

かいせつ

相境界の運動方程式

—非線形偏微分方程式論からのアプローチ—

儀我美一*

1. はじめに

相変態(相転移)の問題は、材料科学のみならず形態形成のしくみを知るうえでも重要で多方面から研究されている。著者は、材料科学の専門家でも物理学の専門家でもない数学者(解析学)であるが、近年、相変態を記述する数学モデルの解析を行う数学者がふえてきた印象をうけている。相変態の平衡状態の研究には長い歴史があるが、近年は非平衡状態も積極的に研究されるようになってきた。非平衡状態の研究が進むにつれ、形態形成の過程が少しずつ明らかになってきている。一口に非平衡問題といっても問題も多岐にわたるし、その解析方法もさまざまである。数学的な取り扱いも、統計物理学的なミクロ的な扱いから物質の存在する領域全体での偏微分方程式を考えるマクロ的な扱いがある。本稿では、相が相境界によって分離されている問題のうち、典型的な非平衡問題である再結晶の成長時の結晶粒界移動を記述していると考えられている偏微分方程式のひとつである曲率流方程式についての数学からの取りくみについて述べる。相境界の運動を曲面(曲線)の偏微分方程式で直接とらえる点で、ミクロとマクロの間であるメゾ的な方法ともいえよう。ここで扱う問題は非常に特殊な状況を考えているようにみえるが、それが解析できない限り、より複雑な問題を数学的に扱うことは困難である。丁度、1次方程式が解けなければ、2次方程式を解くことができないのと同様である。また、数学では、最終的に論理的に厳密な証明まで要求されるので、厳密に扱える問題は限られてくる。しかし逆に一度確立された理論は、くつがえされることはなく、また仮定が満たされているならば設定の異なる問題にも適用できるという汎用性がある。連立1次方程式が解ければ、算数で個別に対処してきた問題が統一的に解けるようになるのと同様である。

2. 曲面(曲線)の発展方程式

2相を隔てる相境界(界面)の運動を記述する微分方程式は、多種多様である。その中で相境界の速度が、相境界の幾何学的形状のみにより、相境界の外の相(バルク)の状態によらないと見なせる場合は、界面支配モデルまたは幾何学的モデルとよばれる微分方程式になる。相境界の速度が小さくバルクでの熱拡散・質量拡散が運動に影響を与えない場合に界面支配モデルは適用できると考えられている。数学では、この種の微分方程式を相境界が曲面であることより曲面の発展方程式とよんでいる。

界面支配モデルを式で書くため、まず $S(t)$ を時刻 t での相境界(閉曲面)とし、 $\mathbf{n}=\mathbf{n}(t, \mathbf{x})$ を $S(t)$ の \mathbf{x} での外向き単位法ベクトルとする。また、 V を \mathbf{n} 方向の法速度とする(図1)。通常 V は熱力学的駆動力によると考えられている。この駆動力は、相境界が後方の相の体積を増加させようと動いた時の自由エネルギーの減少(単位体積変化あたりの)に等しいと考えられている。界面支配モデルでは、この自由エネルギーが相境界の形状のみによって決定される場合を考えている。法速度 V と駆動力の関係であるが、 V が小さい場合の第1近似では、 V は駆動力に正比例しているとしてよい場合が多い。ここまでの状況を自由エネルギー G の増加を $\delta G/\delta S$ として式で書くと

$$V = -M\delta G/\delta S \quad (1)$$

となる。ここで M は正で、単位法ベクトル \mathbf{n} にのみよりうる定数で、動的係数とよばれている。

さて自由エネルギー G がどのようなになっているかによって、式(1)はさまざまな形になる。例えば、金属の凝固時の結晶核の成長では

$$G = \text{界面エネルギー} + \text{体積(自由)エネルギー} \quad (2)$$

としている。また再結晶時の粒界移動の場合

* 北海道大学教授；大学院理学系研究科数学専攻(〒060 札幌市北区北10条西8丁目)
Equations of Motion of Phase-boundaries—An Approach from Nonlinear Partial Differential Equations; Yoshikazu Giga (Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo)
Keywords: mean curvature flow equation, interface controlled model, Allen-Cahn equation
1996年4月9日受理

