第28回実函数論 第27回函数解析学 合同シンポジウム (弘前大学, 1989年7月)

作用素の純虚巾と放物型方程式の L^p 評価

北海道大理　儀我美一

時間発展のある偏微分方程式のうち，放物型方程式と呼ばれる重要なクラスがある。熱方程式，反応拡散方程式，Navier-Stokes 方程式等が代表的な例である。放物型方程式の解析を行うための，基本的道具のひとつは，方程式が線型の場合の初期値問題の一意解の構成と評価である。これを導く方法は方程式を関数空間 X に値をとる関数 $u(t)$ についての常微分方程式

(1) $\quad \dfrac{du}{dt} + Au = f \quad , \quad u(0) = a$

とみて，作用素 A の性質から解を構成する半群論と呼ばれる関数解析的手法と 直接，方程式を解析する偏微分方程式論的手法に大別される。放物型方程式については 1960年代までに，吉田，加藤，田辺，Sobolevski らにより，正則半群論として十分整備された。それでも偏微分方程式論でわかるものがすべて翻訳できるわけではなかった。

例えば 熱方程式の n次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ での初期値問題

(2) $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad , t>0 \quad ; \quad u(x,0) = a(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$

を考えよう。(2)の解は、空間無限大での増大度条件，例えば有界性を仮定すれば唯一であり，$u(t)=u(\cdot,t)$ とかくと形式的には

(3) $$u(t) = e^{t\Delta}a + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(s)\,ds$$

と表わされる。ここで

$$(e^{t\Delta}g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e(t, x-y)\, g(y)\, dy$$

で $e(t,x)$ は Gauß 核 $(4\pi t)^{-n/2}\exp(-|x|^2/4t)$ である。簡単なため $a=0$ とする。このとき表示(3)に特異積分作用素の L^p 理論をつかうと (2)の解についての(但し $a=0$ とした場合)次の L^p 評価が得られる。$g(x)$ の $L^p(\mathbb{R}^n)$ でのノルムを $\|g\|_p$ と書こう。このとき

(4) $$\int_0^T \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_p^p(t)\,dt + \int_0^T \|\Delta u\|_p^p(t)\,dt \le C\int_0^T \|f\|_p^p(t)\,dt, \quad 1<p<\infty$$

が成立するような n と p にのみ依る定数 $C=C(n,p)$ が存在する。この評価は u のなめらかさの評価とともに，C が T によらないことから u の $t\to\infty$ での減衰の様子を記述している。この評価(4)は従来の正則半群の一般論からは導けないものであった。

ところが数年前，Dore と Venni [5] により，Banach 空間 X についてのある種の凸性の仮定と，作用素 A の純虚巾についての条件をつければ，(1)の解について(但し $a=0$ とする) (4)と似た評価

(5) $$\int_0^T \left\|\frac{du}{dt}\right\|_X^p(t)\,dt + \int_0^T \|Au\|_X^p(t)\,dt \le C\int_0^T \|f\|_X^p(t)\,dt, \quad 1<p<\infty$$

が成立することを A が有界な逆 A^{-1} をもつときに示した。(2)のように空間領域 $\mathbb{R}^n$ が非有界の時は (2)を(1)のように定式化したときの A が有界の逆をもたない場合にあたるので、(4)をだすには、彼らの結果では不十分であった。この点は著者と Sohr [9] により改良され、A^{-1} の有界性は本質的な仮定でないことがわかった。

さて(5)と(4)とみくらべると(5)では X を $q \neq p$ となる $L^q(\mathbb{R}^n)$ $(1<q<\infty)$ととれるので、より一般の評価 (L^q-L^p 評価)

$$(6) \qquad \int_0^T \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_q^p(t)\,dt + \int_0^T \|\Delta u\|_q^p(t)\,dt \leq C\int_0^T \|f\|_q^p(t)\,dt$$

が(5)で $A=-\Delta$ とすると、得られる。但し u は、ここでは(2)の $a=0$ とした時の解である。もちろん(6)は、解の表示(3)を直接評価していくことによってもえられるのではあるが Navier-Stokes 方程式を線型化した Stokes 方程式を $\mathbb{R}^n$ の領域で考えた問題に対しては、(6)に対応する評価は、従来にない新しいものである。これから、Navier-Stokes 方程式の外部領域での弱解の時間無限大での解の挙動等の有用な結果を導くことができる。[9] 以下では、正則性理論における上述の発展についての概説を試みる。

