ISCIE 49(2005), 2-7

解　説

粘性解による値関数の特徴づけ

儀我　美一* ・小池　茂昭†

1. はじめに

常微分方程式の最適制御問題の値関数が Hamilton-Jacobi 型の 1 階偏微分方程式を形式的に満たしていることは古くから知られていた．ところが値関数はしばしば微分不可能な関数であるので，偏微分方程式を満たすというためには，解の概念を拡張する必要があった．しかしながら，不用意に解の概念を拡張すると，値関数以外の関数も解になる可能性があるため，値関数を方程式の解として特徴づけられなくなる．1980 年代前半に Crandall と Lions[2] によって導入された粘性解は，このような欠点のない自然な拡張概念であったため，最適制御だけではなく，確率最適制御や (確率) 微分ゲームをはじめ，さまざまな問題の値関数を特徴づけるものとして，今日広く用いられている．粘性解理論については，さまざまな良書や解説論文がすでに出版されている．たとえば [1] は，最適制御問題，微分ゲームの粘性解理論による取り扱いの標準的な教科書である．また，偏微分方程式の入門書 [4] の 10 章が粘性解入門である．確率制御も含むとなると [5] がよい．一方，粘性解の理論それ自身の解説としては [7] や [3] がある．しかし，これらはきちんと書かれているが，必ずしも読破することが容易ではない．本稿では，これらの文献を読むための手助けとなるように，常微分方程式の最適制御問題にしぼり，その値関数が対応する Hamilton-Jacobi 型方程式の粘性解となることを動的計画原理で示すことを目標にする．これはよく知られた事実だが，粘性解に慣れるために重要なのであえて述べる．また，実際に微分不可能な点の現れる値関数の例も与える．このように基礎事項を解説した後，粘性解の理論のポイントといくつかの応用を述べる．

2. Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式

常微分方程式系（n 連立系）

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{X}}{ds}(s) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(s), \boldsymbol{u}(s)) & (1) \\ \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{x} & (2) \end{cases}$$

の解 (**状態関数**) $\boldsymbol{X}(\cdot)$ に依存する "量" (下記の (5), (11) 式を参照) を，**制御関数** $\boldsymbol{u}$ をうまくとって制御しよう．ここで (1) 式は時間区間 (t,T) で考える．ただし $T>0$ は固定した終了時刻とする．また $t \geq 0$ とする．$\boldsymbol{x}$ は n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の 1 点で初期状態とする．$\boldsymbol{f}$ は与えられた関数とし，制御関数 $\boldsymbol{u}$ の値の動きうる集合は $\boldsymbol{R}^m$ の有界閉集合 K とする．これは $\boldsymbol{u}$ に対する制約になる．(したがって $\boldsymbol{f}$ は直積集合 $\boldsymbol{R}^n \times K$ から $\boldsymbol{R}^n$ への関数である．) 制御関数の動きうる範囲として**許容制御族** A を

$$A = \{\boldsymbol{u} : [0,T] \to K \mid \boldsymbol{u}(\cdot) \text{ は可測}\} \tag{3}$$

により定義する．Bang-Bang 制御も含めるため $\boldsymbol{u}$ は連続関数だけでなく区分的に連続な関数も扱いたいが，それだけに限定するより (ルベーグ) 可測という広いクラスで考えた方が数学的に扱いやすい．一方 $\boldsymbol{f}$ については変数に対しての連続性のほか，制御変数 a についての一様な Lipschitz 性を仮定する．つまり

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},a) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},a)| \leq L|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \tag{4}$$

となる $a \in K$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ によらない定数 L が存在するとする．この Lipschitz 条件は制御関数 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(s)$ を与えれば (1)-(2) 式を満たす解 $\boldsymbol{X}(s)$ が $[t,T]$ でただ一つ存在することを保証している．最適制御問題の一つとして次の評価関数 (費用汎関数)

$$J(\boldsymbol{u};\boldsymbol{x},t) = \int_t^T h(\boldsymbol{X}(s),\boldsymbol{u}(s))ds + g(\boldsymbol{X}(T)) \tag{5}$$

を最小にする問題を考えよう．$\boldsymbol{X}(s)$ は制御関数 $\boldsymbol{u}$ を決めたときの (1)-(2) 式の状態関数とする．ここで h,g は既知関数とし，少なくとも連続としている．(h は $\boldsymbol{R}^n \times K$ 上の実数値関数，g は $\boldsymbol{R}^n$ 上の実数値関数とする．) h は単位時間当たりの維持費用，g は終了費用を表している．この評価関数は制御関数 $\boldsymbol{u}$ および，初期状態 $\boldsymbol{x}$ や初期時刻 t の関数になっている．この評価関数を最小にする制御関数を求めたいのではあるが，そのために評価関数の最小値 (下限値) を知ることが動的計画法の基本である．$J(\boldsymbol{u};\boldsymbol{x},t)$ の許容関数 $\boldsymbol{u} \in A$ に関する下限

$$v(\boldsymbol{x},t) = \inf\{J(\boldsymbol{u};\boldsymbol{x},t) \mid \boldsymbol{u} \in A\} \tag{6}$$

* 東京大学　大学院　数理科学研究科
† 埼玉大学　理学部

Key Words: viscosity solution, value function, nondifferentiable, dynamical programming, finite horizon problem.

