

解説

# 相境界の運動と特異点

Motion of Phase-Boundaries and Singularities

儀我美一 北海道大学理学部数学教室

Yoshikazu Giga Department of Mathematics, Hokkaido University

(received for publication August 30, 1991)

Interface controlled models of phase-boundaries are considered. Evolving phase-boundaries may develop singularities in a finite time. A level set approach developed by Chen-Giga-Goto and Evans-Spruck is explained for nonmathematicians. This method is useful to track the evolution of the phase-boundary after it experiences singularities. A key mathematical tool is the theory of viscosity solutions which are generalized solutions of the second order degenerate elliptic and parabolic equations. This important theory is also explained without touching technical details.

## §1 はじめに

物理的状态が異なった物質が交じりあわずに共存している現象は、自然界・産業界を通じて大変多い。たとえば、水の中にある氷とか、空気中の雪とか、合金とか、油と水が共存している流体とか、少し考えただけでも多数の例がある。通常、物理的状态の変わる場所は、大変うすい曲面であることから、界面あるいは相境界と呼ばれる。たとえば、空気中の雪の場合は、雪結晶の表面を相境界とみなす。近年、相境界が時間とともにどのように動くかというところに関心が向けられている。従来の、平衡状態のみの研究では、雪結晶がどうして、あのような複雑な形になるかという問題には答えられない。このような形態形成の問題に対しては、大きくいってふたつの姿勢がある。ひとつは、実験などをみて、それにあうようなできるだけやさしいモデルをたてて図形を描かせてみる方法である。フラクタルの方法は、このような立場では強力であるが、どうしてそのモデルでよいかという物理的裏付けが弱い。他方は物理法則から出発してモデルをつくり、そのモデルを解析して実験とあうかどうかを検証するという考え方である。これは、黒田登志雄氏をはじめ多くの物理学者のとる方法であろう。著者は、解析学者として後者の姿勢をとり、特にモデルの解析に重点をおいている。

相境界がある成長法則で動くときに、この相境界の形をずっと追跡するというのは基本的なことである。実際、数値的には種々の研究があり、た

北海道大学理学部数学教室

〒060 札幌市北区北10条西8丁目

Department of Mathematics, Faculty of Science,  
Hokkaido University

Kita-ku, Sapporo 060, Japan

例えば雪結晶の成長に関しては黒田・横山<sup>1)</sup>によるものが有名である。彼らは、境界条件が第3種類のステファン問題を数値的に解いている。一般に相境界の運動は、その形のみならずバルクの状態にも依存するので大変難しい。本稿では、熱拡散・質量拡散が無視できるような場合に於て、成長速度が相境界の局所的な形によってのみ決まるモデルを考える。このようなモデルは interface controlled model と呼ばれ、金属の粒界の運動に現れる。

一見単純な interface controlled model でも、相境界が有限時間で滑らかでなくなってしまうことがある。たとえば Fig. 1 のような平面内の相境界(実線)を外向き法線の方向に速さ 1 で成長させてみよう。ある程度時間が経過すると点線の図形になり、とがった所がでてきてしまう。こうなってしまうと古典的な特性曲線の方法ではこれから先の成長を追跡することは難しい。しかし相境界の成長はこれで終わるわけではない。



Fig. 1 Formation of singularities.

境界(実線)を外向き法線の方向に速さ 1 で成長させてみよう。ある程度時間が経過すると点線の図形になり、とがった所がでてきてしまう。こうなってしまうと古典的な特性曲線の方法ではこれから先の成長を追跡することは難しい。しかし相境界の成長はこれで終わるわけではない。

特異点が相境界に生じてからも、相境界の運動を追跡するための‘等高面による方法’について解説する。

特異点が相境界に生じてからも、相境界の運動を追跡するための‘等高面による方法’について解説する。

## §2 相境界の運動方程式と特異点の形成

相境界の成長速度が、相境界の法線と曲率のみによる平面内の運動を、まず考えよう。時刻  $t$  での相境界を  $\Gamma(t)$  とする。相境界  $\Gamma(t)$  によって囲まれる有界な図形を  $D(t)$  とする。次に  $V$  を  $\Gamma(t)$  の ( $D(t)$  からみて) 外向き単位法ベクトル  $\mathbf{n}$  方向への成長速度とする。また  $\Gamma(t)$  の ( $-\mathbf{n}$  方向への) 曲率を  $k$  とする。  $\Gamma(t)$  が半径  $r$  の円なら  $k=1/r$  となるように  $k$  の符号がとられていることに注意する。相境界  $\Gamma(t)$  の運動方程式の一般形は、  $\Gamma(t)$  上