§1. 有界な純虚巾をもつ閉作用素

Banach 空間 X の閉線型作用素 A に対して、負実数が A のレゾルベント集合にはいり、さらに

$$\{t(t+A)^{-1};\ t>0\}$$

が X の有界作用素全体 $\mathcal{L}(X)$ の中で有界のとき A を非負という。非負作用素については、勝手な複素数 z に対して A の巾 A^z

が自然に定義できる[10]。次に定義域 $D(A)$, 値域 $R(A)$ ともに X で稠密で、かつ A の純虚巾 A^{is} が X の有界作用素で、しかも $K\geq 1$, $\theta\geq 0$ に対して

$$\|A^{is}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K e^{\theta|s|}$$

がすべての実数 s について成立するとき、$A\in \mathcal{E}_K^\theta(X)$ とかくことにする。この $\mathcal{E}_K^\theta(X)$ が以下の議論で重要な作用素の族である。

例1. Hilbert空間 X の非負自己共役作用素 A で 0 が点スペクトルでないとき $A\in\mathcal{E}_1^0(X)$ となる。これはスペクトル分解よりすぐわかる。

例2. Ω を $\mathbb{R}^n$ の境界なめらかな領域とし、$X=L^p(\Omega)$ とする。$(1<p<\infty)$
A を $-\Delta$ (Laplacian) に Dirichlet 条件をつけた作用素、つまり

$$A=-\Delta,\quad D(A)=\left\{w\in L^p(\Omega),\ \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}w\in L^p(\Omega);\ w\big|_{\partial\Omega}=0\right\}\quad 1\leq i,j\leq n$$

Ω を有界領域又は $\mathbb{R}^n$ とすると任意の $\theta>0$ に対して $A\in\mathcal{E}_K^\theta(X)$ となる K が存在する[6]。同様な結果はより一般の楕円型作用素に一般化される[12]。

例3. A を $X=L^p_\sigma(\Omega)$ での Stokes 作用素とすると任意の $\theta>0$ に対して $A\in\mathcal{E}_K^\theta(X)$ となる K が存在する。但し Ω は有界領域[7]、外部領域 $(n\geq 3)$[8]、又は $\mathbb{R}^n$ それ自身とする。
ここで $L^p_\sigma(\Omega)=\{u\in(L^p(\Omega))^n;\ \operatorname{div}u=0,\ u\cdot\nu|_{\partial\Omega}=0\}$. 但し ν は $\partial\Omega$ の外向き法線ベクトル(長さ1)で p は $1<p<\infty$ とする。

ここで $A\in\mathcal{E}_K^\theta(X)$ が $\theta<\pi/2$ で成立すれば $-A$ は正則半群を生成することに注意しておく[11]。

§2. ζ-凸 Banach空間

さて 勝手なBanach空間 X に対しては 方程式(1) ($a=0$とする)の解に対しての評価(5)は、$-A$ が 正則半群を生成するとしても一般には 正しくない。そこで、Banach空間のうち ある種の凸性をもったものを考えることにする。

Banach空間 X が <u>ζ-凸</u> であるとは 次の性質をもつ $\zeta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在するときをいう。

(i) ζ は両変数に対して対称、つまり $\zeta(x, y) = \zeta(y, x)$

(ii) $\zeta(x, \cdot)$, $\zeta(\cdot, y)$ は X 上の凸関数

(iii) $\zeta(0, 0) > 0$

(iv) $\|x\| \leq 1 \leq \|y\|$ ならば $\zeta(x, y) \leq \|x + y\|$.

<u>例</u> Hilbert空間は ζ-凸 である。実際、$\zeta(x, y) = 1 + \mathrm{Re}(x, y)$ とすると、(i)(ii)(iii)は明らか。また $(\zeta(x, y))^2 = 1 + 2\mathrm{Re}(x, y) + (\mathrm{Re}(x, y))^2 \leq 1 + 2\mathrm{Re}(x, y) + \|x\|^2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + (1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)$ より(iv)も明らか。

ζ-凸 Banach空間の基本的性質を述べよう。詳細については [3, 4, 5] や それに引用されている文献を参照せよ。まず Hilbert空間の内積からノルムが自然にきまるように ζ より、X のノルムがきまる。このノルムは X のもとのノルムと同値である。よって ζ-凸性は Banach空間の同型によりかわらない概念である。また、

