講　座

PDE を利用した画像処理 (3)

PDE-Based Image Processing (3)

儀我　美一*
Yoshikazu GIGA

要　旨

さまざまな偏微分方程式（PDE）が画像の平滑化に用いられている．この中でも曲率流方程式を用いる方法は，画像分離の際の輪郭線を抽出する上でも有効である．輪郭線を補助関数の等高線とみなして，輪郭線の尺度空間での変形を追跡する等高面法（等位面法）について解説する．この方法の 1 つの利点として，変形によって図形の位相的形状が変化しても，さらに変形を続ける点があげられる．

キーワード：等高面方程式，曲率流方程式

1. はじめに

元画像から平滑化された画像を得る方法として，前回，前々回の解説にあるように，さまざまな偏微分方程式が用いられている．ここではまず，曲率流方程式の等高面方程式による平滑化について述べる．さらに曲率流方程式は，幾何学的動的輪郭形成法（geometric active contour）として画像分離，輪郭線の抽出にも用いられることについてもふれる．

2. 等高面方程式と平滑化

元画像$I(\mathbf{x})$に対してガウシアンフィルターで得られる尺度tの画像を$u(\mathbf{x},t)$で表すとuは熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

の初期値をIとする解として特徴づけられる．このIをuに写す画像の変換は「濃淡の変換」に関して不変ではない．すなわち，今θを一変数の狭義単調な滑らかな関数としたとき，$v(\mathbf{x},t)=\theta(u(\mathbf{x},t))$とした合成関数は必ずしも熱方程式の解とは一般的にはならない．それでは画像の変換が「濃淡の変換」に関して不変になるような2階の PDE は何であろうか．その典型的例でしかも画像の平滑化に適しているものの 1 つに

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \ \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \tag{1}$$

がある．ここで$|\nabla u|^2$はuが 2 変数関数の場合$(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2$を表す．この方程式で$\nabla u/|\nabla u|$は$u$の各等高線

$$\Gamma_c(t) = \{(x,y) | u(x,y,t) = c\}$$

の単位法ベクトル$\mathbf{n}$に等しい．また$|\nabla u|^{-1}\partial u/\partial t$は$-\mathbf{n}$方向の$\Gamma_c(t)$の法速度$V$になっている．したがって (1) は各$\Gamma_c(t)$上で

$$V = -\mathrm{div}\ \mathbf{n} \tag{2}$$

を要求している．右辺はΓ_cの曲率に等しい（uが 3 変数関数の場合，平均曲率の 2 倍に等しい）．いずれもΓ_cの長さ（面積）をもっとも減らすようにΓ_cに垂直な方向に変形することを要求している．とくにΓ_cが曲線の場合，(2) を**曲線短縮方程式**，Γ_cが曲面の場合，**平均曲率流方程式**と呼ぶ．この変形法では，各等高線は他の等高線に関係なく，法則 (2) で変形される．したがって「濃淡の変換」に関して不変である．実際にuが (1) の解であるとき$v=\theta(u)$が解であることを確かめることは容易である．一般に (2) の右辺が曲率の関数である方程式を総称して**曲率流方程式**という．

* 東京大学大学院数理科学研究科〔〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1〕
e-mail: labgiga@ms.u-tokyo.ac.jp
投稿受付：2006 年 11 月 2 日
最終稿受付：2006 年 12 月 6 日

一般に(2)のような曲線の変形法則が与えられたとき，uの各等高線をその法則で変形させることを要求する方程式を**等高面方程式**という．上の例では(1)は(2)の等高面方程式である．等高面方程式の解は必ず濃淡の変換に関して不変である．

方程式(2)は各等高線を平滑化しようとしている．その意味で方程式(1)は熱方程式に近いが，∇u方向つまりuの等高線に対して垂直な方向に対しては，平滑化は行われていない．これは，各等高線が他と関係なく(2)で変形されていることによる．

この平滑化に強く関連する概念である「楕円性」について述べる．一般に

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{F}[u]$$

とPDEを抽象的に書こう．$\mathcal{F}[u]$が$\mathbf{p} = \nabla u$とヘッセ行列 $X = \nabla^2 u$の関数としよう．すなわち

$$\mathcal{F}[u] = -F(\mathbf{p}, X)$$

と書くことにする(マイナスをつけたのは，多くの文献と符号を合わせるためである)．Fが**退化楕円型**であるとは任意の対称行列X, Yに対して

$$F(\mathbf{p}, X) \geq F(\mathbf{p}, Y)$$

が$X \leq Y$のときいつも成立するときをいう．ここで対称行列について$X \leq Y$とは$Y - X$の固有値がすべて非負のときをいう．もし，さらにtrace$(X - Y) > 0$のとき

$$F(\mathbf{p}, X) > F(\mathbf{p}, Y)$$

が成立するときFを**狭義楕円型**という．熱方程式の場合$F(\mathbf{p}, X) = -\mathrm{trace}\ X$であるので狭義楕円型であるが，(1)では

$$F(\mathbf{p}, X) = -\mathrm{trace}\ [(I - \mathbf{p} \otimes \mathbf{p})X]$$

であるため狭義楕円型ではなく，退化楕円型である(ここでtrace$Z$は行列Zのトレースつまり対角成分の和を表す．また，$\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}$は$\mathbf{p}$と$\mathbf{p}$のテンソル積で$ij$成分を$p_i p_j$とする行列を表す．ただし，$p_i$は$\mathbf{p}$の$i$成分を表す)．$F$が狭義楕円型のとき，$\partial u/\partial t = \mathcal{F}[u]$を拡散方程式，または放物型方程式という．

