\omega=\omega_0$ とする．（a）の解 u を $u_0(x,t)$ とする．

B_0：（b）の u を u_0 として（b）を解く．その解 ω を $\omega_1(x,t)$ とする．

まず，上の A_0, B_0 の順で u_0, ω_1 をつくる．以後，同様に以下の A_m, B_m という操作を A_1,

B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 の順におこなって $u_0, u_1, u_2\cdots, w_1, w_2\cdots$ の列をつくる．

A_m：(a) で ω を ω_m として u について解き，その解 u を $u_m(x,t)$ とする．

B_m：(b) の u を u_m として ω について解き，その解 ω を $\omega_{m+1}(x,t)$ とする．

このとき $(\omega, \nabla)u$ なる項がないおかげで，u_m, ω_m はどんどん性質がよくなってくる．したがって，その極限にあたるものが存在し，それが解になる．数学的には，不動点定理が使える状況になっているわけである．

さて，(b) の ω の方は，u が与えられれば，特性曲線の方法によってすぐ解ける．従って，B_m の操作はわかりやすい．一方 A_m の操作は，このとおりよむと ω_m から u_m の決め方がただ一通りというふうにはなっていない．これにはわけがある．前に (a), (b) を解けば E の解がつくれるといったが，E の方の圧力 p をつくるためには，(b) を解くときに，さらに付帯条件をつけることが必要となるのである．流体を考えている領域が単連結である場合は，

$$u_m(x,t)=\mathrm{rot}\int G(x,y)\omega_m(y,t)dy$$

で与えれば十分である．ただし，積分は流体を考えている領域で実行するものとして，G はその領域でのグリーン関数とする．領域が単連結でない．つまり穴がある場合には，圧力が再生できるように補正することが A_m の段階で必要であり，可能である．以上の手続で，E の大域解が構成される．McGrath[8] が全空間の場合，加藤[5] が必ずしも単連結でない有界領域の場合についてそれぞれ証明をしている．最新の結果は，菊地[9] で，これは外部領域で考察している．

2.3 NS と E

いままでみてきたように，解の存在定理とその証明は NS と E とで随分とちがう．2次元での E の滑らかな大域解の存在は，渦度を使ってやっと存在を示せたのに対し，NS はそんなことをしなくてもいえてしまう．3次元については，滑らかな局所解は双方とも存在するが，大域的に滑らかな解となるとその存在の可能性は，両者で異なる．例えばEの場合，初期速度が小さくても，大域解の存在はいえそうにない．NS の2次元と3次元の状況の違いは若干技術的な感じがするが，Eの2次元と3次元の状況は，現象として異なるように思える．

さて，E は NS の粘性を零にしたものであるが，NS の解は粘性を零にすると E の解に近づくのであろうか．このような問題では，境界のあるなしが本質的である．というのは，NS と E では境界条件が異なり，物理的に考えても境界層というものの出現のために，境界付近では完全流体での近似が期待できないからである．数学的には，境界のある場合については境界から離れたところで，近づくという話すらなく，何も結果がない状況である．

数学的に多少わかっていることは，境界のない場合，すなわち全空間のような場合である．NS の解を u_ν というふうに粘性を表示してかくことにする．u_0 が E の解となる．2次元の場合ならば，$\nu \to 0$ とするとき $u_\nu(x,t) \to u_0(x,t)$ がすべての時刻 t について成立することが McGrath[8] によって示されている．3次元の場合も時間が十分小さければ $u_\nu \to u_0$ と思ってよい．これについての総括的説明は Bardos[6] にある．近づき方が ν と t にどうよるかということは，おもしろい話ではあろうが，ここではふれられない．

NS の粘性係数を零にすると，方程式の型が放物型から双曲型にかわる．したがって，u_ν

を u_0 の摂動とみるとしても，いわゆる特異摂動になっていて，そんなに調子よく近似できるとは思えない．粘性流体を完全流体で近似するという話は，NS と E 自身で扱った例はまだ少いと思われる．

ところで，冒頭の①から③の問の答はおわかりになっていただけましたでしょうか．もしそうならば，著者として満足するところです．なお，本稿の執筆をすすめてくださった名古屋大学工学部教授桑原真二先生に心から感謝いたします．また，本稿を書く上で有益な討論をしてくださった，1982年1月上旬におこなわれた乱流シンポジウムに参加された諸先生，とりわけ，京都大学理学部教授　巽友正先生に深く感謝いたします．本稿は，その時の報告集を基礎に使いましたことをおことわりしておきます．なお，上記シンポジウムに出席のため，科研費一般研究Cの補助をうけたことを付け加えておきます．

付　録

1.　NS の解

簡単のため，全空間のかわりに有界領域 Ω で考える．すなわち $\Omega\subset R^n$ で $n=2$ 又は 3 とする．境界は滑らかとする．ルレイ－ホップの解について数学的定式化をしてみる．