を**値関数**とよぶ．ただし$\boldsymbol{x}$は$\boldsymbol{R}^n$の点とし，tは$0\le t\le T$を満たすとする．動的計画法の基本原理は次のように表現でき，しばしばBellman原理ともよばれている．

動的計画原理　$t+\delta\le T$となる$\delta\ge 0$について

$$v(\boldsymbol{x},t)=\inf_{u\in A}\left\{\int_t^{t+\delta}h(\boldsymbol{X}(s),\boldsymbol{u}(s))ds+v(\boldsymbol{X}(t+\delta),t+\delta)\right\} \tag{7}$$

が成立する．ただし$\boldsymbol{X}(\cdot)$は制御関数を$\boldsymbol{u}$としたときの(1)-(2)式の解とする．よって，vが連続微分可能なときは(7)式の左辺を右辺に移し，δで割り，$\delta\to 0$とすると

$$\inf_{a\in K}\{h(\boldsymbol{x},a)+\nabla v(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},a)\}+v_t(\boldsymbol{x},t)=0$$

なる1階の偏微分方程式が得られる．ここで∇vはvの$\boldsymbol{x}$変数に関する勾配，$\cdot$は内積を表す．v_tはvの時間変数に関する偏微分を表す．ここで

$$H(\boldsymbol{x},p)=\min_{a\in K}(h(\boldsymbol{x},a)+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},a)) \tag{8}$$

とおくと，上の方程式は

$$v_t(\boldsymbol{x},t)+H(\boldsymbol{x},\nabla v(\boldsymbol{x},t))=0 \tag{9}$$

と短く表せる．この方程式は$\boldsymbol{R}^n$の各点$\boldsymbol{x}$と$0<t<T$で満たされる．また，(6)式より明らかに

$$v(\boldsymbol{x},T)=g(\boldsymbol{x}) \tag{10}$$

となる．(8)式では(下限がこの場合実現できるので)単にminと書いた．(9)式をHamilton-Jacobi-Bellman(または，Hamilton-Jacobi)方程式とよぶ．条件(10)を**終端条件**とよぶ．次節で見るように一般に値関数は微分が不能な点をもっているので，(9)式の解と見なすためには解の概念の拡張が必要である．

以上は終了時刻のある問題，すなわちfinite horizon(有限区間制御)問題であった．infinite horizon(無限区間制御)問題とは，(5)式の代わりに

$$J(\boldsymbol{u};\boldsymbol{x})=\int_0^\infty h(\boldsymbol{X}(s),\boldsymbol{u}(s))e^{-\lambda s}ds \tag{11}$$

を評価関数として用いたもので，$\lambda\ge 0$は割引率とよばれる．$\lambda=0$のとき，この積分は発散しうるが，$\lambda>0$ならば収束しやすくなるという利点がある．対応する値関数は次で与えられる．

$$v(x)=\inf\{J(\boldsymbol{u};\boldsymbol{x})\mid\boldsymbol{u}\in A\} \tag{12}$$

これに対する動的計画原理は$\lambda\ge 0$に対して

$$v(\boldsymbol{x})=\inf_{u\in A}\left\{\int_0^T h(\boldsymbol{X}(s),\boldsymbol{u}(s))e^{-\lambda s}ds+v(\boldsymbol{X}(T))e^{-\lambda T}\right\} \tag{13}$$

となる．この場合のHamilton-Jacobi-Bellman方程式は

$$\lambda v(\boldsymbol{x})-H(\boldsymbol{x},\nabla v(\boldsymbol{x}))=0 \tag{14}$$

となることが形式的には(8)式の導出と同様に示せる(λの前の符号が$+$になるようにしたため(9)式でのHの前の符号と異なることに注意．この点は**4**節で述べる)．

3.　滑らかでない値関数の例

値関数は一般にはすべての点で微分可能とは限らない．ここではinfinite horizon問題で実際に微分不能な点のある値関数の例をあげる．(1)-(2)式において，$n=1$，$t=0$，$T=\infty$，$f(x,u)=u$とする．許容制御族(3)を$K=[-1,1]$として定義し，評価関数を

$$J(u;x)=\int_0^\infty h(X(s))ds$$

とおく．ここでhは$|\sigma|\le 1/2$で$h(\sigma)=1$,$1/2\le|\sigma|\le 1$で$h(\sigma)=-2(|\sigma|-1)$,$|\sigma|\ge 1$で$h(\sigma)=0$とする．hは偶関数になることに注意しよう．さて$x>0$なる初期状態についてはhがσに関して非増加なのでJを小さくするにはなるべく速く右方向に移動させるのがよく，$u\equiv 1(s>0)$が最適制御であることは容易にわかる．それに対応する状態関数$X(s)$は$X(s)=x+s$となる．よって，値関数は$x>0$では次のようになる．