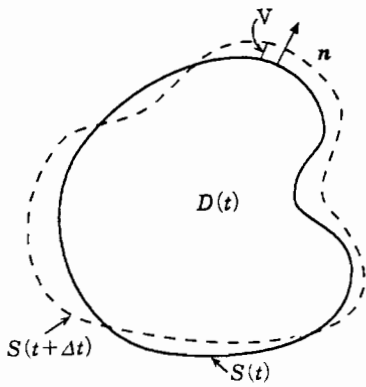


図1 法ベクトルと法速度.

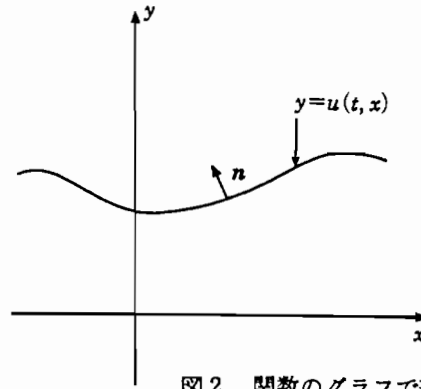


図2 関数のグラフで表される曲線.

$$G = \text{界面エネルギー (粒界エネルギー)} \quad (3)$$

として説明される。界面の方向による異方性がなければ、界面エネルギーは表面積の正定数 γ_0 倍である。また体積エネルギーは、結晶核の成長では曲面 $S(t)$ の囲む図形 $D(t)$ の体積の負定数倍である。この定数を $-C$ と表わす。また簡単なため M を定数 1 とし、 γ_0 を 1 とする。このような状況で式(2), (3)の場合の式(1)は、それぞれ

$$V = -(H - C) \quad (4)$$

$$V = -H \quad (5)$$

となる。ここで H は(内向き)の主曲率の和で、平均曲率(の2倍)であり、 $\text{div } \mathbf{n}$ に等しい。例えば $S(t)$ が半径 R の球面なら、 H は球面上一定で $2/R$ となる。式(5)を平均曲率流方程式という。その導出からわかるように $S(t)$ の表面積をもっとも減少させる方向に移動させるという法則である。式(2)でも(3)でも G が $S(t)$ の形状にのみよるので、式(4), (5)とも界面支配モデルである。

平均曲率流方程式は、材料科学者 Mullins⁽¹⁾ が粒界の運動を記述するために導出したものである。しかし、それが数学者によって研究されるようになったのは、20年程度前からである⁽²⁾。これは、式(5)を曲面の位置についての方程式としたとき非線形になってしまうので、数学的に厳密に扱えなかったからである。式(5)が、非線形偏微分方程式であることをみるために、 $S(t)$ が xy 平面内の曲線 $y = u(t, x)$ のときに u を用いて記述しよう(図2)。まず、 \mathbf{n} を y 軸正の向きに $y = u(t, x)$ の単位法ベクトルとすると

$$\mathbf{n} = (-u_x, 1)(1 + u_x^2)^{-1/2}, \quad u_x = \partial u / \partial x$$

となることに注意する。(下向き)曲率 H は

$$H = \text{div } \mathbf{n} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{u_x}{(1 + u_x^2)^{1/2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{(1 + u_x^2)^{1/2}}$$

第2項で微分される関数は y によらないので、

$$H = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{u_x}{(1 + u_x^2)^{1/2}} + 0 = \frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^{3/2}}$$

となる。一方 $u_t = \partial u / \partial t$ は y 軸正方向の速度であるので法速度 V は、速度ベクトル $(0, u_t)$ の \mathbf{n} 方向への正射影となる。