(i) X が ζ-凸、Y が X の閉部分空間 $\Rightarrow$ Y も ζ-凸

(ii) X, Y が ζ-凸 $\Rightarrow$ $X \times Y$ が ζ-凸

は易しい。また

(iii) X が ζ-凸 $\Rightarrow$ $L^p(\Omega, X)$ (Xに値をとるΩ上のL^p関数全体) も $1<p<\infty$ ならば ζ-凸。　Hilbert空間 $\mathbb{R}$ は ζ-凸より，特に $L^p(\Omega)$ は ζ-凸。

これと(i), (ii)より Sobolev空間 $W^{1,p}(\Omega) = \{ f \in L^p(\Omega) ; \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^p(\Omega) \} \subset L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ も ζ-凸になる。もちろん $1<p<\infty$ である。また例3にでてきた $L^p_\alpha(\Omega)$ も ζ-凸である。その他

(iv) X, Y が ζ-凸 かつ $X \supset Y$ $\Rightarrow$ X/Y も ζ-凸

(v) X, Y が ζ-凸 $\Rightarrow$

実補間空間 $(X, Y)_{\theta, p}$ $(1<p<\infty)$，複素補間空間 $[X, Y]_\theta$ も ζ-凸になる。

が知られている。また ζ-凸性は一様凸性より本当に強い性質であることもわかっている。

ζ-凸空間での解析を行うには次の特徴づけが重要である。$f \in L^p(\mathbb{R}, X)$ に対して その Hilbert変換 Hf を

$$(Hf)(s) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (H_\varepsilon f)(s), \quad (H_\varepsilon f)(s) = \frac{1}{\pi} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{f(s-t)}{t} dt$$

とする。lim は X の強位相での収束を意味する。但し $1 \leq p < \infty$。

Banach空間 X が <u>有界Hilbert変換型</u> であるとは

(イ) $(Hf)(s)$ が ほとんどすべての $s \in \mathbb{R}$ で存在し

$1<p<\infty$ ならば ある定数 $C = C(p, X)$ があって

$$\| Hf \|_{L^p(\mathbb{R}, X)} \leq C \| f \|_{L^p(\mathbb{R}, X)}$$

がすべての $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$ に対して成立するときをいう。

定理1. X が有界Hilbert変換型であるためには. ζ-凸であることが必要十分である。

十分性は Burkholder [3] により. 必要性は Bourgain [1] による。いずれも. ζ-凸という条件を X に値をとる $[0,1]$ 区間上のマルチンゲールの性質になおし. それと. 有界Hilbert変換型との関係をしらべている.

もう少しきちんとのべよう。$L^1(0,1;X)$ の点列 $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が マルチンゲール であるとは. その階差列 $d = \{d_k\}$ ($f_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$ で定義) について

$$\int_0^1 d_{n+1}(t)\,\varphi(d_1(t), \ldots d_n(t))\,dt = 0$$

がすべての有界連続関数 $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{n} \to \mathbb{R}$ について成立するときをいう。X が UMD (unconditionality property of martingale differences) であるとは. $L^1(0,1;X)$ の. マルチンゲール f の階差列 d と数列 $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ に対してつくった新しいマルチンゲール $g = \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k d_k$$

に対して定数 $C = C(p, X)$ があって

$$\|g\|_{L^p} \le C\,\|f\|_{L^p}$$

となるときをいう。但し $1 < p < \infty$ である。

定理2. X が ζ-凸であることとUMDであること

は同値である。

これは Burkholder による。(cf.[4]) 定理1は ζ-凸性を UMD という条件におきかえて証明される。

§3. 基本定理と初期値問題への応用

まず、ふたつの非負作用素の和についての結果をのべよう。X の非負作用素 A, B に対し

$$(t+A)^{-1}(t+B)^{-1} = (t+B)^{-1}(t+A)^{-1} \qquad t>0$$

が成立するとき、A, B が可換であるということにする。A が非負で $R(A)$ が X で稠密のとき A は1対1ではあるが、一般には A^{-1} の有界性はないので、$D(A)\cap D(B)$ を X の外に次のようにふくらましておくと便利である。A, B を非負かつ $R(A), R(B)$ を X で稠密とすると $\|Av\|+\|Bv\|$ は $D(A)\cap D(B)$ のノルムになる。このノルムによる $D(A)\cap D(B)$ の完備化を $\hat{D}(A+B)$ とかく。$A+B$ は $\hat{D}(A+B)$ 上に自然に拡張される。また $\hat{D}(A+B)$ は一般には X にふくまれない。