$$v(x)=\int_0^\infty h(x+s)ds=\int_x^\infty h(s)ds$$

同様に$x<0$では最適制御として$u\equiv -1(s>0)$がとれ，

$$v(x)=\int_0^\infty h(x-s)ds=\int_{-\infty}^x h(s)ds$$

となる．vは$x=0$で連続ではあるがvの$x=0$での右からの微分は$-h(0)$となり，左からの微分は$h(0)$となる．とくにvは$x=0$で微分不能である．これはhに微分不可能な点があるためではないことを注意しておく．

4.　粘性解と値関数

粘性解は関数の最大値原理に基づいた解の概念の拡張によって定義される．Uを$\boldsymbol{R}^n$の開集合，S^nを$n\times n$実対称行列全体とし，$U\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n\times S^n$上の実数値関数$F$に対し，2階の偏微分方程式

$$F(z,w(z),\nabla w(z),\nabla^2 w(z))=0 \tag{15}$$

をU上で考える．ここで$\nabla^2 w(z)$はwのzでのヘッセ行列を表す．以下では$\boldsymbol{R}^n$の点であっても記号を簡単にするため必ずしも太字にしない．方程式(15)が(退化)**楕円型**であるとは任意の$X,Y\in S^n$に対して$X\ge Y$であれば$F(z,r,p,X)\le F(z,r,p,Y)$が常に成立することをいう．(ここで$X\ge Y$とは$X-Y$の固有値がすべて非負であることを意味する．ラプラス方程式$-\Delta w=0$は楕円型であり，1階偏微分方程式はすべて楕円型である．)さて，(15)式が楕円型のとき，wが滑らかで

$$F(z,w(z),\nabla w(z),\nabla^2 w(z)) \leq 0 \tag{16}$$

を U の各点で満たしているとしよう (つまり w は (15) 式の劣解とする)．滑らかな関数 φ を任意に取り，$w-\varphi$ が U の1点 $\hat{z}$ で最大値をとったとしよう．すると，関数の最大値原理より $\nabla(w-\varphi)(\hat{z})=0$, $\nabla^2(w-\varphi)(\hat{z}) \leq O$ を得る (O は零行列)．つまり，$\nabla w(\hat{z})=\nabla\varphi(\hat{z})$, $\nabla^2 w(\hat{z}) \leq \nabla^2\varphi(\hat{z})$ となる．方程式 (15) が楕円型なので

$$\begin{aligned} F(\hat{z},w(\hat{z}),\nabla\varphi(\hat{z}),\nabla^2\varphi(\hat{z})) &= F(\hat{z},w(\hat{z}),\nabla w(\hat{z}),\nabla^2\varphi(\hat{z})) \\ &\leq F(\hat{z},w(\hat{z}),\nabla w(\hat{z}),\nabla^2 w(\hat{z})) \end{aligned}$$

を得る．w は (16) 式を満たすので

$$F(\hat{z},w(\hat{z}),\nabla\varphi(\hat{z}),\nabla^2\varphi(\hat{z})) \leq 0 \tag{17}$$

が導かれる．この (17) 式を見ると w の微分が φ の微分に置き換わっていて式中に w の微分がない．言い換えれば (17) 式は w が微分可能でなくても意味を持つ．このことに注目したものが次の粘性解の定義である．簡単のため F は各変数に関して連続と仮定しておく．

【定義 1】　関数 w は U で連続とする．w が (15) 式の (U 上での) **粘性劣解**であるとは，任意の滑らかな関数 φ に対して $w-\varphi$ が U の点 $\hat{z}$ で最大値をとるならば常に (17) 式が成立することをいう．同様に $w-\varphi$ が U の点 $\hat{z}$ で最小値をとるならば常に (17) 式の不等号を逆にした不等式が成立するとき w を (15) 式の粘性優解とよぶ．粘性優解かつ劣解の場合を単に粘性解という．この解の概念は w が滑らかな場合，通常の解の概念と一致している．

【命題 1】　方程式 (15) は楕円型とする．w が U 上の滑らかな関数ならば，w が (16) 式を U の各点で満たすことと w が (15) 式の U 上の粘性劣解であることは同値である．

（証明） 粘性劣解ならば通常の劣解であることは $\varphi=w$ ととれば明らかである．逆は楕円性を用いて (16) 式を導出したことによりすでに示した．　□