すなわち V は $(0, u_t)$ と \mathbf{n} との内積で

$$V = u_t(1 + u_x^2)^{-1/2}$$

となる。以上より $V = -H$ は

$$u_t(1 + u_x^2)^{-1/2} = u_{xx}(1 + u_x^2)^{-3/2}$$

つまり

$$u_t = u_{xx}(1 + u_x^2)^{-1} \quad (6)$$

となる。式(6)は、 u に対しての2階の偏微分方程式ではあ

るが u について非線形である。ここで $1 + u_x^2$ が定数なら式(6)は熱(伝導)方程式である。(もしも $1 + u_x^2$ が既知であれば、やはり式(6)は線形の拡散方程式とみなせる。)大雑把にいうと式(6)は拡散係数が $y = u(t, x)$ の傾き u_x による拡散方程式ともいえる。同様に式(4)も u について(6)に似た拡散方程式になる。

式(4), (5)は、式(1), (2)の特殊な場合で、界面エネルギーが、単に表面積の定数 γ_0 倍でなく、より一般的に、結晶構造からきまる正値関数である表面エネルギー密度 γ を用いた面積分

$$\iint_{S(t)} \gamma(\mathbf{n}) \, dS \quad (7)$$

となる状況を考えることがある。結晶の平衡形がいつも球状でなく異方性があることを考慮したモデルである。このような界面エネルギーは材料科学でもとりあげられている⁽³⁾。界面エネルギーを式(7)とすると、式(4), (5)中の平均曲率 H は、 γ を考慮した重みつき平均曲率におきかえる必要がある。このように、一般化しても、それは f を既知とした次の式

$$V = f(\mathbf{n}, \nabla \mathbf{n}) \quad (8)$$

の特別な場合と考えられる。ここで $\nabla \mathbf{n}$ は、 $S(t)$ 上での微分を表わす。

3. 数学(解析学)では何が問題になるか

(1) 局所解の存在問題

初期曲面 $S(0)$ を与えて、方程式(4)や(5)を満たす曲面 $S(t)$ を(少なくとも)短い時間つくることができるかという問題である。方程式(6)であると $u(0, x)$ を与え式(6)を満たす u を、時間局所的につくれるかという問題にあたる。この時点での関心事は、その初期値問題の設定が適切かどうかである。もちろん最初から時間大域的に解が見つければ好都合であるが、一般にはむずかしい。また当然、解がただひとつ(一意)かどうか問題になる。常微分方程式でも

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0 \quad (9)$$

では恒等的にゼロという解のほか、 $x(t) = t^2/4 (t \geq 0)$ も $t > 0$ での解で初期条件をみたすので解の一意性は自明ではない。初期値としてどのようなものを考え解としてどのようなもの考えるかによって結果が異なることもありうる。しかし、局所解の存在問題は、数学者が力をこめて行っているのに対

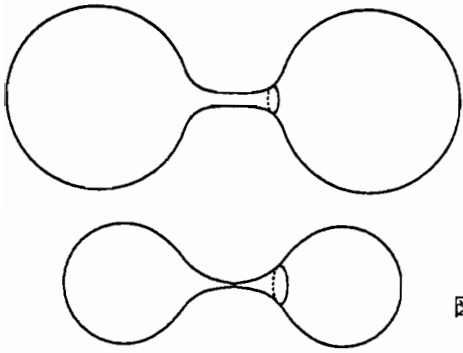


図3 ちぎれるダンベル.

し、応用家からの人気は、いまひとつである。というのは、まともな方程式なら当然解があるはずであろうと考えられているからである。通常はそう思ってもよいが、未知の方程式で数値計算してもスキームによりちがう結果がでたりするような事態になったとき、この問題に打ちかえるのがよいと思う。方程式を解析するときの局所解の存在は、数学者にとつての第1段階である。

