第4回発展方程式若手の会 報告, 36-45 (1983)
(1982年8月2日～5日, 長野県上松)

保存則をあらわす方程式の弱解の、相空間を用いての構成法

名大・理　儀我美一
広島大・理　宮川鉄朗

一階単独準線型方程式の初期値問題

$$
(M)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i} A^i(u) = 0 & t \geq 0 \\
u(x, 0) = u_0(x)
\end{cases}
$$

を考える。ここで $x=(x_1, \dots, x_n)$, $u=u(x,t)$ そして A^i, $i=1$ は一変数の実数値連続微分可能関数とする。

この問題の時間についての大域弱解は従来粘性消滅法や差分法により構成されてきた。ここでそれらと異なった構成法で解の構成を行う。

この研究の動機は Kaniel [K] にある。彼は Navier-Stokes 方程式の大域解を 'kinetic model' を導入することによってつくろうとした。しかし残念なことに彼の最終結果に対する証明は [K] にはない。

我々の方法を説明するために、気体力学の2つの微視的(マイクロ)と巨視的(マクロ)をおもいおこそう。気

では 相空間での 速度分布を支配するボルツマン方程式を考える。 ボルツマン方程式は気体の運動をマイクロに記述し, 流体力学の保存則はマクロの記述とされている。

まず (M) をマクロな保存則とみなそう。(M) に対応して非常に簡単な輸送方程式をマイクロな法則と思う。

$$\text{(m)} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\psi^j(\xi)\cdot f\right) = 0, \quad f(x,\xi,0) = f_0(x,\xi)$$

ここで $f = f(x,\xi,t)$ で $\psi^j(\xi)$ は実一変数の関数とする。

f に対して マクロな量 v を $v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\xi,t)\,d\xi$ で対応させる。 反対に, 標準的マイクロの量 $F(w,\xi)$ を, マクロの量 w が

$$\text{(D)} \qquad w = \int_{-\infty}^{\infty} F(w,\xi)\,d\xi$$

と分解できるように導入する。 ここで $F(w,\xi)$ は x に陽にはよらぬとする。 (M) と (m) を両立させる条件として ψ^j と F に次の仮定をおく。

$$\text{(C)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \psi^j(\xi) F(w,\xi)\,d\xi = A^j(w) + C^j, \quad 1 \le j \le n$$

ここで C^j は定数とする。

(M) の近似解を構成するために $f_0 = F(u_0(x),\xi)$ として (m) をとく。 v を f に対応するマクロの量とする。 すると (C) と (D)

より容易に $t=0$ のところでは $v(x,t)$ は (M) の保存則をみたしていることがわかる。このことより 時間区間を $[0,\delta]$ $[\delta, 2\delta$ とくぎり 各小区間ごとに上のやり方をくりかえせば 近似解ができそうなことが推察される。詳しくは次節をみよ。

これまでしられている解の構成法についてのべよう。粘性消滅法は Hopf [H] により導入され、方程式(M)に対しては Kružkov [Kr] によって大域的弱解の存在がしめされた。差分法は Oleinik [O] で $n=1$ のときのみ実行され、後に Conway-Smaller [C-S] で問題(M)の弱解がつくられた。その他に、非線型半群論を用いたものとして Crandall [C] や Oharu-Takahashi [O-T] がある。また Douglis [D] にはこれらとはちがった解の構成法がある。

解の一意性を保障するための条件としてエントロピー条件というものがある。その意味は例えば Lax [L1] をみよ。

我々が本稿で構成する解はエントロピー条件をみたすかどうか 現在までのところわかっていない。
(上記の構成による解はすべてエントロピー条件をみたす。)

§ 近似解の構成と主結果

まず $F(w, \xi)$ を

$$F(w, \xi) = \begin{cases} 1 & 0 < \xi \leqq w \\ -1 & w \leqq \xi < 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とし $\psi^{\gamma}(\xi) = dA^{\gamma}(\xi)/d\xi$ とする。 すると明らかに F, ψ^{γ} は (C) (D) を $C^{\gamma} = -A^{\gamma}(0)$ としてみたす。

次に $\delta > 0$ に対して近似解 u^{δ} を次のようにつくる

初期値 $u_0(x)$ に対して $f_0 = F(u_0(x), \xi)$ として (m) を $0 \leqq t \leqq \delta$ でとき $u^{\delta}(x, t)$ の $0 \leqq t \leqq \delta$ での値を

$$u^{\delta}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \xi, t)\, d\xi$$

で定義する。次に $u^{\delta}(x, \delta)$ を初期値とみて上と同様な操作をおこない $u^{\delta}(x, t)$ の $\delta \leqq t \leqq 2\delta$ での値を定義する。これを繰りかえせば $u^{\delta}(x, t)$ が $t \geqq 0$ で定まる。