流体力学の粘性消滅法という極限操作により得られた極限関数は上述の定義を満たす (これが粘性解の名前の由来である)．実際，(15) 式が1階のとき粘性項 $-\varepsilon\Delta w$ を加えた方程式 $F(z,w,Dw)-\varepsilon\Delta w=0$ に適当な境界条件を課し，その解 w^ε の $\varepsilon\to 0$ の局所一様極限が (15) 式の粘性解になることがわかる．たとえば $U=(-1,1)$ での $|w'|-1-\varepsilon w''=0$, $w(0)=w(1)=0$ の解の $\varepsilon\to 0$ 極限として $w_0(z)=1-|z|$ が得られ，この w_0 こそ ($z=0$ で微分不可能であるが) $|w'|-1=0$, $w(0)=w(1)=0$ の (ただ一つの) 粘性解になるのである．

粘性解の議論では方程式を安易に -1 倍してはいけない．実際 $-|w'|+1=0$ の粘性解は $-|w'|+1-\varepsilon w''=0$ の解の極限として作られるため同じ境界条件であっても $w_1(z)=|z|-1$ となり w_0 とは異なる．

さて，(6) 式で定義された値関数に戻ろう．(9)-(10) 式は初期値問題ではなく終端値問題だから，粘性解は

$$V_t+H(x,\nabla V)+\varepsilon\Delta V=0$$

の極限から得られる．実際，$-\varepsilon\Delta V$ とすると，(非線形) 熱方程式の終端値問題となり，これは一般に解けないことが知られている．したがって (9) 式の粘性劣解であるとは $w(x,t)=V(x,T-t)$ が

$$w_t-H(x,\nabla w)=0 \tag{18}$$

の粘性劣解であることと定義するのが必然である．実際，$Q=\boldsymbol{R}^n\times(0,T]$ で定義された連続関数 V が (9)-(10) 式の粘性解であるとは，V は $t=T$ で (10) を満たし，かつ Q で滑らかな φ に対して

(a)　$V-\varphi$ が $(\hat{x},\hat{t})\in Q$ で最大値をとるならば

$$\varphi_t(\hat{x},\hat{t})+H(\hat{x},\nabla\varphi(\hat{x},\hat{t}))\geq 0 \tag{19}$$

(b)　$V-\varphi$ が $(\hat{x},\hat{t})\in Q$ で最小値をとるならば

$$\varphi_t(\hat{x},\hat{t})+H(\hat{x},\nabla\varphi(\hat{x},\hat{t}))\leq 0 \tag{20}$$

を満たすことをいう．もちろん，**定義 1** の意味で (a) は $V(x,T-t)$ が (18) 式の粘性劣解であること，(b) は $V(x,T-t)$ が (18) 式の粘性優解であることに対応している．本節では (6) 式で得られた値関数が終端値問題 (9)-(10) 式の粘性解であることを動的計画原理を用いて示す．

【定理 1】　$\boldsymbol{f},h,g$ は連続で，$\boldsymbol{f}$ は (4) 式を満たし，(6) 式で定義された値関数 v は $\boldsymbol{R}^n\times(0,T]$ で連続とする．このとき，v は終端値問題 (9)-(10) 式の粘性解である．

（証明） 終端条件を満たすことは定義 (6) 式より明らかである．つぎに Q で滑らかな関数 φ を考える．

(a) $v-\varphi$ が $(\hat{x},\hat{t})$ で最大値をとるとする．この時 (19) 式を示そう．もし (19) 式が成立しないとすると，

$$\varphi_t(\hat{x},\hat{t})+\boldsymbol{f}(\hat{x},a)\cdot\nabla\varphi(\hat{x},\hat{t})+h(\hat{x},a)<0$$

となる K の元 a が存在する．$\boldsymbol{f}$ と h の連続性また φ が滑らかであることより $\delta>0$, $\theta>0$ をうまくとって $|x-\hat{x}|+|t-\hat{t}|<\delta$ ならば必ず

$$\varphi_t(x,t)+\boldsymbol{f}(x,a)\cdot\nabla\varphi(x,a)+h(x,a)\leq-\theta \tag{21}$$

となるようにできる．(つまり，(x,t) が $(\hat{x},\hat{t})$ に近いときに (21) 式が成立するといっている．) 制御関数 $\boldsymbol{u}(s)\equiv a$ として定数関数制御の場合の次の状態方程式を考えよう．

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{X}}{ds}(s)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(s),a), & \hat{t}<s<T \\ \boldsymbol{X}(\hat{t})=\hat{x} \end{cases} \tag{22}$$

つぎに δ より小さい正数 k を小さくとって $\hat{t} \le s \le \hat{t}+k$ ならば $|\boldsymbol{X}(s)-\hat{x}|<\delta$ となるようにすると，(21) 式より $\hat{t} \le s \le \hat{t}+k$ となる s に対して

$$\varphi_t(\boldsymbol{X}(s),s)+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(s),a)\cdot\nabla\varphi(\boldsymbol{X}(s),s)+h(\boldsymbol{X}(s),a)\le-\theta \tag{23}$$

が成立する．ところで $v-\varphi$ は $(\hat{x},\hat{t})$ で最大値をとるので

$$v(\boldsymbol{X}(\hat{t}+k),\ \hat{t}+k)-v(\hat{x},\hat{t})\le\varphi(\boldsymbol{X}(\hat{t}+k),\hat{t}+k)-\varphi(\hat{x},\hat{t})$$