大体の感覚として，Fが狭義楕円型ならば，この初期値問題は適切（良設定／well-posed）であることが期待され，また平滑化効果も期待できる．退化楕円型の場合は，初期値が滑らかとしても尺度tでの解が滑らかとは限らず，微分を古典的な意味でとらえることは一般には不可能である．等高面方程式については，粘性解〔4, 7〕という概念を用いることによって‘任意’の初期画像について任意の尺度tまで一意に解くことが可能であり，適切である．

一方，画像処理で用いる方程式は適切でないものも多い．たとえば第1回目の本谷氏の解説にあるPerona-Malikの方程式は，Fが楕円型ではなく，$\mathbf{p}$によっては，$-F$が楕円型で$\partial u/\partial t = -\Delta u$型の問題を正の時間方向に解くことと同様なことを要求される．この意味では非適切問題（悪条件設定問題／ill-posed）である．

3. 等高面法

画像を分離する上でも曲率流方程式とその等高面方程式は重要な役割を果たす．ある物体の境界を抜き出す方法の1つに，画像の傾きの大きいところ，つまり$|\nabla I|$が大きいところを選んで結んでうまく曲線をつくるという方法がある．しかし，この方法ではノイズに妨害されてなかなか正確な境界がつかまらなかった．そこで考えられたのが，蛇（snake）という方法で境界線にうまく近づくようなエネルギーを考え，そのエネルギーの勾配流として曲線を変形していく方法である．この方法の変形として，曲率流方程式を用いる方法があり，幾何学的動的輪郭形成法（geometric active contour）と呼ばれている．

とりあえず適当な輪郭線を取り，これを曲率流方程式

$$V = W(\mathbf{x})(-\mathrm{div}\ \mathbf{n} + c) \tag{3}$$

で変形していく．ここで$W(\mathbf{x})$はIの傾きの大きいところで小さくなり，その他では大きくなるようにとる．具体的には

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + |\nabla G_t * I|^2(\mathbf{x})}$$

と取る(G_tはGauss核を表し，$*$は合成積を表す)．$\nabla G_t * I$はIに尺度tのガウシアンフィルターをかけたものの勾配を表す（cは膨らますためのパラメーターであるが，その自然な選び方はとくにない．実験的に決める）．

与えられた曲線$\Gamma(0)$をこの(3)によって変形していく．この尺度tの曲線$\Gamma(t)$は必ずしも$\Gamma(0)$と位相的に同型とは限らない場合を許容したい．

最初の$\Gamma(0)$が閉曲線としても$\Gamma(0)$は2つの閉曲線ということは十分ありうるからである．以下の「等高面法」は位相的変化に対応できるので，画像分離法においても重要である．

等高面法では与えられた$\Gamma(0)$に対して

$$\Gamma(0) = \{(x,y)|\phi(x,y)=0\}$$

となる関数ϕをとる．そのとき$\Gamma(0)$の内側外側で$\phi<0$，$\phi>0$と符号をつけておくと，曲線の向きも表現できる．次にϕを初期値とし(3)の等高面方程式

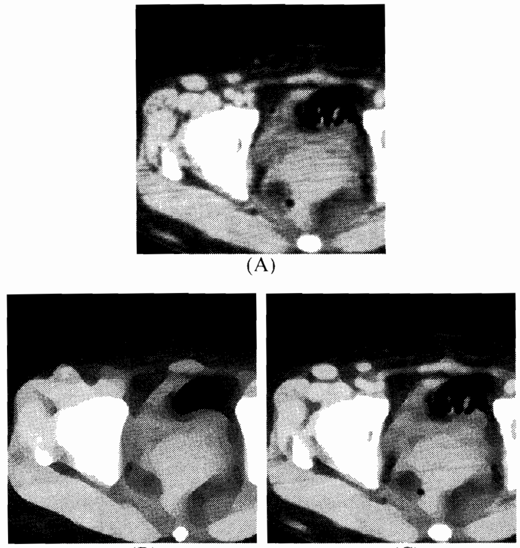
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = |\nabla\psi|\, W(\mathbf{x})\left\{\left(\mathrm{div}\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}\right)-c\right\}$$

を考え，これを初期値ϕとして解く．この解ψに対して$\Gamma(t)=\{(x,y)|\psi(x,y,t)=0\}$とおくことにより尺度$t$の曲線をつくる．この方法では$\phi$に対して解$\psi$がただ1つ決まったとしても，$\Gamma(0)$に対して$\phi$の取り方は多数あるので，それに対応する$\psi$も$\phi$により異なってくる．しかし，この方程式にある比較原理と，濃淡の変換に関しての不変性により，$\Gamma(t)$はϕの取り方によらずに定まるのである〔3, 5~7〕．話は前後するが，右辺の$\mathcal{F}$が退化楕円型である等高面方程式に対しては初期値の大小関係を保存する比較原理が成り立つのである．

