1986年4月 日本数学会 特別講演（函数解析分科会）原稿

特II. 半線型熱方程式の解の爆発をめぐって

儀我美一　名大理

次の半線型熱方程式の初期値－境界値問題を $\mathbb{R}^n$ の有界領域 Ω で考えよう。

$$u_t - \Delta u - u^p = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0$$

ここで $p>1$ とし，$u_0(x)$ は十分滑らかとしよう。この方程式の特徴は，自己増殖効果 u^p と拡散効果 Δu が競合することにある。解の存在・非存在の立場からみると，大域解が存在しない半線型拡散方程式のもっとも簡単な例になっている。すなわち $u_0(x)=\gamma\varphi(x)$, $\gamma>0$, $\varphi\not\equiv 0$ としたとき γ が十分大きければ，ある有限時刻 T があって，局所解がそれ以上古典解として延長できなくなる。より詳しくは，$\lim_{t\to T}\sup_x u(x,t)=\infty$，つまり解の L^∞ ノルムが時刻 T で爆発するのである。この T のことを，爆発時刻という。

爆発の存在は従来より知られているが，爆発の様子についてはごく最近になって注目を集めるようにな

った。ここでは、ひとつの定量的表現として、どのようなノルムが、爆発するかということに焦点をあててみよう。L^∞ノルムやL^qノルムでqが十分大きいものは$t\to T$で無限大になり、ある関数で下から評価されている。

命題1　tによらない定数$C>0$があって

(i)　$\|u\|_{L^\infty}(t) \geq C/(T-t)^{\frac{1}{p-1}}$

(ii)　$\|u\|_{L^q}(t) \geq C/(T-t)^{\frac{1}{p-1}-\frac{n}{2q}}$

但し$q>\max(n(p-1)/2, 1)$とする。

これらは局所存在定理より従う。例えば$\|u\|_{L^\infty}$が爆発時刻付近であまりに小さければ局所存在定理よりTをこえて延長できて矛盾という精神で(i)がいえる。詳しくは[W1][G1]を参照せよ。

さてL^rノルムで$r<n(p-1)/2$なるものは爆発するであろうか。以後特別な場合に限定して考える。まずΩを半径Rで原点を中心とする球$B(R)$とする。$u_0(x)$を$r=|x|$のみによる関数とし$\frac{\partial u_0}{\partial r}<0$かつ$u|_{\partial B(R)}=0$を仮定する。このとき解の爆発は原点で先におこりそうな気がするが、その予想は実際正しくWeissler [W2]により特別な場合示され後にFriedman-McLeod [FM]により一般化された。[MW]も参照のこと。以下の命題は[FM]に従う。

命題2 (i) ある定数 $M=M(\delta)$ が存在して

$$u(x,t) \leq M/|x|^{\delta}, \quad \delta > \frac{2}{p-1}, \quad t<T$$

(ii) 特に爆発は原点でのみおこる。(single point blow-up)

$$\overline{\lim}_{t\to T} u(x,t) < \infty, \quad x \neq 0.$$

(iii) (i)より特に $r < n(p-1)/2$ ならば $\sup_{t<T} \|u\|_{L^r}(t) < \infty$

後に(ii)の結果は[FG]により若干の系にまで拡張された。

次に問題になるのは、境い目の $L^{\frac{n(p-1)}{2}}$ ノルムがどうなるかとか

$$u(x,t) \leq M/|x|^{\frac{2}{p-1}} \qquad (*)$$

という評価をみたすかということである。$L^{\frac{n(p-1)}{2}}$ ノルムについては Weissler [W3] が L^p エネルギーを使って $u_t>0$ の仮定のもとに爆発をしめしている。しかしこれでは $(*)$ がなりたつかどうかの答にならない。ここでは爆発点における解の漸近挙動の結果[GK1][GK2]を使って $(*)$ の不可能性をいう。

補題[GK2] 次の収束は $y\in\mathbb{R}^n$ について広義一様収束である。

$$\lim_{t\to T} u(y\sqrt{T-t}, t)(T-t)^{\frac{1}{p-1}} = k \text{ または } 0, \qquad k=\left(\frac{1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

但し $(n-2)p < n+2$ である。

証明は Pohozaev 型の恒等式の駆使にあり Ω は星型でありさえすればよい。結果は放物型座標で爆発のようすをみれば $u(x,t) \sim \frac{k}{(T-t)^{1/(p-1)}}$ と常微分の解のようになっていると解される。極限がゼ