あとのために記号を導入しよう。(m) の f を $f = U_t f_0$ と作用素を用いてあらわす。そして

$$(S_t a)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (U_t f_0)(x, \xi)\, d\xi, \quad f_0(x, \xi) = F(a(x), \xi)$$

という非線形作用素 S_t を導入する。すると $u^{\delta}(x, t)$ は

$$u^\delta(x,t) = (S_\tau \overbrace{S_\delta \cdots S_\delta}^{j\text{個}} u_0)(x) \qquad j\delta \le t < (j+1)\delta$$
$$\tau = t - j\delta$$

とかける。 $U_t f_0(x,\xi) = f_0(x - \psi'(\xi)t, \xi)$ と陽にかけるから $u^\delta(x,t)$ も陽にかける。 $(\psi'(\xi) = (\psi^{1\prime}(\xi), \cdots, \psi^{n\prime}(\xi)))$

(M)の大域解は初期値がどんなに滑らかでも途中で衝撃波があらわれて滑らかでなくなることが一般にはあらわれる。[L2]をみよ。したがって大域解を考えるときは最初から弱解を考えるべきである。

v が (M) の弱解であるとは

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} [v\phi_t + \sum_{i=1}^n A^i(v)\,\phi_{x_i}]\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\phi(x,0)\,dx = 0$$

が任意の $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ に対して成立するときをいう。

結果を定式化するために BV 空間をつかう。これについては Giusti [G] がくわしい。 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ に対し

$$BV(\Omega) = \{ g \in L^1_{loc}(\Omega);\ \int_Q |g(x+he_i) - g(x)|\,dx \le C|h|,$$
$$Q \subset\subset \Omega,\quad e_i = (0, \overset{i}{1}, \cdot, 0),\quad C \text{はhによらぬ定数}$$

$\mathcal{J} = BV \cap L^\infty$ とおく。このとき主結果は次のとおりである。

定理1. 初期値 u_0 が $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ に属するとする。このとき $\{u^\delta\}_{\delta>0}$ は適当な部分列をとれば $\delta \to 0$ で $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ 上のある関数 u にほとんどすべての点で収束し、その極限関数 u は (M) の弱解である。さらにこのような u は $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ に属し、また各 t に対して $u(\cdot,t)$ は $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ に属す。」

この方法で構成された解は次のような比較定理がなりたつ。

定理2. 初期値 $u_0, v_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ に対応する近似解を u^δ, v^δ として、それぞれからつくられる解を u, v とする。このときもし $u_0(x) \geqq v_0(x)$ ならば

$$u(x,t) \geq v(x,t), \quad t \geqq 0,\ x \in \mathbb{R}^n$$

となる。特に u_0, v_0 の片方を定数としてとると

$$(\inf_x u)(t) \geq \inf u_0, \quad (\sup_x u)(t) \leq \sup_x u_0$$

がいえる。また初期条件の単調性にもよる。

すなわち $x\in\mathbb{R}^n$ $h>0$ において

$$u_0(x+he_i) \geq u_0(x)$$

ならば $u(x+he_i, t) \geq u(x, t)$ となる。

次に L^1 評価についてのべよう。

$M^i = \max\{|\varphi^{i\prime}(\xi)| \mid |\xi| \leq \|u_0\|_\infty\}$ $N^i = \max\{|\varphi^{i\prime}(\xi)| \mid |\xi| \leq \|u_0\|_\infty$ or $|\xi| \leqq \|v_0\|_\infty\}$

$M = (M^1, \cdots M^n)$, $r = (r^1 \cdots r^n)$ $N = (N^1, \cdots, N^n)$

$Q(r)$ 直方体 $= \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < r_i\}$ とする。

<u>定理3</u> $u_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ において

(i) $$\int_{Q(r)} |u(x, t)| dx \leq \int_{Q(r+Mt)} |u_0(x)| dx$$

(ii) $u_0, v_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ において

$$\int_{Q(r)} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq \int_{Q(r+N(t-s))} |u(x, s) - v(x, s)| dx \quad t \geq$$

$$\leq \int_{Q(r+Nt)} |u_0(x) - v_0(x)| dx$$

さらに $Q \subset\subset \mathbb{R}^n$ において

(iii) $u : [0, \infty) \to L^1(Q)$ は連続になる。

注. 現在までのところ、u がエントロピー条件をみたすかどうかはわからない。しかし、エントロピー条件をみたす解のもつ L^1 縮小性は 定理3(iii)によりもっている。著者達はエントロピー条件をみたすと予想している。

§ 鍵となる事実

u^s が BV空間で有界であること、また方程式の弱解に収束するということを示すのに基本的補題をのべる。

補題1. (比較定理) $a(x) \geq b(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ならば

$$(S_t a)(x) \geq (S_t b)(x) \quad \lrcorner$$

証明 $f_0(x,\xi) = F(a(x),\xi)$, $g_0(x,\xi) = F(b(x),\xi)$ とおく.