$$V=g(\mathbf{n}, k)$$

となる。ここで  $g$  は与えられた関数である。

以下、典型的な例を述べる。まず §1 で述べた外向き法線方向に 1 の速さで成長する運動は上の記法では

$$V=1 \quad (1)$$

となる。曲線  $\Gamma(t)$  の長さの減少速度が最も大きくなるように動いている場合は、曲率による運動とよばれ

$$V=-k \quad (2)$$

と記述される。金属のような固体の場合は  $\Gamma(t)$  の長さより、  $\Gamma(t)$  の‘表面エネルギー’の減少速度を最大にするように動くとした方が自然である。つまり結晶の異方性を考慮するわけである。異方性を考えにいと

$$V=-\frac{1}{\beta(\theta)}((\sigma(\theta)+\sigma''(\theta))k+c) \quad (3)$$

という式が熱力学第 2 法則と各種の保存則を使ったときの最も一般的な式になる。この導出は Gurtin<sup>2)</sup>による。ここで  $\sigma$  は表面エネルギー密度、  $\theta$  は  $\mathbf{n}$  の偏角、  $c$  は定数とする。また  $\beta$  は上の効果とは異なる異方性の効果を与える。もちろん  $\beta \equiv 1$ ,  $\sigma \equiv 1$  とし、  $c=0$  とすると曲率による運動方程式(2)となり、  $c=1$ ,  $\sigma \equiv \beta \equiv 0$  とすると(1)になる。

§1 で述べたように(1)による運動では初期の相境界  $\Gamma(0)$  の形によっては、有限時間内で特異点が生じる。ところが(2)による運動では、  $\Gamma(0)$  がどんな(滑らかな)曲線であっても、運動していく過程で交わったり特異点が生じることなく、ある時間経過すると凸な図形になってしまうことが Grayson<sup>3)</sup>によって証明されている。その後は凸のまま一点に収縮してしまうことが Gage と Hamilton<sup>4)</sup>によって知られている。したがって平面内の曲線を曲率によって動かしても特異点を生じることなく有限時間で一点に収縮してしまうわけである。

これに対して、空間内で面積の減少速度が最大になるように相境界  $\Gamma(t)$  を運動させるとすると様子が異なる。このような運動は  $\Gamma(t)$  の平均曲率による運動とよばれ  $\Gamma(t)$  上

$$V=-H \quad (4)$$

という方程式で記述される。ここで  $H$  は ( $-\mathbf{n}$  方向への)  $\Gamma(t)$  の平均曲率で  $\Gamma(t)$  の 2 つの主曲率の

和とする(Gauss 以来通常, 主曲率の平均を平均曲率とっているが, ここでは平均しないで, 単に和をとることにする). この記法では  $\Gamma(t)$  が半径  $r$  の球ならば  $H=2/r$  となる. ちなみに  $\Gamma(0)$  が半径  $R$  の球であれば(4)によって動かすと  $\Gamma(t)$  は半径

$$r(t) = \sqrt{R^2 - 4t}, \quad t < R^2/4$$

となる.  $t=R^2/4$  で  $\Gamma(t)$  は一点に収縮し, 消えてしまう. 相境界  $\Gamma(0)$  が凸ならば, 平面内の曲線の運動と同様に  $\Gamma(t)$  は凸のまま特異点を生じることなく一点に収縮する. これは Gage-Hamilton の結果に先だって Huisken<sup>5)</sup> により示された. ところが, 初期の相境界がハンドル部分の短いバーベルの場合, ハンドル部分の平均曲率が, 大変大きいので, 全体が縮む以前にハンドル部分がちぎれてしまうことが Grayson<sup>6)</sup> によって示された(Fig. 2). ちぎれたあとの相境界の運動を追跡することが当然問題になる. これに対して Brakke<sup>7)</sup> は Huisken より前に, 相境界が最初どうであっても時間に関して大域的な, 一般化された意味での(4)の解を構成した. しかし, その解は初期値をきめても一意でないので問題があった. また幾何学的測度論<sup>8)</sup> を用いての結果なので, 解の意味が一般的すぎた.