(2) 大域解の存在問題

時間局所的に解がつくられた後は、その解が時間大域的に延長できるかどうか考えるのが次の段階である。平均曲率流方程式(5)で、初期曲面 $S(0)$ が原点中心の球面なら解 $S(t)$ も原点中心の球面であることが推測される。実際 $S(t)$ が半径 $R(t)$ の球面であれば式(5)は

$$dR/dt = -2/R \quad (10)$$

という $R(t)$ の微分方程式になり、これを解くことにより半径

$$R(t) = (R(0)^2 - 4t)^{1/2} \quad (11)$$

となる球面 $S(t)$ が半径 $R(0)$ を初期曲面とする式(5)の解となることがわかる。(解の一意性があるのでこの初期値の解はほかはない。)式(10)の解は、確かに式(11)であるが $4t > R(0)^2$ では、根号の中が負になってしまう。図形としては時刻 $R(0)^2/4$ で $S(t)$ は1点となり、その後は空集合になってしまうと考えるのが自然である。問題は方程式(10)が時間大域的に(実数値関数の範囲で)解けなかったことからきている。一般に常微分方程式であっても初期値問題で局所解は、時間大域的に延長できないことがありうる。球面の収縮の場合は、1点に縮み消えるのでその全過程はわかりやすかったが、握るところの細いダンベル面が初期曲面の場合(図3)平均曲率流方程式(5)にしたがって動かすと、ダンベル面の握る部分の平均曲率が大きく全体がつぶれる前にそこがちぎれてしまう(4)。したがって時間大域的に滑らかな曲面を解としていくことは不可能である。ちぎれた後も解を追跡していくには、特異点を許すように曲面の概念を拡張し解の概念を拡張する必要がでてくる。しかしながら、曲面が滑らかでありつづけるための条件を調べることは、どのような特異点が出現するか推測するのに重要である。

(3) 解の挙動に関する問題

この段階にくると応用家と議論がしやすくなる。もともと方程式を解析するのは、解の挙動を知りたいのである。例えば、方程式(4)で初期曲面が球面でその半径 R_0 が大きければ $(2/R_0 < C)$ なら常に外向きに大きくなりつづける。式(5)

を調べた時と同様に $S(t)$ が半径 $R(t)$ の球とし、(10)にあたる式を書きその解を $R(t)$ とすると $t \rightarrow \infty$ で $R(t) \rightarrow \infty$ となる。それでは、初期曲面が球面でなくてもそれが十分大きければやがて空間全体をおおいつくすであろうかとか、その概形は球状であろうかなどが当然問題になる。これは球面の動きが典型的なものかどうかを問っていることにもなっている。また方程式(5)の解が1点に縮むとき、その概形が球に似ているかも似たような質問で式(10)-(11)での球の縮み方が典型的かどうかを聞いている。

(4) 異なるモデル化との関係

もともとの現象のモデル化が異なっている場合、そのモデル相互の解の関係を調べるのは重要である。同じ相境界の運動でもマクロ的なモデルとこの曲面の発展方程式の関係はどうなるかなどが典型的である。ひとつのモデルのあるパラメータを0にすると他のモデルになる場合、実際に解もパラメータを0に近づけるともう一方のモデルの解に収束するかどうかの問題となる。

以上が、数学的に問題にされる主要な点である。それを意識した上で数学の側から曲面の発展方程式に対してどのような研究がされているか概観する。

4. 解析方法

平均曲率方程式(5)に対して代表的な解析方法を述べる。

(1) 媒介変数を用いる方法

曲線を表わすのに媒介変数を用いる方法がよく用いられる。例えば xy 平面内の円周を $x = \cos s, y = \sin s$ と表わすように、この方式では方程式を s を変数とする式(6)に似た拡散型の偏微分方程式に書き直して研究する。媒介変数のとり方に任意性がある点が問題であるが、少なくとも平面内の曲線を取り扱うのには都合がよい。実際、平面内の(自分自身と交わらない)滑らかな閉曲線を初期曲線とすると式(5)の局所解は(一意に)存在し、それは滑らかなまま凸(5)になり、やがて1点に凸のまま縮む(6)ことが示されている。1点に縮む様子は円の場合と同じ(漸近形として)であることも示されている(6)。これにより、式(5)による曲線の運動の全容が定性的によくわかった。空間内の閉曲面の場合も、局所解の(一意)存在性があり初期曲面 $S(0)$ が凸なら凸のまま1点に縮みその漸近形は球である(7)。しかし、前節に述べたようにダンベルの場合は途中でちぎれてしまう。ちぎれたあとの $S(t)$ の運動を追うにはこの方法では不可能である。