このとき

$$S_t a - S_t b = \int_{-\infty}^{\infty} (U_t f_0 - U_t g_0)\, d\xi$$

U_t 線型だから

$$= \int_{-\infty}^{\infty} U_t (f_0 - g_0)\, d\xi$$

Fの定義より $a(x) \geq b(x)$ ならば $(f_0 - g_0)(x,\xi) \geq 0$ $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}$

一方 $(U_t f_0)(x) = f_0(x - \varphi(\xi)t, \xi)$ (但し $\varphi(\xi) = (\varphi^1(\xi), \dots, \varphi^n(\xi))$)

$t \geq s$ であるから U_t は正化性をたもつ。よって

$$U_t(f_0 - g_0) \geq 0 \quad \text{となり}$$

結局 $S_t a - S_t b \geq 0$ となる。

次は、L^1 評価に対応する補題である。

<u>補題2.</u> a, b が $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $N=(N^1, \cdots N^n)$ $N^i=\sup\{|\varphi^i{}'(s)| \mid |s| \leq \|a\|_\infty \vee \cdots$

このとき

$$\int_{Q(r)} |S_t a - S_t b|\, dx \leq \int_{Q(r+Nt)} |a-b|\, dx$$

つまり S_t は L^1 縮小性をもつ。」

<u>証明.</u>

$$\int_{Q(r)} |S_t a - S_t b|\, dx = \int_{Q(r)} dx \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, U_t(f_0 - g_0) \right|$$

$$\leq \int_{Q(r)} dx \left(\int_{-\infty}^{\infty} |U_t(f_0-g_0)|\, d\xi \right) = \int_{Q(r)} \int_{-\infty}^{\infty} |U_t(f_0-g_0)|\, dx\, d\xi$$

U_tの定義より

$$\int_{Q(r)} |U_t f|\, dx\, d\xi \leq \int_{Q(r+Nt)} |f|\, dx\, d\xi$$ がいえる。

但し $|\xi| > \|a\|_\infty \vee \|b\|_\infty$ なる ξ については $f \equiv 0$ とする。

このような ξ については $f_0 - g_0 \equiv 0$ だから。

よって

$$\int_{Q(r)} |S_t a - S_t b|\, dx \leq \int_{Q(r+Nt)} \int_{-\infty}^{\infty} |f_0 - g_0|\, dx\, d\xi$$

$$= \int_{Q(r+Nt)} |a-b|\, dx \qquad \blacksquare$$

これをもとにして $\{u^\delta\}$ の有界性（BVでの）をいうのである。

全体を通じて証明は非常に初等的かつ短い。

References

[C-S] E. Conway and J. Smoller, Global solutions of the Cauchy problem for quasi-linear first-order equations in several space variables, Comm. Pure Appl. Math. 19(1966), 95-105.

[D] A. Douglis, Layering methods for nonlinear partial differential equations of first order, Ann. Inst. Fourier 22(1972), 141-227.

[G] E. Giusti, Minimal surfaces and functions of bounded variation, Notes on Pure Math. 10, Australian National Univ., Canberra, 1977.

[H] E. Hopf, The partial differential equation $u_t+uu_x=\mu u_{xx}$, Comm. Pure Appl. Math. 3(1950), 201-230.

[K] S. Kaniel, A kinetic model for a mono-atomic gas, Preprint.

[Kr] S. N. Kruzkov, First order quasilinear equations in several independend variables, Math. USSR-Sb. 10(1970), 217-243.

[L1] P. D. Lax, Hyperbolic systems of consevation laws II, Comm. Pure Appl. Math. 10(1957), 537-566.

[L2] P. D. Lax, Nonlinear hyperbolic systems of conservation laws, Nonlinear Problems, Univ. of Wisconsin, Madison, 1963, pp.3-12.

[O-T] S. Oharu and T. Takahashi, A convergence theorem of nonlinear semigroups and its application to first order quasilinear equations, J. Math. Soc. Japan, 26(1974), 124-160.

[O] O. A. Oleinik, Discontinuous solutions of non-linear differential equations, Amer. Math. Soc. Transl. (2)33(1963), 95-172.

[C] M. G. Crandall, The semigroup approach to first order quasi-linear equations in several variables, Israel J. Math. 12 (1972), 108-132.