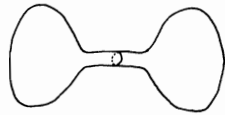


Fig. 2 Barbell with a thin handle.

平均曲率による曲面の運動を詳しくとりあげたのは, (1)などに比べて, 平均曲率があると運動が平滑化されて, 特異点が生じないと思われる可能性があるからである. 確かに曲面をとがらせまいという作用はあるが, 図形全体の形によっては特異点が生じてしまうことがある. また平均曲率による運動は, 金属で純金をつくるための焼きなましの過程での粒界の運動<sup>9)</sup>を近似していると考えられ, 物理的にも重要である.

平均曲率による運動は, 平面内の曲線の曲率による運動と, これまでみてきたように, かなり異なる. たとえば

$$x^2 + y^2 = (1 - z^2)(1 - \lambda + \lambda z^2)^2, \quad 0 < \lambda < 1$$

で与えられる曲面  $\Gamma^\lambda(0)$  を初期曲面として(4)によって動かすと  $\lambda$  の値によっては凸にならず一

点に収縮してしまうことが実際に起こる<sup>10)</sup>. だから消滅の仕方も, 大変複雑である.

### §3 等高面による方法と解の接続

空間内の曲面を記述する方法は, 本質的には次の3通りである. 第1は, ある関数のグラフとして表わす方法, 第2は, 媒介変数表示で, 第1の方法を特別な場合として含む. 第3の方法は, 曲面をある関数の零点集合として表わすものである. 第1, 第2の方法が曲面が滑らかでないといけないのに対して, 第3の方法は, たとえば

$$f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$$

の零点集合が, 原点で特異点を許しているように, 曲面が滑らかでなくても使いうる. このような理由で相境界  $\Gamma(t)$  に対して

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \{(x, y, z); u(t, x, y, z) = 0\} \\ D(t) &= \{(x, y, z); u(t, x, y, z) > 0\} \end{aligned} \quad (5)$$

となる補助関数  $u$  を導入する. 平均曲率による運動の方程式(4)を  $u$  を用いて表わそう.  $\Gamma(t)$  上

$$V = \frac{\partial u}{\partial t} / |\text{grad } u|, \quad \mathbf{n} = -\text{grad } u / |\text{grad } u|$$

$$H = \text{div } \mathbf{n} = -\text{div} (\text{grad } u / |\text{grad } u|)$$

なので, (4)は  $\Gamma(t)$  上

$$\frac{\partial u}{\partial t} - |\text{grad } u| \text{div} \left( \frac{\text{grad } u}{|\text{grad } u|} \right) = 0$$

となる. 第2項を計算すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \sum_{i,j=1}^3 \frac{u_i u_j u_{ij}}{|\text{grad } u|^2} = 0, \quad (6)$$

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_2 = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_3 = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \Delta = \text{div grad}$$

となる. ここでたとえば  $u_{12}$  は  $\partial^2 u / \partial x \partial y$  なる2階微分を表わしている. 相境界をこのように補助関数  $u$  の零点集合とみなし相境界の運動を(6)により考察した最初の研究は太田-Jasnow-川崎<sup>11)</sup>にさかのぼる. 彼らは, 相境界の面積のような, 形状を決める関数のスケール則を物理的考察により導いている.

さて方程式(6)は  $\Gamma(t)$  上の方程式としては(4)と形式的に同じものであるが, もし空間全体で(6)が成立しているとすると,  $u$  の各等高面が(4)に従って動いていることになる. 陳-儀我-後藤<sup>12)</sup>

および Evans-Spruck<sup>13)</sup>により導入された等高面による方法では、方程式(6)を空間全体で考えることが鍵になる。与えられた初期状態  $\Gamma(0)$ ,  $D(0)$  に対して(4)を満たす集合の族  $\Gamma(t)$ ,  $D(t)$  を次のようにして構成しよう。

まず、空間上の連続関数  $u_0$  で  $\Gamma(0)$  を零点集合とし、 $u_0 > 0$  の集合が  $D(0)$  となるようなものをとる。空間無限遠のことを考えないために、 $u_0$  は大きな球の外では負の定数としておく。次に(6)に初期条件

$$u(0, x, y, z) = u_0(x, y, z) \quad (7)$$

を課して  $t > 0$  で解く。そうしてつくられた  $u$  を使って(5)で  $\Gamma(t)$ ,  $D(t)$  を定義して、(4)の一般化された解ということにしよう。