(2) Brakkeの方法(2)

この方法では次の恒等式が基本になる。今 $S(t)$ が式(5)を満たしている滑らかな曲面ならば、任意の関数 $g = g(x, y, z)$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{S(t)} g \, dS &= \int_{S(t)} (gVH + Vn \cdot \text{grad } g) \, dS \\ &= - \int_{S(t)} (gH^2 + \text{grad } g \cdot nH) \, dS \end{aligned} \quad (12)$$

となる。(これを示すには $S(t)$ が $z=u(x, y, t)$ と関数 u のグラフであるとして直接計算すればよい。) 曲面をそこに質量が集中した測度と考えるのが特徴である。実軸上の1点 a のかわりにデルタ関数 $\delta(x-a)$ を対応させる要領である。銀河系の星団のような“曲面”を星の分布状況で記述するわけである。すべての g について式(12)の等号を不等号 \leq におきかえたものが成立する測度分布 dS を Brakke の解とよぶ。この解は時間大域的に存在する。これは解の概念を弱めているからである。当然 Brakke の解と通常の意味の解との関係が問題になるが、それについては後述する。

(3) 等高面の方法⁽⁸⁾⁽⁹⁾

曲面 $S(t)$ を空間上で定義された関数

$$\psi = \psi(t, x, y, z)$$

の等高面として記述する方法である。 ψ の勾配ベクトル $\text{grad } \psi$ は ψ の等高面に垂直だから $n = -\text{grad } \psi / |\text{grad } \psi|$ は単位法ベクトルである。すると $V = \psi_t / |\text{grad } \psi|$ なので式(5)は

$$\frac{\psi_t}{|\text{grad } \psi|} = -\text{div} \left(-\frac{\text{grad } \psi}{|\text{grad } \psi|} \right)$$

となる。整理すると

$$\psi_t - |\text{grad } \psi| \text{div} \left(\frac{\text{grad } \psi}{|\text{grad } \psi|} \right) = 0 \quad (13)$$

となる。この方程式は ψ の各等高面が式(5)によって動くことを要求している。(もちろん $\text{grad } \psi = 0$ とならない限りである。) そのような方程式は(5)よりひとつきまり(5)の等高面方程式という。等高面の方法では式(13)を曲面 $S(t)$ の上だけでなく、空間全体で考えるところが重要である。方程式(13)はある種の拡散方程式であるが、各等高面が独立にうごくことから考えて、全方向に拡散的作用があるわけではない。そのため初期値 $\psi(0, x, y, z)$ が滑らかであっても式(13)の滑らかな時間大域解は期待できない。そこで解の意味を弱めるために最適制御問題でよく用いられる粘性解⁽¹⁰⁾を用いる。すると、連続な大域解がただひとつ存在することがわかる。初期曲面 $S(0)$ に対して $S(0)$ の囲まれる所で $\psi_0 > 0$, $S(0)$ 上で $\psi_0 = 0$ また $S(0)$ の外で $\psi_0 < 0$ で十分遠くでは ψ_0 が負の定数である連続関数 ψ_0 をとる(図4)。式(13)を $\psi(0, x, y, z) = \psi_0(x, y, z)$ とした解 ψ を考え

$$\bar{S}(t) = \{(x, y, z); \psi(t, x, y, z) = 0\} \quad (14)$$

を、 $S(0)$ を初期値とする(5)の広義解という。すると、定理⁽⁸⁾⁽⁹⁾任意の閉曲面に対し、それを初期値とする広義解 $\bar{S}(t)$ は時間大域的にただひとつ存在する。