定理3. X を ζ-凸の Banach 空間とする。$A \in \mathcal{E}^{\theta}_{K}(X)$, $B \in \mathcal{E}^{\sigma}_{K}(X)$ が可換とする。もし $\sigma+\theta<\pi$ であれば $A+B : \hat{D}(A+B) \longrightarrow X$ は全単射で有界な逆をもつ。つまり $f\in X$ に対し $(A+B)v=f$ となる $v\in\hat{D}(A+B)$ の元が唯一存在し

$$\|Av\|+\|Bv\| \leq C\|f\|$$

をみたす f によらない定数 C が存在する。さらに $C=C(\theta,\sigma,K,X)$.

この定理は A, B が有界な逆をもつとき Dore・Venni [5] に

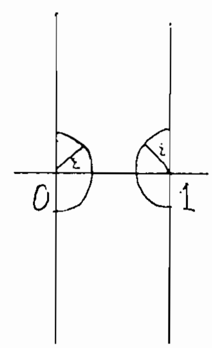
より最初に証明された。その後，その方法は A, B が　有界の逆をもたない場合も工夫すれば使えることがわかり，定理3が示せた。[9] 別証明が [11] に与えられている。[11] ではさらに $\sigma \neq \theta$ ならば $A+B \in \mathcal{E}^{\rho}_{K'}(X)$ がいえることも示している。但し $\rho = \max(\sigma, \theta)$ とした。[5, 9] における基本的な考え方は

$$S = \frac{1}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{A^{-z} B^{z-1}}{\sin \pi z} dz \qquad 0 < c < 1$$

が $A+B$ の逆になっていることを示す というものである。$\theta + \sigma < \pi$ は

$$\frac{\| A^{-is} B^{is} \|_{\mathcal{L}(X)}}{|\sin \pi i s|} \leq e^{(\theta+\sigma)|s|} e^{-\pi |s|} = e^{-\delta |s|} \quad , \delta > 0$$

より S の"被積分関数"が虚軸方向に可積分になっていることにつかわれる。積分路を $c=0$, $c=1$ の方向にずらすのであるが 0, 1 で $\frac{1}{\sin \pi z}$ は極をもつので，積分路を図のように極をさけるようにする。$\varepsilon \downarrow 0$ の極限操作のときに，性質(7)が必要になる。



Dore-Venni [5] に従って初期値問題(1)に定理3を適用しよう。

定理4 X を ζ-凸 Banach空間とする。$A \in \mathcal{E}^{\theta}_{K}(X)$ で $\theta < \pi/2$ とする。このとき初期値問題(1)（但し $a=0$ とする）は $f \in L^p(0,T; X)$ に対して唯ひとつ次の評価をみたす解 u が存在する。但し $1<p<\infty$。

$$\int_0^T \left\|\frac{du}{dt}\right\|^p_X (t) dt + \int_0^T \| A u \|^p_X (t) dt \leq C \int_0^T \| f \|^p_X (t) dt$$

ここで $C = C(p, \theta, K, X)$ で f や T によらない。また $T<\infty$ ならば $u \in L^p(0,T; D(A))$,　　$u \in L^p(0,\infty; \hat{D}(A))$ となる。

定理3を X, A, B を以下のようにとって適用すれば定理4がえられる。

$$\mathcal{X} := L^p(0,T;X), \quad D(\mathcal{A}) := L^p(0,T;D(A))$$
$$(\mathcal{A}u)(t) := A(u(t)) \quad 0 \le t \le T$$
$$D(\mathcal{B}) := \{ f \in L^p(0,T;X),\ \frac{df}{dt} \in L^p(0,T;X),\ f(0)=0 \}$$
$$\mathcal{B}f := \frac{d}{dt}f, \quad f \in D(\mathcal{B}).$$

$\mathcal{B}$ については、純虚巾 $\mathcal{B}^{is}$ を Riemann-Liouville 積分

$$\mathcal{B}^{is}f = \frac{1}{\Gamma(-is)} t_+^{-is} * f \quad , \quad t_+ = \max(t,0)$$

で表わし評価することにより $\mathcal{B} \in \mathcal{E}_K^{\alpha}(\mathcal{X})$ が $\alpha > \pi/2$ なるすべての α についていえる。定理3の他の仮定を調べるのは容易である。