この考え方は、数値実験では Osher-Sethian<sup>14)</sup>により既に取り入れられていた。しかし数学的厳密な解析を行う場合いくつか問題点がある。

(i) 与えられた初期値に対して(6)を満たす解が時間的大域的にあるか。これは非線形方程式では自明ではない。また、あったとしたら解  $u$  はただひとつであろうか。これらを(6)の初期値問題の大域一意解の存在問題という。

(ii)  $\Gamma(0)$ ,  $D(0)$  に対して  $u_0$  のとり方は一通りではない。別の  $u_0$  で(6)を解けば  $u$  も異なってくる。このとき(5)で定義される  $\Gamma(t)$ ,  $D(t)$  は  $u_0$  のとり方によらず  $\Gamma(0)$ ,  $D(0)$  のみによって決まるか。この問題は、相境界の運動方程式の解の一意性の問題といえる。

以上2点が克服できれば、特異点が途中で生じようと相境界の発展が  $u$  の零点集合として常に追跡できることになる。

実際(i)は、粘性解という、微分が必ずしもできない解を考えることにより、少なくとも一意性の部分は克服できる。(ii)の方は方程式が相境界の運動方程式からきているということから示せる。のみならず、この方法は、何も(4)や(2)のみでなく、(1), (3)のような他の運動方程式に対しても適用できる。ただし(3)では  $\sigma + \sigma'' \geq 0$  を仮定する。Evans-Spruck<sup>13)</sup>は(2), (4)のみ扱っているのに対し、陳-儀我-後藤<sup>12)</sup>は、より一般の(1), (3)を含む運動方程式<sup>15)</sup>を扱っている。

## §4 幾何学的退化放物型方程式

まず方程式(6)の性質を詳しくみるために(6)を

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F((u_i), (u_{ij})) = 0 \quad (8)$$

と表わそう。ただし

$$F(\mathbf{p}, X) = -\text{trace} \left[ \left( I - \frac{\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|^2} \right) X \right] \quad (9)$$

とする。ここで  $\mathbf{p}$  は3次元ベクトル、 $X$  は3次実対称行列、 $I$  は3次単位行列、 $\otimes$  はテンソル積で  $I - \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} / |\mathbf{p}|^2$  は3次行列になる。また  $|\mathbf{p}|$  は  $\mathbf{p}$  の長さを表わす。定義を忠実にたどると(6)が(8)-(9)と同じ式であることがわかる。もし  $F$  が

$$F(\mathbf{p}, X) = -\text{trace } X$$

なら

$$F((u_i), (u_{ij})) = -\Delta u$$

なることに注意しよう。式(9)で定義された  $F$  は、ラプラシアンの場合と同様

$$F(\mathbf{p}, X+Y) \leq F(\mathbf{p}, X), \quad \mathbf{p} \neq 0$$

がすべての非負定値行列  $Y$  について成立する。このとき  $F$  を退化楕円型という。trace  $Y > 0$  のとき不等号が等号なしで成り立てば“退化”という形容詞はいらないが、(9)式の場合は、あとでみるように実際退化している。方程式(6)は退化放物型方程式の一例である。

次に(9)式の  $F$  は

$$F(\lambda \mathbf{p}, \lambda X + \sigma \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) = \lambda F(\mathbf{p}, X), \quad \mathbf{p} \neq 0$$

というスケール不変性をもつことがすぐわかる。

ここで  $\lambda > 0$ ,  $\sigma$  は実数とする。  $F$  がこの性質をもつとき、  $F$  を幾何学的<sup>12)</sup>であるという。ここで  $\lambda = 1$ ,  $Y = \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}$  とすると trace  $Y > 0$  かつ  $Y$  は非負定値であるにもかかわらず

$$F(\mathbf{p}, X+Y) = F(\mathbf{p}, X)$$

となり退化している。このことは、grad  $u$  方向への拡散効果が(6)にないということを反映していて当然である。

以上ふたつの性質は、もとの相境界の運動方程式が退化放物型である限り、それからつくった  $F$  に対してあてはまる性質である。何も平均曲率による運動に限られるわけではない。