ここで一意性は重要で、 $S(0)$ をきめても ψ_0 のとり方は任意性があり ψ も ψ_0 によってかわる。にもかかわらず $\bar{S}(t)$ がかわらないことを主張しているのである。この方法がうまくいく鍵は、初期曲面 $S_1(0)$ を $S(0)$ が囲んでいれば、時間がたっても $S(t)$ は $S_1(0)$ を初期値とする解 $S_1(t)$ を囲んでいるという比較原理にある。この順序保存性が等高面の方法の基礎である。広義解 $\bar{S}(t)$ は滑らかな局所解がある限りそれに一致しているから、曲面が滑らかさを失った後の解をとらえていることになっている。実際、広義解を詳しく調べるこ

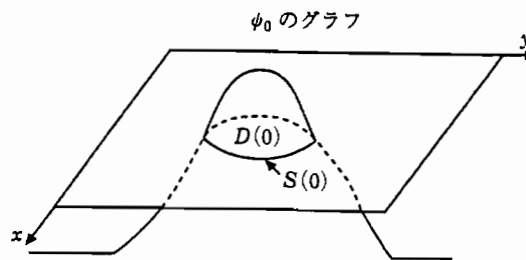


図4 初期曲線 $S(0)$ と ψ の初期値。

とによって、凸でない曲面の場合、1点に縮むがその縮み方の概形が球とは異なるような、初期曲面 $S(0)$ の存在が示された⁽¹¹⁾。等高面の方法の詳しい解説⁽¹²⁾⁽¹³⁾は、ここでは述べないが、この方法は解析的理論ができる少し前に、数値計算法として提案されていた⁽¹⁴⁾。また比較原理に基づくこの方法は、一般の方程式(8)についても何らかの意味で比較原理が成立する限り適用できる⁽⁸⁾。次に述べる反応拡散方程式は、Brakke の方法と等高面の方法の橋渡しになる。

(4) Allen-Cahn 方程式⁽¹⁵⁾

空間全体で自由エネルギーを考える。まず $W(v) = (v^2 - 1)^2/2$ とおく。この W の特徴は $v = \pm 1$ で同じ高さの最小値をふたつ持つことである。系全体の状態を表わす関数 w に対して、その自由エネルギーを体積分

$$G = \iiint W(w) dv + \frac{\varepsilon^2}{2} \iiint |\text{grad } w|^2 dv \quad (15)$$

で定義する。ここで ε は小さいパラメータである。このエネルギーを小さくするには w を $-1, 1$ に近くするだけでなく w が変化するところも小さくしなければならない。 w は空間の秩序を表わす物理量でその時間変化が、自由エネルギーの減少(w の単位“長さ” $\iiint |w|^2 dv$ あたりの)に等しいというモデルを考えると

$$w_t = -\delta G / \delta w \quad \text{つまり}$$

$$w_t = \varepsilon^2 \nabla^2 w - W'(w) \quad (16)$$

という方程式がえられる。これがコースニングの過程をとらえるマクロの方程式として Allen と Cahn⁽¹⁵⁾ によって提案されたものである。 ε^2 の項がなければ、 w は W の底の -1 か 1 におちていく。 ε は小さくても少しでもあれば w が -1 から 1 に変化する部分を減らそうとする効果が w のラプラシアン $\nabla^2 w$ の項にある。このモデルでの界面は w が -1 から 1 に著しく変化する場所としてとらえられる。 ε を小さくすればするほど界面はうすくなる。もう少し詳しくみよう。