§4. Stokes方程式の $L^q - L^p$ 評価

A を例2の Laplace 作用素とし $X = L^q(\mathbb{R}^n)$ とすると、X が ζ-凸であることより定理4がつかえ、$L^q - L^p$ 評価 (6) が得られる。同様に定理4も Stokes 作用素 (例3) に使うと、この L^q-L^p 評価は、Ω も有界としても外部領域としても Solonnikov [13] の L^p 評価を深めたものになっている。このような評価は Navier-Stokes 方程式への応用上重要であり詳しくは $u(0) \ne 0$ の場合もこめて [9] で述べる予定である。ここではその一例をあげるにとどめよう。

<u>定理5.</u> Ω を $\mathbb{R}^n$ $(n \ge 3)$ の外部領域で境界は滑らかとする。u, p, f が次の Stokes 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \mathrm{grad}\, p = f, \quad \mathrm{div}\, u = 0$$

の $\Omega \times (0, \infty)$ の弱解で $u(x,0)=0$ かつ $\partial\Omega$ 上 $u=0$ とする.
今 $u(\cdot, t) \in L^q(\Omega)$ であれば

$$(8) \quad \int_0^T \left\|\frac{du}{dt}\right\|_q^p(t)\,dt + \int_0^T \|Au\|_q^p(t)\,dt \leq C\int_0^T \|f\|_q^p(t)\,dt$$

ここで A は $L^q_\sigma(\Omega)$ の Stokes作用素で $1<p, q<\infty$.
定数 $C = C(p, q, n, \Omega)$ である.

もし $1<q<n/2$ なら [13] より $C\|Au\|_q \geq \|\nabla^2 u\|_q$ † $C = C(q, n) > 0$ がでるので (8) より，よりわかりやすい L^q-L^p 評価を得る。

$$(9) \quad \int_0^T \left\|\frac{du}{dt}\right\|_q^p(t)\,dt + \int_0^T \|\nabla^2 u\|_q^p(t)\,dt \leq C\int_0^T \|f\|_q^p(t)\,dt$$

また，C が T によってもよいのなら $1<q<\infty$ とできることにも注意しておこう。Solonnikov は (9) を $p=q$ とし，また C が T によっている場合の評価を偏微分方程式論的方法により導いている [13]。C が T によらない評価 (8), (9) は $p=q$ としても従来わかっていなかったものである。

この評価 (8), (9) により Navier-Stokes 方程式の弱解の圧力 p の評価，また速度場 u の $t\to\infty$ での減衰について調べることができる。u の減衰については異なる立場からはよく調べられている [2].

† $\|\nabla^2 u\|_q = \sum_{1\leq i,j\leq n} \left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u\right\|_{L^q(\Omega)}$

文献

1. J. Bourgain, Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional, Ark. Mat 21 (1983) 163–168.

2. W. Borchers and T. Miyakawa, L^2 decay for the Navier–Stokes flow in halfspaces, Math. Ann. 282 (1988) 139–155.

3. D.L. Burkholder, A geometric condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach-space-valued functions, In: Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund (Chicago 1981) pp. 270–286, Belmont: Wadsworth 1983.

4. D.L. Burkholder, Martingales and Fourier analysis in Banach spaces, In: Probability and analysis (Varenna 1985) pp. 61–108: Lect. Notes Math. 1206 Berlin Heidelberg New York: Springer 1986.

5. G. Dore and A. Venni, On the closedness of the sum of two closed operators, Math. Z. 196 (1987) 189–201.

6. D Fujiwara, On the asymptotic behavior of the Green operators for elliptic boundary value problems and the pure imaginary powers of some second order operators, J. Fac. Sci Univ. Tokyo Sect. IA 24 (1977) 685–700.

7. Y. Giga, Domais of fractional powers of the Stokes operator in L_r spaces, Arch. Rational Mech. Anal 89 (1985) 251–265

8. Y. Giga and H. Sohr, On the Stokes operator in exterior domains, J Fac. Sci. Univ Tokyo Sect IA 36 (1989) 103–130

9. Y. Giga and H. Sohr, Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier–Stokes equations in exterior domains, in preparation.

10. H. Komatsu, Fractional powers of operators, Pacific J. Math. 19 (1966), 285–346.

11. J. Prüss and H. Sohr, On operators with bounded imaginary powers in Banach spaces, preprint

12. R. Seeley, Norms and domains of the complex powers A_B^z, Amer. J. Math. 93 (1971) 299–309.

13. V. A. Solonnikov, Estimates for solutions of nonstationary Navier–Stokes equations, J Soviet Math 8 (1977) 467–523