## §5 粘性解

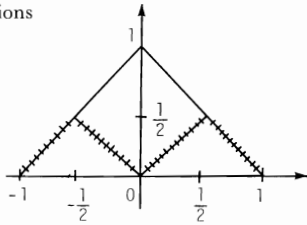
方程式(8)-(9)は退化放物型方程式で(7)の初期値が滑らかでも解  $u$  は有限時間で滑らかでなくなる可能性がある。したがって微分不能な関数にまで解の概念を広げないと大域解はつくりえない。しかし一方、解の概念を広げすぎると一意性がくずれてしまう。簡単な例を考えよう。

$$\left| \frac{dv}{dx} \right| - 1 = 0, \quad -1 < x < 1 \quad (10)$$

$$v(\pm 1) = 0$$

という方程式を考えよう。この方程式は  $v(x) = 1 - |x|$  のほかにも Fig. 3 の折れ線でかかれるグラフをもつ関数も解としてもつ。傾きの絶対値

Fig. 3 Solutions of (10).



が1になるように2点  $(\pm 1, 0)$  を結ぶ折れ線をグラフとする関数はすべてこの方程式を(折れ曲がりの部分を除いて)満たす。この意味で解は無数あるが、それらを滑らかさで区別することはできない。この中からひとつ選びたい。式(10)に対して

$$\left| \frac{dv^\varepsilon}{dx} \right| - 1 = \varepsilon \frac{d^2 v^\varepsilon}{dx^2} \quad (11)$$

$$v^\varepsilon(\pm 1) = 0$$

という2階微分方程式を考える。  $\varepsilon > 0$  とすると(11)はふつうの意味の解を唯一もつ。この解  $v^\varepsilon$  の  $\varepsilon \rightarrow 0$  としたときの極限を  $v$  とすると実は  $v(x) = 1 - |x|$  となる。(11)式の右辺の  $\varepsilon$  が流体力学の粘性項に似ていて、また  $\varepsilon \rightarrow 0$  とするのがいわゆる粘性消滅法と似ているので、 $v$  のことを(10)の粘性解という。式(10)に対していちいち(11)のような近似方程式を考えなくてはならないのでは、(10)を研究する上ではなはだめんどうである。したがって粘性解を(11)を使わず定義する必要があった。式(10)を含む Hamilton-Jacobi 方程式につ

いて、近似方程式を使わず粘性解が Crandall-Lions<sup>16)</sup>によって定義された。近年、Jensen<sup>17)</sup>や石井<sup>18)</sup>により2階退化楕円型・放物型方程式に拡張された。

粘性解の重要な性質は必ずしも微分できないにもかかわらず、比較原理が成り立つことである。たとえば、(6)のふたつの粘性解  $u, v$  が  $t=0$  で  $u \leq v$  なら、 $t > 0$  でも  $u \leq v$  といった形の原理である。しかし、(8)-(9)は  $p=0$  の所で  $F$  が連続でないので、石井らの理論は直接つかえず工夫を要する<sup>12,13)</sup>。結果的には(8)-(9)は粘性解に対して比較原理が成立する。

比較原理があれば、初期値問題(7)-(9)の粘性解の一意性は明らかである。しかし、相境界の運動方程式の解の一意性となると、もう少し考察する必要がある。いま、 $u_0, v_0$  がともに  $\Gamma(0), D(0)$  を表わす関数とし、 $u, v$  を初期値を  $u_0, v_0$  とする(8)-(9)の粘性解とする。非減少連続関数  $\theta$  で  $\theta(0)=0$  なるものをうまくとると  $u_0 \leq \theta(v_0)$  とできる。方程式が幾何学的であることより  $\theta(v) = w$  も(8)-(9)の粘性解となる<sup>12,13)</sup>。しかし比較定理により  $u \leq w$  が  $t > 0$  で成立する。これより  $u > 0$  ならば  $v > 0$  がいえ、 $v \leq 0$  なら  $u \leq 0$  がいえる。 $u_0$  と  $v_0$  の立場を逆にすると(5)の  $\Gamma(t), D(t)$  を  $u$  で定義しても  $v$  で定義しても一致することがわかる。

あとは(7)-(9)の大域解の構成であるが近似による方法<sup>13)</sup>と Perron の方法<sup>12)</sup>を使うやり方がある。後者の方がより一般の運動に使えるが、解の性質をだす上では、前者がすぐれていることもある。以上が等高面による方法の数学的裏付けの概略である。こうして得られた  $\Gamma(t) (t \geq 0)$  を(4)の一般化された解ということにする。