となり，この右辺は (22) 式を用いて

$$\begin{aligned}&=\int_{\hat{t}}^{\hat{t}+k}\frac{d}{ds}\varphi(\boldsymbol{X}(s),s)ds\\&=\int_{\hat{t}}^{\hat{t}+k}\{\varphi_t(\boldsymbol{X}(s),s)+\nabla\varphi(\boldsymbol{X}(s),s)\cdot\frac{d\boldsymbol{X}}{ds}(s)\}ds\\&=\int_{\hat{t}}^{\hat{t}+k}\{\varphi_t(\boldsymbol{X}(s),s)+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(s),a)\cdot\nabla\varphi(\boldsymbol{X}(s),s)\}ds\end{aligned}$$

となる．ここで (23) 式を用いると

$$v(\boldsymbol{X}(\hat{t}+k),\hat{t}+k)\le\int_{\hat{t}}^{\hat{t}+k}\{-h(\boldsymbol{X}(s),a)-\theta\}ds+v(\hat{x},\hat{t}) \tag{24}$$

一方，動的計画原理 (7) から次が示せる．

$$v(\hat{x},\hat{t})\le\int_{\hat{t}}^{\hat{t}+k}h(\boldsymbol{X}(s),a)ds+v(\boldsymbol{X}(\hat{t}+k),\hat{t}+k)$$

これと (24) 式を合わせると $\theta>0$ に矛盾する．こうして (19) 式が示せた．

(b) $v-\varphi$ が $(\hat{x},\hat{t})$ で最小値をとるとする．このとき (20) 式を示そう．もし (20) 式が成立しないと，

$$\varphi_t(\hat{x},\hat{t})+\boldsymbol{f}(\hat{x},a)\cdot\nabla\varphi(\hat{x},\hat{t})+h(\hat{x},a)>0$$

が K のすべての元 a に対して成立する．$\boldsymbol{f}$ と h の連続性および K のコンパクト性 (すなわち K の任意の点列が収束部分列をもつ) から，a によらない $\delta>0$ と $\theta>0$ で $|x-\hat{x}|+|t-\hat{t}|<\delta$ ならば

$$\varphi_t(x,t)+\boldsymbol{f}(x,a)\cdot\nabla\varphi(x,t)+h(x,a)\ge\theta \tag{25}$$

となるものが存在する．$\boldsymbol{f}(x,a)$ は連続なので K のコンパクト性から x を固定するごとに a の関数としては有界になる (Weierstrass の最大・最小定理)．このため k を十分小さくとれば状態方程式

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{X}}{ds}(s)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(s),\boldsymbol{u}(s)), & \hat{t}<s<T\\ \boldsymbol{X}(\hat{t})=\hat{x}\end{cases} \tag{26}$$

の解は制御関数 $\boldsymbol{u}\in A$ にかかわらず，$\hat{t}\le s\le\hat{t}+k$ ならば $|\boldsymbol{X}(s)-\hat{x}|<\delta$ を満たすようにできる．$v-\varphi$ は $(\hat{x},\hat{t})$ で最小値をとるから次が成り立つ．

$$v(\boldsymbol{X}(\hat{t}+k),\hat{t}+k)-v(\hat{x},\hat{t})\ge\varphi(\boldsymbol{X}(\hat{t}+k),\hat{t}+k)-\varphi(\hat{x},\hat{t})$$

(a) の場合と同様に，この式の右辺は (26) 式を用いて

$$\int_{\hat{t}}^{\hat{t}+k}\{\varphi_t(\boldsymbol{X}(s),s)+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(s),a)\cdot\nabla\varphi(\boldsymbol{X}(s),s)\}ds$$

となる．ここで (25) 式を用いると

$$v(\boldsymbol{X}(\hat{t}+k),\hat{t}+k)\ge\int_{\hat{t}}^{\hat{t}+k}\{-h(\boldsymbol{X}(s),u(s))+\theta\}ds+v(\hat{x},\hat{t}) \tag{27}$$

を得る．動的計画原理 (7) によると下限の定義より

$$v(\hat{x},\hat{t})\ge\int_{\hat{t}}^{\hat{t}+k}h(\boldsymbol{X}(s),\boldsymbol{u}(s))ds+v(\boldsymbol{X}(\hat{t}+k),\hat{t}+k)-\frac{\theta k}{2}$$

を満たす制御関数 $\boldsymbol{u}\in A$ が存在する．(27) 式と合わせると $\theta>0$ に矛盾する．こうして (20) 式を得る．　□

このように値関数が連続ならば終端値問題 (9)-(10) 式の粘性解であることが示せた．値関数の連続性も $\boldsymbol{f},g,h$ の連続性より比較的容易に示せる．infinite horizon 問題についても値関数 (12) が Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式 (14) の粘性解であることが動的計画原理 (13) を用いて示せる ([1] を参照)．