まず、時刻 t に比しゆっくり変化する時刻 $\tau = \varepsilon^2 t$ を導入し方程式(16)を書きなおす。この τ を変数としてみた w を再び $w = w(\tau, x, y, z)$ と書くと式(16)は

$$\partial w / \partial \tau = \nabla^2 w - W'(w) / \varepsilon^2 \quad (17)$$

となる。 w が時刻 τ によらず空間的にも x にしかよらない1次元的構造をもち、 $x \rightarrow +\infty$ で $w \rightarrow 1$, $x \rightarrow -\infty$ で $w \rightarrow -1$ となる関数で式(17)をみたすとする。このような w は平行移動を除いてただひとつあって

$$w(x) = q(x/\varepsilon),$$

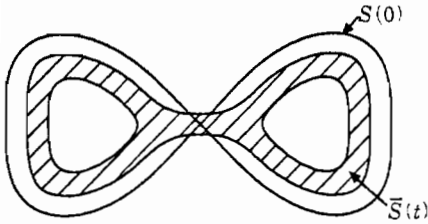


図5
広義解の肥満.

であることが容易にわかる。ただし $q(s) = \tanh s$ であり、常微分方程式 $q'' = W'(q)$ をみたす。この解は定在波とよばれる。 ε を 0 に収束させると $x < 0$ で w は -1 , $x > 0$ で w は $+1$ に収束する。式(17)の時刻 τ による w を近似してみよう。 $w = q(\varphi/\varepsilon)$, $\varphi = \varphi(\tau, x, y, z)$ とおいて式(17)に代入すると

$$\frac{1}{\varepsilon} q' \left(\frac{\varphi}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \nabla^2 \varphi \right) - \frac{1}{\varepsilon^2} \left[q'' \left(\frac{\varphi}{\varepsilon} \right) |\nabla \varphi|^2 - W' \left(q \left(\frac{\varphi}{\varepsilon} \right) \right) \right] = 0 \quad (18)$$

となる。ここでもし $\nabla \varphi (= \text{grad } \varphi)$ の長さが 1 なら [] はゼロとなる。 $\varphi \neq 0$ なら $q'(\varphi/\varepsilon)\varepsilon^{-1}$ も $\varepsilon \rightarrow 0$ で 0 に収束するのでもし $\varphi = 0$ で熱方程式

$$\partial \varphi / \partial \tau - \nabla^2 \varphi = 0 \quad (19)$$

が成立すれば式(18)は $\varepsilon \rightarrow 0$ で近似的に成立する。実は $S(t)$ が平均曲率流方程式(5)の解でかつ φ が $S(t)$ からの距離関数とすると $|\nabla \varphi| = 1$ と、 $\varphi = 0$ で(19)がみたされることがわかる。こうして式(17)の解は、平均曲率流方程式の解によって近似されることが、直観的にわかる。より正確には次のようになる。

今 φ_0 を $S(0)$ の(符号つき)距離関数とし($S(0)$ の外側では負にとるという意味)、 w の初期値を $q(\varphi_0/\varepsilon)$ とする。次に $S(t)$ を $S(0)$ を初期値とする(5)の広義解とする。このとき式(17)の解 $w = w^\varepsilon$ は ε を 0 に収束させると $\bar{S}(t)$ の内側で 1 に外側で -1 に収束する⁽¹⁶⁾。

この結果は、一見きわめて満足な結果におもえる。しかし次のような問題がある。実は広義解が“厚み”をもつことがありうるからである。これを肥満現象とよぶ。例えば平面内で 8 の字を $S(0)$ とする(図5)。これを初期曲線とする式(5)の広義解 $\bar{S}(t)$ は図5の斜線部になってしまう。ふたつの閉曲線がぶつかったものとみるか、1つの閉曲線がくびれてたまたまくっついたかの解釈によりいろいろな解が考えられる。 $\bar{S}(t)$ は、ありうる解をすべて含む集合である。実際、 $\bar{S}(t)$ は、 $S(0)$ を初期値とする Brakke の解をすべて含んでいる。Brakke の解は、一意性が一般にはない。ちょうど方程式(9)の解をしらべている状態になっている。