次に，濃淡の変換に不変である特徴をもつ等高面方程式ではないが，似たような特徴をもつ方程式による画像の平滑化法を紹介する．全変動流方程式と呼ばれる

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \tag{4}$$

拡散方程式である．これは(2)のように各等高線の変化を表すと$V=-|\nabla u|^{-1}(\mathrm{div}\ \mathbf{n})$となる．勾配の大きいところではあまり動かず，そうでないところでは大きく動くという特徴をもっている．方程式(4)はuの全変動$\int|\nabla u|\ \mathbf{dx}$の勾配流なので**全変動流方程式**と呼ばれる．この方程式は3節の輪郭線の抽出にも適用できる．平滑化においても境界を(1)に比べてぼかさない特徴をもつ．ここでは(1)と(4)による平滑化の違いを見るための数値計算例をあげるにとどめる（**Fig. 1**）．快く計算していただいた本谷秀堅氏に感謝



(A)　(B)　(C)

Fig. 1 Smoothing by (1) and (4) (A): Original image, (B): Smoothing by (1), (C): Smoothing by (4).

する．

4. 数値計算について

方程式(1)について，さまざまな数値計算法があるが，一番コードを組むのが楽なのは差分法である．しかし，驚くべきことに，実際に用いられている差分スキームで得られた解が，真の解に近づくかどうかは不明なことが多い．また非適切問題でも，数値計算は案外安定であることも多い．近似問題が適切になっていることによると考えられている．

5. 等高面法の研究の歴史

図形を関数の等高面で表すということは，古くから行われていたが，平均曲率流方程式の等高面方程式を(1)の形で現れたのは，太田-Jasnow-川崎〔9〕であろう．そこでは初期曲面をランダムに取ったときの，平均曲率流方程式に従って動く曲面の種々の物理量の性質が(1)により研究されている．平均曲率流方程式は，元々金属の焼きなまし時の粒界のような相境界の運動の記述として1950年代に提唱された．等高面法を用いての数値計算はOsher-Sethian〔10〕によって行われた．この数学解析的な基礎は石井仁司氏らを中心とした粘性解の理論〔4〕に基づき，1991

年に確立された〔3, 5〕. 詳しい理論については, たとえば〔6〕を参照して欲しい. また〔7〕には入門的な解説がある.

等高面法の画像処理への応用についてはOsher〔8〕や, Sethian〔12〕のさまざまな数値計算法の提案とともにAlvarez〔1〕らの数学解析も基本的である. ここでは尺度による画像の変化のもつべき性質の公理化が行われている. PDE の画像処理全般への応用についてはShapiro〔11〕の著書が優れている.

なお, 医用画像処理については本谷氏の解説にも引用されているAngenent〔2〕らの数学サイドからの解説がある. 画像分離の部分はこの解説を参照した.

6. おわりに

このように, これまでの歴史を反省してみると, 粘性解の理論をはじめ数学解析の部分についてはわが国の研究者の貢献も十分大であるが, その応用となると必ずしも十分ではない状況である. 今後は数学研究者と他分野研究者の連携を一層強める必要がある. とくにPDEは解を厳密に求められないからといって特定の分野を除いて, あまり親近感をもってもらえなかったきらいがある. 本稿を機会にPDEがより多くの人に利用されることを期待する.

文 献

〔1〕 Alvarez L, Guichard F, Lions P et al: Axioms and fundamental equations of image processing. Arch Rational Mech Anal **123**: 199-257, 1993

〔2〕 Angenent S, Pichon E, Tannebaum A : Mathematical methods in medical image processing. Bull Amer Math Soc (N.S.) **43**: 365-396, 2006

〔3〕 Chen Y-G, Giga Y, Goto S: Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. J Differential Geom **33**: 749-786, 1991

〔4〕 Crandall M, Ishii H, Lions P-L: User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. Bull Amer Math Soc (N.S.) **27**: 1-67, 1992

〔5〕 Evans LC, Spruck J: Motion of level sets by mean curvature. I J Differential Geom **33**: 635-681, 1991

〔6〕 Giga Y : Surface Evolution Equation - a Level Set Approach. Birkhauser Verlag, Basel, 2006

〔7〕 儀我美一, 陳 蘊剛 : 動く曲面を追いかけて. 日本評論社, 1996

〔8〕 Osher S, Fedkiw R: Level set methods and dynamic implicit surfaces. Applied Mathematical Sciences **153**, Springer, 2003

〔9〕 Ohta Y, Jasnow D, Kawasaki K: Universal scaling in the motion of random interfaces. Physics Review Letters **49**: 1223-1226, 1982

〔10〕 Osher S, Sethian JA: Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. J Comput Phys **79**: 12-49, 1988

〔11〕 Sapiro G: Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis. Cambridge University Press, 2001

〔12〕 Sethian JA: Level Set Methods and Fast Marching Methods. Second edition, Cambridge University Press, 1999

*　　*　　*