まず次のように記号を定める：

$$C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)=\{u\in C_0^{\infty}(\Omega)\,;\,\mathrm{div}\,u=0\}=\{\text{台コンパクトなソレノイド場}\},$$

$$H=C_{0,\sigma}^{\infty}\ \text{の}\ L^2(\Omega)\ \text{での閉包},$$

$$V=C_{0,\sigma}^{\infty}\ \text{の}\ W_2^1(\Omega)\ \text{での閉包}.$$

ここで $L^2(\Omega)$ は二乗可積分関数全体である．　　また $W_2^1(\Omega)$ はソボレフ空間とよばれ，$W_2^1(\Omega)=\{u\in L^2(\Omega)\,;\,\nabla u\in L^2(\Omega)\}$．このとき，任意のベクトル場は，次のようなヘルムホルツ分解ができる：

$$L^2(\Omega)=H\oplus G\quad(\text{ヒルベルト空間として直交直和}).$$

ただし $G=\{\nabla p\,;\,p\in W_2^1(\Omega)\}$ とした．P を H への射影とする．$P(\nabla p)=0$ に注意すると，NS は $u:[0,T)\to H$ の方程式

（1）　$du/dt+\nu Au+Bu=0,\ u(0)=a$

となる．ここで $A=-P\Delta$，$Bu=P(u\cdot\nabla)u$ とした．次に，$L^p(0,T\,;\,X)$ で，X に値をとる $(0,T)$ 上の p 乗可積分関数全体をあらわすとする．ルレイ－ホップの弱解とは，次のように定義される．

定義　u が NS の弱解であるとは，

$$u\in L^{\infty}(0,T\,;\,H)\cap L^2(0,T\,;\,V)$$

であってかつ

$$\int_0^T\{(u,\varphi_t)-\nu(\nabla u,\nabla\varphi)+b(u,\varphi,u)\}dt=-(a,\varphi(0))$$

をすべての $\varphi\in C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega\times[0,T))$ に対してみたすときをいう．ここで $C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega\times[0,T))=\{u\in C_0^{\infty}(\Omega\times[0,T))\,;\,\mathrm{div}\,u=0\}$ とする．また (u,v)，$b(u,v,w)$ はそれぞれ

$$(u,v)=\int_{\Omega}u\cdot v\,dx,\quad b(u,v,w)=\int_{\Omega}\sum_{1<i,j<n}u^i\frac{\partial v^j}{\partial x^i}w^j\,dx$$

とし，$\varphi_t=\partial\varphi/\partial t$ とする．

Leray-Hopf の定理とは，

定理 $a\in H$, $T<\infty$ とすると，NS の弱解は少なくともひとつは存在する．

弱解の定義にでてきた方程式は，部分積分をしてやれば（1）の式になることに注意しよう．これ以上のことは，Laydzhenskaya[1] や Temam[2] をみていただきたい．

滑らかな局所解については，藤田 - 加藤[3]儀我 - 宮川[4]により，

定理 $a\in H\cap L^n(\Omega)$ とする．ただし n は空間の次元である．このとき，ある時刻 T_0 が存在して，$[0, T_0)$ で（1）の滑らかな解 u が一意に存在する．

2. Eの解

まず空間次元 n が3のときの結果をのべょう．$C^{1,\alpha}(\Omega)$ で $\overline{\Omega}$ 上1階微分が α 次 $(0<\alpha<1)$ ヘルダー連続関数の全体のつくる空間とする．その空間の自然なノルムを $\|\cdot\|_{1,\alpha}$ と書くとする．次の結果は Bardos[6] による．

定理 $a\in C^{1,\alpha}(\Omega)\cap H$ とする．このとき Ω のみによる定数 C が存在して，$T_0=1/C|a|_{1,\alpha}$ とするとき $[0, T_0]$ で E の滑らかな解 u が一意に存在する．ここでいう滑らかとは，$u\in C^0([0, T_0]\,;C^{1,\alpha}(\Omega))$ という意味である．

次に2次元の場合をのべよう．ここでは加藤[7]の結果をのべる．

定理 $a\in C^{1,\alpha}(\Omega)\cap H$ とする．このとき，任意の T について，E の解 u, p で E の式中のすべての微分が $C(\Omega\times[0, T])$ にふくまれる解が存在する．このような解は，p について t だけの関数を加えることを除けば一意的である．

$\Omega=R^2$ のときには McGrath[8] により，Ω が有界領域の外部のときには菊地[9] により，それぞれ上記と似た結果が得られている．

引 用 文 献

1) O. A. Ladyzhenskaya : *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Revised English edn., (New York-London, Gordon and Breach, 1969).

2) R. Temam : *Navier-Stokes Equations*, Revised Edn., (Amsterdam New York-Oxford, North-Holland, 1979).

3) H. Fujita and T. Kato : On the Navier-Stokes initial value problem I, Arch. Rational Mech. Anal. **16** (1964), 269—315.

4) Y. Giga and T. Miyakawa : Solutions in L_r to the Navier-Stokes initial value problem, to appear in Arch. Rational Mech. Anal.

5) H. Fujita : On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t=\Delta u+u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I, **13** (1966), 109—124.

6) C. Bardos : Euler equation and Burger equation-relation with turbulence, Springer Lecture Notes in Mathematics, **648** (1978), 1-46.

7) T. Kato : On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation, Arch. Rational Mech. Anal., **25** (1967), 188—200.

8) F. J. McGrath : Nonstationary plane flow of viscous and ideal fluids, Arch. Rational Mech. Anal., **27** (1968), 329—348.

9) K. Kikuchi : Exterior problem for the two-dimenrional Euler equation, to appear in J. Math. Soc. Japan.