## §6 一般化された解の性質

粘性解の等高面として(5)により定義された一般化された解の性質の研究は、はじまったばかりである。まず、相境界が滑らかである限り等高面による解と一致する<sup>13,19)</sup>。バーベルのように特異点が生じた場合でも、バーベルが回転面である場合は、平均曲率による運動による一般化さ

れた解は2つの部分に分かれるが、各々、瞬時に滑らかになる<sup>10)</sup>。また、この運動はAllen-Cahn型の反応拡散方程式の特異摂動として得られる相境界の運動となることが特異点発生後についてもいえることがわかっている<sup>20)</sup>。

## §7 他の方法

特異点が生じてから後も相境界の運動を追跡することは、相境界が曲線の場合 Angenent<sup>21)</sup>により試みられているが、一意性はわからない。一方、Taylor<sup>22)</sup>は、表面エネルギーが crystalline エネルギーの場合の多角形の運動を調べている。このアプローチと等高面による方法の関連はわかっていない。等高面による方法では(3)の $\sigma$ は $C^2$ であることが必要だが crystalline エネルギーでは $\sigma$ は単に Lipschitz 連続であるからである。この関係に著者は興味をもっている。

## §8 おしまいに

本稿は、著者らによって導入された等高面による方法を解説するのを目的とした。著者が、相境界の運動に興味をもったのは、1988年3月に黒田登志雄先生の講演を低温研で聞かせていただく機会を得たことによる。それ以来、黒田先生には時々ご意見をうかがったりという状態であった。先生がなくなる一週間前に電話で、黒田・横山の研究<sup>1)</sup>での雪結晶の周囲の長さは、有限時間で無限になるかと質問すると「おそらく、有限時間で

は、有限長であり、フラクタルにはなっていない。」との答えられたのが今でも印象に残っている。いつの日にか、このことを証明したいと思いつつ、ここに黒田登志雄先生の冥福を祈る。

### 〔参考文献〕

- 1) E. Yokoyama and T. Kuroda: Phys. Rev. A **41** (1990) 2038.
- 2) M. Gurtin: Arch. Rational Mech. Anal. **104** (1988) 195.
- 3) M. Grayson: J. Differential Geometry **26** (1987) 285.
- 4) M. Gage and R. Hamilton: J. Differential Geometry **23** (1986) 69.
- 5) G. Huisken: J. Differential Geometry **20** (1984) 237.
- 6) M. Grayson: Duke Math. J. **58** (1989) 555.
- 7) K. A. Brakke: *The Motion of a Surface by its Mean Curvature* (Princeton Univ. Press, 1978).
- 8) F・モーガン: 石けん膜の数理解析 (共立出版, 1990)
- 9) W. W. Mullins: J. Appl. Phys. **27** (1958) 900.
- 10) S. Altschuler, S. Angenent and Y. Giga: Motion by mean curvature through singularities for surfaces of rotation, preprint.
- 11) T. Ohta, D. Jasnow and K. Kawasaki: Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 1223.
- 12) Y. -G. Chen, Y. Giga and S. Goto: J. Differential Geometry **33** (1991) 749; Proc. Japan Acad. Ser. A **65** (1989) 207.
- 13) L. C. Evans J. Spruck: J. Differential Geometry **33** (1991) 635.
- 14) S. Osher and J. A. Sethian: J. Computational Phys. **79** (1988) 12.
- 15) Y. Giga and S. Goto: Motion of hypersurfaces and geometric egnations, J. Math. Soc. **44** (1992) to appear.
- 16) M. Crandall and P. -L. Lions: Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983) 1.
- 17) R. Jensen: Arch. Rational Mech. Anal. **101** (1988) 1.
- 18) H. Ishii: Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989) 15.
- 19) Y. Giga and S. Goto: Geometric evolution of phase-boundaries, IMA Preprint Series #738.
- 20) L. C. Evans, H. M. Soner and P. Souganidis: Phase transition and genernlized motion by mean curvature, Comm. Pure Appl. Math. (to appear)
- 21) S. B. Angenent: J. Differential Geometry **33** (1991) 601.
- 22) J. E. Taylor: Research Report GCG 26, Geometry Supercomputer Project, University of Minnesota, Proc. Symp. Pure Math. (to appear)