になるのは原点が爆発点でないことをあらわしていると予想されるが証明はない。また $(n-2)p > n+2$ のときは、何もわかっていない。

この補題を使うと(*)の不可能性がいえる。まずローレンツ空間の定義からはじめよう。$f \in L^{q,\infty}(\Omega)$ とは

$$\|f\|_{L^{q,\infty}} = \sup_{\sigma>0} \sigma \left[\mathrm{measure}\{x \in \Omega;\ |f(x)| > \sigma\}\right]^{\frac{1}{q}}$$

が有限のときをいう。すぐわかるように $\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^{2,\infty}(0,1)$ だが $\frac{1}{\sqrt{x}} \notin L^2(0,1)$。同様に $\frac{1}{|x|^{\frac{2}{p-1}}} \in L^{\frac{n(p-1)}{2},\infty}(B(R))$ だが $\frac{1}{|x|^{\frac{2}{p-1}}} \notin L^{\frac{n(p-1)}{2}}(B(R))$.

定理 (G-Kohn) <u>もし</u> $(n-2)p < n+2$ <u>であれば</u>

(i) $$\lim_{t \to T} \|u\|_{L^{\frac{n(p-1)}{2},\infty}}(t) = \infty$$

(ii) $$\lim_{t \to T} \|u\|_{L^{q,\infty}}(t)\,(T-t)^{\frac{1}{p-1}-\frac{n}{2q}} = \infty,\quad q > \frac{n(p-1)}{2}$$

(iii) <u>特に(i)より</u> (*) <u>という評価は不可能</u>

証明の要領は次のとおり。命題1(i)より補題で極限がゼロということがありえなくなる。あとは、ただ[illegible]の量の $L^{q,\infty}$ ノルムを計算すればよい。定数 $k \notin L^{q,\infty}(R^n)$ に注意すれば容易である。

以上により最初にあげたノルムの爆発状況について特別な場合は示せた。一般にどこまでわかるかは例えば補題の除去可能特異性（極限がゼロのとき）がいえるかどうかにかかってきておもしろい。

爆発する量の上からの評価は最近注目されている。例えば命題1(ii)の逆の型の不等式が $(n-2)p < n+2$ のときは成り立つ[GK2]。もっとも $u_t > 0$ を仮定すれば p の制限はいらない[FM]。この問題は[GK2]流に similarity variables でかくと発展方程式の大域解の有界性[G3]と結びついている。命題1(ii)の逆向き不等式は定理(ii)より不可能である。ただ $(n-2)p > n+2$ のときは、わからないことが多く、爆発時のノルムについて

$$\sup_{t<T} \|u\|_{L^{n(p-1)/2}} < \infty$$

かという問題はおもしろい。この問題は自己相似解の分類問題に関係していることに注意しよう[G2, G4]。なお非線形項の一般化については[GK2]で少し試みられている。他の問題との関係、背景についても[GK2]あるいは[G2]を参照されたい。かなりの文献があつめられている。

References

[FM] A. Friedman and B. Mcleod, Blowup of positive solution of semilinear heat equations, Indiana Univ. Math. J. 34(198 425-447.

[FG] A. Friedman and Y. Giga, A single point blow-up for solutions of semilinear parabolic system, preprint.

[G1] Y. Giga, Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system, J. Diff. Eq., to appear.

[G2] Y. Giga, Self-similar solutions for semilinear parabolic equations, to appear in Proc. 1984 Summer Seminar in Applied Mathematics, Santa Fe, New Mexico.

[G3] Y. Giga, A bound for global solutions of semilinear heat equations, Comm. Math. Phys., in press.

[G4] Y. Giga, On elliptic equations related to self-similar solutions for nonlinear heat equations, Hiroshima Math. J., to appear.

[GK1] Y. Giga and R.V. Kohn, Asymptoitcally self -similar blowup of semilinear heat equations, Comm. Pure Appl. Math., 38(1985) 297-319.

[GK2] Y. Giga and R.V.Kohn, Characterizing blow-up using similarity variables, submitted to Indiana Univ. Math. J.

[MW] C.E.Meuller and F.Weissler, Single point blow up for a general semilinear heat equation, Indiana Univ. Math. J. 34 (1985), to appear.

[W1] F.Weissler, Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation, Israel J. Math., 38(1981) 29-40.

[W2] F. Weissler, Single point blowup of semilinear initial value problem, J. Diff. Eq. 55(1984) 204-224.

[W3] F. Weissler, L^p-energy and blow-up for a semilinear heat equation, Proc. AMS Summer Inst.(1983), to appear.