終端値問題の粘性解がただ一つ (一意) であることが知られている場合は，(どんな方法でも) 終端値問題の粘性解が見つかれば，値関数と一致することになる．粘性解の一意性問題については次節に述べる．

さて，値関数が求まったとき最適制御関数 $\boldsymbol{u}_*\in A$ をどのように求めたらよいのであろうか．つまり (6) 式の下限を達成する $\boldsymbol{u}_*$ すなわち $v(\boldsymbol{x},t)=J(\boldsymbol{u}_*;\boldsymbol{x},t)$ となる $\boldsymbol{u}_*$ の求め方について考えよう．ただし，一般には最適制御関数 $\boldsymbol{u}_*$ は存在しないこともあり得る．

値関数 v が滑らかで，状態関数 $\boldsymbol{X}_*$ と制御関数 $\boldsymbol{u}_*$ が

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{X}_*}{ds}(s)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_*(s),\boldsymbol{u}_*(s)), & t<s<T\\ \boldsymbol{X}_*(t)=\boldsymbol{x}.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&H(\boldsymbol{X}_*(s),\nabla v(\boldsymbol{X}_*(s),s))\\&=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_*(s),\boldsymbol{u}_*(s))\cdot\nabla v(\boldsymbol{X}_*(s),s)+h(\boldsymbol{X}_*(s),\boldsymbol{u}_*(s))\end{aligned} \tag{28}$$

を満たすならば，この $\boldsymbol{u}_*$ が最適制御関数 (フィードバック制御) になる．これは Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式 (9) の導出から容易に示せるが，そのためには v が微分可能でなくてはならない．微分 ∇v が存在しない点では，(28) 式の解釈が問題になり個別の研究が必要になる．

5. 粘性解理論の基礎

ここで多くの粘性解に共通する重要な性質について述べる．ただし，もとの $\boldsymbol{f},h,g$ がどのような仮定を満たせばよいかは [1] や [5] やその文献表を参照のこと．まず粘性解の理論で最も重要なものは比較原理である．様々な設定で成立するが，ここでは終端値問題について述べる．

比較原理　終端値問題 (9) に対して $\underline{v}$ が粘性劣解で $\bar{v}$ が

粘性優解とし，$\underline{v}(\boldsymbol{x},T) \le \overline{v}(\boldsymbol{x},T)$ ならば $\underline{v} \le \overline{v}$ がすべての $(\boldsymbol{x},t)$ について成立することを主張する原理である．

比較原理が成立するとすれば終端値問題 (9)-(10) の粘性解はただ一つになり，それは値関数 (6) にほかならない．このように一意性を通して値関数を特徴づけられるのである．したがって，もし終端値問題 (9)-(10) の粘性解を何らかの方法で求められれば，値関数を求めたことになる．

つぎに重要な原理として安定性があげられる．

安定性原理 (15) 式の F および，F と同じ定義域上の連続関数 F_ε が，$\varepsilon \to 0$ のとき，局所一様に $F_\varepsilon \to F$ となるとする．$F_\varepsilon(z,w(z),\nabla w(z),\nabla^2 w(z))=0$ の U 上での粘性劣解 w^ε が $\varepsilon \to 0$ で関数 w に局所一様収束するならば，極限関数 w は (15) 式の U 上での粘性劣解となる．(粘性優解に対しても同様である．)

この原理は粘性消滅法を正当化する重要な原理である (**4** 節参照)．終端値問題 (9)-(10) については

$$\begin{cases} V_t + H(x,\nabla V) + \varepsilon \Delta V = 0, & 0<t<T \\ V(x,T) = g(x) \end{cases} \tag{29}$$

の解 $V^\varepsilon(\varepsilon>0)$ の $\varepsilon \to 0$ 局所一様収束極限として得られる関数 V は安定性原理により (9)-(10) 式の粘性解となる．こうして近似問題 (29) 式を解くことにより，もとの問題の粘性解が作れるのである．近似問題の解は問題が放物型で退化していないので滑らかな解があることが期待でき，(9)-(10) 式に比べて解きやすいという利点がある．

最適制御問題の値関数から出発すると値関数が粘性解であるので粘性解が存在することは明らかである．(9)-(10) 式がより一般の H の場合も安定性原理と粘性消滅法により粘性解を構成することが可能である．しかしその方法では近似問題を解かなければならない．近似問題を経由しない方法がラプラス方程式に対して考案されたペロンの方法であり，石井仁司氏により粘性解の構成に適用できるようになった．これも一般の方程式について成立するので (15) 式について述べる．

ペロンの方法 $\underline{w}$ を (15) 式の粘性劣解とし，$\overline{w}$ を (15) 式の粘性優解とする．もし $\underline{w} \le \overline{w}$ が U 上で成立すると

$$W(z) = \sup\{w(z) \mid w \text{ は (15) 式の粘性劣解, } \underline{w} \le w \le \overline{w}\}$$

