巽友正編, 乱流現象の弱解と制御, 特定研究領域報告集, p.94-100, 1982.

二次元非圧縮性粘性流体と完全流体の非定常問題

名大理・数学　儀　我　美　一

流体力学の基礎方程式であるNavier-Stokes方程式は

$$(\mathrm{NS})\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0 \\ &\operatorname{div} u = 0 \end{aligned}$$

とかける。ここでνは粘性係数である。この$\nu = 0$とした方程式

$$(\mathrm{E})\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0 \\ &\operatorname{div} u = 0 \end{aligned}$$

はEuler方程式とよばれている。上記の問題は非定常問題なので，初期速度を与える必要がある。即ち

$$u(x, 0) = a(x)$$

としよう。また境界のある領域の内部で考えるときは当然境界条件を必要とする。(NS)の場合はふつう粘着条件，すなわち

境界上：$u(x, t) = 0$

をつける。これに対して(E)に対しては

境界上：$u \cdot n = 0$

を要求する。ここでnは境界上の法線ベクトルである。全空間で考える場合は$|x| \to \infty$のとき

$$u(x, t) \to 0$$

を要求する。即ち無限遠で速度を0とする。

本稿では(NS)および(E)の解の存在に関して数学で証明されていることを紹介し，あわせて2種類の方程式の解の関係についてのべる。数学者以外の人々，実験の人にもわかっていただけるように配慮してあるために，本文の記述は数学的厳密ではない。数学の言葉で厳密に定理の形で書くと付録のようになる。興味のある方は，それらの方も参照されたい。

本文をよむにあたって読者は次のことに注目してほしい。

1）2次元と3次元では(NS)の解の存在についてどのような差があるか。

2）2次元と3次元では(E)の解の存在についてどのような差があるか。

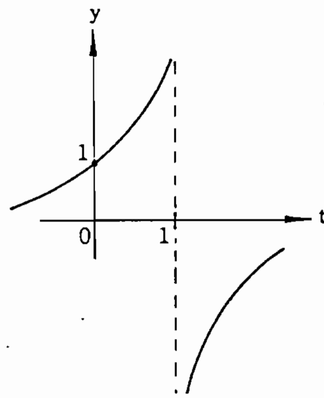
3）1)2)のちがいをひきおこす原因は(NS)と(E)とで同じであろうか。

§1. (NS)の解の存在

"解の存在"という言葉はおそらく数学に特有な言葉づかいとおもわれるので，何を意味するか以下のべておこう。次の常微分方程式の初期値問題を考えよう。

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = (y(t))^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

変数分離ですぐにとけて $y(t) = \dfrac{1}{1-t}$ となる。そのグラフは



となる。t が1より小さいときには確かにふつうの意味で解がある。こういうことを局所解があるという。

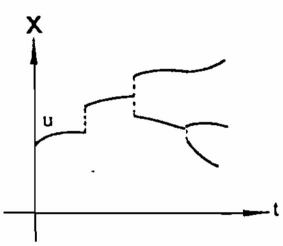
「任意の(正規)常微分方程式の初期値問題が局所解をもつ」という定理がいわゆる常微分方程式の解の存在定理である。さて上の $y(t)$ は t が1に近づくにつれて大きくなり，$t=1$ では"爆発"してしまう。したがってふつうの意味ではこれ以上解はのばせない。このような時，大域解がないという。(ふつうの意味とは，たとえば連続につながっているという意味にとればよい。) $t>1$ にある部分のグラフをこじつけることは数学的にはいろいろできる。(物理学者，実験学者はどう考えるのでしょうか。)

さて，いよいよ(NS)について考えてみよう。$u=u(x,t)$ はある時間の速度場を与えているとみることができる。そこで速度場の空間を $\mathbf{X}$ とすると $u(x,t)$ は

$$t \longmapsto u(x,t) \in \mathbf{X}$$

という $\mathbf{X}$ の中の道を与えると考えられる。

問題は"(NS)をみたす解 $u(x,t)$ が(時間)局所的また大域的に存在するか"ということになる。この問題は1930年代にLerayによって取りくまれてから多くの数学者がとりくんできた。このいきさつに対してはLadyzhenskaya[5]やTemam[7]をみるとよい。この種の問題の質的部分は境界のあるなしにかかわらず同じなので特にことわらない。まず解としてつくられたのがLeray-Hopfの解である。この解は，大域的ではあるが，2次元の場合をのぞいて t についてなめらかかどうか(連続かすら)わかっていない。



つまり現在までのところ解の一意性もわかっていないから，左の図のようなことも可能性としてありえるのである。(もちろん左のようになっていることが示されたわけではない。) なお，局所的にはなめらかな解が存在することが示されている。例えば先の本やKato-Fujita[3]をみよ。最新の状況についてはGiga-Miyakawa[1]をみよ。(初期値が小ならば大域的になめらかな解があることはしられている。)

さて，Leray-Hopfの解は t についてなめらかかどうかわからぬため弱解といわれているが，この弱解の存在を示すのに本質的なことは何であろうか。それはGalerkin法で，そのときエネルギー評価

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2(t)+\nu\|\nabla u\|^2(t)=0 \qquad \begin{array}{l}\|u\|^2 : \text{エネルギー}\\ \|\nabla u\|^2 : \text{エンストロピー}\end{array}$$