このような状況に注意すると w^ε の $\bar{S}(t)$ 上での $\varepsilon \rightarrow 0$ のときの挙動を調べる必要がでてくる。最近、 w^ε の部分列をうまくとると $\varepsilon \rightarrow 0$ で、 w^ε の変化の著しい部分は、Brakke の解に収束することが肥満現象があってもわかるようになった⁽¹⁷⁾。また最近、空間内での初期曲面 $S(0)$ が、滑らかであっても特異点が生じその後肥満現象が生じる例も提示されている⁽¹⁸⁾。肥満現象は、解の一意性の問題である。解をえらぶ隠れた仕組みがあるのであろうか。

(5) 他の方法

表面積を界面エネルギー式(7)で近似する。その際、界面エネルギーを最小(体積一定で)とする図形(Wulff 図形という)が凸多面体 P になり、それが球を近似するように γ とする。 $S(0)$ を多面体で近似する。その際各頂点付近の形状が P のどこかの頂点のそれと同じになるようにする。式(5)の解 $S(t)$ は、式(1)、(7)の原理を尊重すると多面体で近似され、その各頂点の運動は常微分方程式で記述される。このような近似計算をクリスタライン法とよぶ。この運動方程式は J. Taylor と S. Angenent-M. Gurtin により独立に導出された。詳細には立ち回らないが、(1)-(4)までの方法とあわせて解説しているよき文献がある⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾。

最近ではミクロ的な方法で平均曲率流方程式の解が構成できることも厳密に示されるようになった⁽²¹⁾。

本稿では平均曲率流方程式に限定して記述したが、表面拡散のある4階の界面の発展方程式や⁽²²⁾、Cahn-Hilliard 方程式の数学的解析もすすんでいるが比較原理がないので式(5)ほどきれいに扱えない。本稿により数学的取り組みの一端をご理解いただければ幸いである。

文 献

- (1) W. W. Mullins: J. Appl. Phys., 27(1956), 900.
- (2) K. A. Brakke: *The Motion of a Surface by its Mean Curvature*, New Jersey, Princeton University Press, (1978).
- (3) J. W. Cahn and D. W. Hoffman: Surface Sci., 31(1972), 368; Acta. Metall., 22(1974), 1205.
- (4) M. Grayson: Duke Math. J., 58(1989), 555.
- (5) M. Grayson: J. Differential Geometry, 26(1987), 285.
- (6) M. Gage and R. S. Hamilton: J. Differential Geometry, 23(1986), 69.
- (7) G. Huisken: J. Differential Geometry, 20(1984), 237; 31(1990), 285.
- (8) Y.-G. Chen, Y. Giga and S. Goto: J. Differential Geometry, 33(1991), 749.
- (9) L. C. Evans and J. Spruck: J. Differential Geometry, 33(1991), 635.
- (10) 石井仁司: 数学, 46(1994), 144.
- (11) S. Altschuler, S. Angenent and Y. Giga: J. Geometric Analysis, 5(1995), 293.
- (12) 儀我美一: 数学, 47(1995), 321.
- (13) 儀我美一, 陳蘊 剛: 動く曲面を追いかけて, 日本評論社, (1996).
- (14) S. Osher and J. Sethian: J. Comp. Phys., 79(1988), 12.
- (15) S. M. Allen and J. W. Cahn: Acta. Metall., 27(1979), 1085.
- (16) L. C. Evans, H. M. Soner and P. Souganidis: Comm. Pure Appl. Math., 45(1992), 1097.
- (17) T. Ilmanen: J. Differential Geometry, 38(1993), 417.
- (18) S. Angenent, D. L. Chopp and T. Ilmanen: Commun. in Partial Differential Equations, 20(1995), 1937.
- (19) J. Taylor, J. W. Cahn and C. A. Handwerker: Acta Metall., 40(1992), 1443.
- (20) M. Gurtin: *Thermomechanics of Evolving Phase Boundaries in the Plane*, Oxford, Clarendon Press, (1993).
- (21) M. Katsoulakis and P. E. Souganidis: Arch. Rational Mech. Anal., 127(1994), 133.
- (22) J. W. Cahn and J. Taylor: Acta Metall., 42(1994), 1045.