で定められる W は (15) 式の粘性解である．

この原理を (9)-(10) 式について用いると (9) 式を満たす粘性劣解 $\underline{V}$ と粘性優解 $\overline{V}$ で $t=T$ まで連続で (10) 式を満たすものがあれば (9)-(10) 式の粘性解が構成できる．粘性解そのものを関数を使って記述することは $H(x,p)$ が p について凹の場合などに限られている．そこで粘性解を計算する様々な数値解法が考案されている ([1] の付録を参照)．

6. おわりに—粘性解理論の発展

この 20 年間の研究により粘性解理論を適用できる制御関係の問題は飛躍的に増加した．そのような問題を列挙しよう．

(i) 微分ゲーム 制御関数が二つ以上あり，片方は評価関数を大きくするように働き，もう一方は小さくするよう働く．(8) 式の Hamiltonian は変数 p について 1 次の関数の min であるので p について凹関数であるが，この Hamiltonian については p について凹関数とは限らない．

(ii) 最適確率制御問題・確率微分ゲーム 数理ファイナンスなどでは，状態方程式 (1) を確率微分方程式に置き換えて考える．この場合，値関数は評価関数の期待値をとってから制御に対して下限をとる．対応する方程式は 2 階退化楕円型 (または放物型) 方程式になる．確率微分方程式に (i) のような 2 種類の制御がある場合，確率微分ゲームになる．

(iii) 偏微分方程式の制御 状態方程式が $\partial \boldsymbol{X}/\partial s = \Delta \boldsymbol{X} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{u})$ のように $\boldsymbol{X}$ が s 以外の変数に依存する偏微分方程式の場合も重要である．この時の値関数は初期状態全体の成す関数空間 H の元を変数とするため，Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式の解の独立変数は H の元と t となる．これは独立変数が無限個ある偏微分方程式であり，ある種の方程式については，粘性解理論を構築することができる．最近は確率偏微分方程式の最適制御問題も扱われている．

(iv) 状態拘束問題 ここまでは制御の方には制約をつけたが，状態についてはいっさい拘束条件をつけない問題を扱ってきた．状態 $\boldsymbol{X}(\cdot)$ の動ける範囲を $\boldsymbol{R}^n$ のある部分開集合 U に制限する問題も自然である．この場合，境界 ∂U に $\boldsymbol{X}(\cdot)$ が達したときに与える条件によって値関数が満たす境界条件は異なる．たとえば境界に達したら止めてそこで一定の費用がかかるように評価関数をとれば Dirichlet 条件になる．Neumann 条件に対応するものもあるがこれらは通常のラプラス方程式に課される標準的なものである．

制御理論に特有な状態拘束条件 [1,3,5] は，(3) 式の許容制御族 A の代わりに，$\boldsymbol{x} \in U$ と $t \le T$ に対して

$$A(\boldsymbol{x},t) = \{\boldsymbol{u} \in A \mid \boldsymbol{X}^u(s) \in \overline{U} \ (t \le s \le T)\}$$

を用いる．ただし，$\boldsymbol{X}^u$ は，初期条件 $\boldsymbol{x} \in U$ の (1)-(2) 式の解である．$A(\boldsymbol{x},t) \neq \emptyset$ を仮定して，値関数 (6) の代わりに

$$\hat{v}(\boldsymbol{x},t) = \inf\{J(\boldsymbol{u};\boldsymbol{x},t) \mid \boldsymbol{u} \in A(\boldsymbol{x},t)\}$$

を考える．このような最小化問題の例として，$n=1$ のときに $X(\cdot)$ が "全財産" を表す場合，破産しないよう (つまり，全財産が負にならないよう) に最小化する問題が考えられるので，現実的な拘束条件といえる．

この値関数が U 上では，(9) 式の粘性解になることがわかる (**定理 1** の証明参照)．また，U の境界上でも適当な仮定のもと，(b) が成り立つことが示せる (つまり，

$V-\varphi$ の $\overline{U}\times(0,T)$ での最小値を $(\hat{x},\hat{t})\in\partial U\times(0,T)$ でとるとき (20) 式が成り立つ）．さらに，このような境界条件のもとで値関数が一意の粘性解として特徴づけられる．

粘性解理論は単に上述のような制御関係の問題ばかりではなく，金属粒子の界面運動を記述する曲率流方程式の等高面方程式を扱ううえで鍵となっている [6]．ごく最近 R. V. Kohn と S. Serfaty[8] によりその方程式が次のようなゲームの値関数が満たす方程式として得られることが確かめられた．二人のプレイヤー A, B が次の規則でゲームをする．x を平面内の 1 点とし初期時刻を t とする．また ε を正数とする．

1. プレイヤー A は長さ 1 の 2 次元ベクトル $\boldsymbol{e}$ を選ぶ．
2. プレイヤー B は $\boldsymbol{e}$ を ±1 倍にする．つまり $\boldsymbol{e}$ を $b\boldsymbol{e}(b=\pm1)$ とする ($b=+1$ とするか -1 とするかを選ぶ)．
3. プレイヤー A は x を $x+\sqrt{2}\varepsilon b\boldsymbol{e}$ に移し，その作業に ε^2 時間かかるとする．こうして得られる状態を $Y(s)$ とおく．終了時刻を T とし，評価関数を $J=g(Y(T))$ とする．プレイヤー A は g を小さくしようとし，プレイヤー B はそれを阻もうとする．値関数を

$$v^\varepsilon(x,t)=\{(x,t)\text{ から出発したときの最小の }g(Y(T))\}$$

とおくと，この場合の動的計画原理は

$$v^\varepsilon(x,t)=\min_{|e|=1}\max_{b=\pm1}v^\varepsilon(x+\sqrt{2}\varepsilon b\boldsymbol{e},\ t+\varepsilon^2)$$

となる．値関数 v^ε の $\varepsilon\to0$ とした極限関数 v の満たす方程式は

$$v_t+\Delta v-\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{|\nabla v|^2}=0,\ t<T \quad (30)$$

となる．これは直観的には次のように動的計画法を用いて説明できる．実際，Taylor 展開により

$$\begin{aligned}v^\varepsilon(x,t)&=\min_{|e|=1}\max_{b=\pm1}v^\varepsilon(x+\sqrt{2}\varepsilon b\boldsymbol{e},\ t+\varepsilon^2)\\&\approx\min_{|e|=1}\max_{b=\pm1}\Bigg\{v^\varepsilon(x,t)+\sqrt{2}\varepsilon b\boldsymbol{e}\cdot\nabla v\\&\qquad+\varepsilon^2\Bigg(v_t+\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}e_ie_j\Bigg)\Bigg\}\end{aligned}$$

となり，

$$0=\min_{|e|=1}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{2}|\boldsymbol{e}\cdot\nabla v^\varepsilon|+v_t^\varepsilon+\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}e_ie_j\right\}$$

を得る．ここで $\varepsilon\to0$ とすると $\nabla v\perp\boldsymbol{e}$ となり，空間の 2 次元性より (30) 式が導かれる．方程式 (30) は時刻 t を $T-t$ と変換すると

$$w_t-|\nabla w|\mathrm{div}(\nabla w/|\nabla w|)=0$$

となる．この式は w の各等高線がその法線方向に曲率分だけ移動することを要請している．言い換えれば曲率流方程式の等高面方程式である．動的計画原理から導かれる方程式が 2 階になるのは確率制御など確率微分方程式が絡むもののときだけではと考えられていた常識を覆す結果で興味深いものである．

(2004 年 7 月 28 日受付)

参考文献

[1] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta: *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*, Birkhäuser (1997)

[2] M. G. Crandall and P. -L. Lions: Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations: *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 277, pp. 1–42 (1983)

[3] M. G. Crandall, H. Ishii and P. -L. Lions: User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations; *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 27, pp. 1–67 (1992)

[4] L. C. Evans: Partial Differential Equations; *Amer. Math. Soc.*, Providence (1998)

[5] W. H. Fleming and H. M. Soner: *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag (1993)

[6] 儀我，陳: 動く曲面を追いかけて, 日本評論社 (1996)

[7] 石井: 非線形偏微分方程式の粘性解について; 数学, Vol. 46, pp. 144–157 (1994)

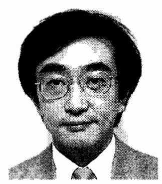
[8] R. V. Kohn and S. Serfaty: *A deterministic-control-based approach to motion by curvature*, Preprint (2004)

著者略歴

儀我 美一（ぎが よしかず）

1955 年 11 月 4 日生．1979 年東京大学理学部数学科卒業，1981 年同大学院理学研究科修士課程修了．同年 6 月名古屋大学理学部助手，1986 年 4 月北海道大学理学部講師，助教授を経て，1992 年 7 月同教授，2004 年東京大学大学院数理科学研究科教授となり現在に至る．この間ボン大学，京都大学等で客員教授を務める．専門は非線形解析学．日産科学賞，日本数学会秋季賞，井上学術賞を受賞する．科学情報研究所の数学分野 249 名の中の最多被引用者の一人．

小池 茂昭（こいけ しげあき）



1958 年 9 月 29 日生．1981 年早稲田大学理工学部物理学科卒業，1983 年同大学院理工学研究科博士前期課程修了，1988 年同大学院理工学研究科博士後期課程退学．同年 4 月早稲田大学理工学部助手，1989 年 10 月東京都立大学理学部助手，1992 年 4 月埼玉大学理学部助教授，2002 年 4 月同大学理学部教授，現在に至る．この間，1995 年 4 月から 8ヶ月間フランス・パリ大学に日本学術振興会特定国派遣研究者．非線形偏微分方程式の粘性解理論とその応用に関する研究に従事．理学博士．日本数学会会員．