が本質的な役割を演じる。(但し $\|f\|^2=\int|f(x)|^2\,dx$) これを説明するのは簡単なので以下にのべる。(NS)の上の式の両辺に u をかけて x 方向積分する。このとき

$$\int(u\cdot\nabla)u\,dx=0$$

が $\mathrm{div}\ u=0$ と Green の公式より従う。また $\|\nabla u\|^2=-\int u\Delta u\,dx$ も Green の公式よりわかるので上のエネルギー評価がえられる。

2次元では非線型項 $(u\nabla)u$ よりもエネルギー評価の方が強いので，弱解が大域的になめらかになる。これに対し3次元の場合はエネルギー評価が，非線型項をおさえられるほど強力ではないために，大域的になめらかになることが証明されていないのである。エネルギー評価より強力な評価があれば，証明できるかもしれない。

これらの証明を通じて(NS)が"放物型"つまり散逸項があるということが積極的にもちいられていることに注意しよう。このことは(NS)の証明をまねても(E)の方の解の存在がいえないということを示唆している。

次節でのべる(E)の場合には渦度というものを積極的に用いるが，(NS)のときは用いていないことにも注意すべきである。

§2. (E)の解の存在

Euler 方程式は粘性項がないので，方程式のみかけは(NS)よりやさしくみえるが，取り扱いはより困難になる。我々はもちろん渦度 $\omega=\mathrm{rot}\ u$ がある場合を考える。(NS)と同じ問題を設定するとき注意すべきことは(NS)では初期速度にあまりなめらかさを必要としないが，(E)では初期速度は最低一回は微分できないとこまる。これは(NS)が放物型で(E)が"双曲型"であることによる。

(E)の解の存在については3次元では時間局所的になめらかな解が存在することが示されている。(NS)とちがって大域的な弱解があるかどうかはしられていない。数学者が存在を保障している時間Tは初期渦度の最大値の逆数に比例することもわかっている。それから先のことについては何もわかっていない。この研究は1920年代 Lichtenstein と Гюнтера によってはじめられ，その後改良されてきた。

一方，2次元については Kato[2)] らによって大域的ななめらかな解の存在がしめされた。この証明には渦度 ω が，積極的に用いられている。以下，なぜ3次元では同じことができないのかということに注意しながら証明のあらすじを述べよう。まず渦度の方程式

a) $\qquad \dfrac{\partial\omega}{\partial t}+(u\cdot\nabla)\omega=0 \qquad\qquad \omega(x,\ 0)=\mathrm{rot}\ a(t)$

が(E)の両辺の rot をとることによってえられる。ここで2次元と3次元のちがいは vortex stretching の項 $(\omega\nabla)u$ が2次元の場合はないということである。一方，速度と渦度は

b) $\qquad \Delta u=\mathrm{rot}\ \omega$

でむすばれている。解の構成は次のようなiterationによる。

I)$_0$ $\omega_0(x, t) = \mathrm{rot}\, a(x)$ とおいてb)を $\omega = \omega_0$ としてといてその解を $u_0(x, t)$ とする。(つまり $\Delta u_0 = \mathrm{rot}\, \omega_0$)

II)$_0$ a)の式の u を u_0 として a)をといた解 ω を $\omega_1(x, t)$ とする。

I)$_1$ b)で $\omega = \omega_1$ として u を求めて $u_1(x, t)$ とする。

II)$_1$ u_1 を a)の u に代入して ω をといて ω_2 とする。

…

以下これをくりかえして ω_n, ω_{n+1}, … をどんどんつくっていく。このとき $(\omega, \nabla)u$ なる項が a)にはいっていないということよりiterationをしていく過程で ω_n はどんどん性質がよくなってくる。数学的にいえば不動点定理がつかえる状況になっているのである。このようにして解が構成されるのである。

以上により(E)の解の存在について2次元と3次元のちがいがおわかりになったと思うが，この差は筆者にとって(NS)の2次元と3次元の差よりも大きいように思える。(NS)の場合は，非線型項とエネルギー評価の強弱関係であったのに(E)では $(\omega\nabla)u$ があるかないかということによっているからである。3次元の(NS)については初期速度が小ならば大域的になめらかな解があるが，(E)については，初期速度を小にとっても大域的ななめらかな解は期待できそうにない。§1の冒頭の例のようになっているのではないか？ と推測されるが，数学的には，はっきりしたことはいえていない。

(E)の解の存在について，最新の状況についてはKikuchi[4)]を参照されたい。

§3. (NS)と(E)の解の関係

(E)は(NS)で粘性を零としたものである。そこで(NS)の解は(E)の解に粘性を小にすると近づくかという問題が当然おこる。このような問題では境界があるかないかが本質的である。というのは，(NS)と(E)では境界条件がちがって，物理的にも境界付近では境界層というものができるということにより境界のある場合(NS)の解 u_ν が(E)の解 u_0 に近づくことが期待されないからである。(u_ν の ν は粘性係数によることを明示するためにつけたもの)数学的には境界のある場合については何も結果がない。

そこで，この節では境界のない場合に話を限定しよう。"$\nu \to 0$ のとき $u_\nu \to u_0$ となるか"という問題を考える。例によって，数学では近づくという意味を明確にする必要があり，ここでは空間については2乗可積分ノルムではかってやることにする。また時間については任意の有限時間で考えるかどうかの問題がある。

- L^2-ノルムでのちかづき方

$v_\nu = u_\nu - u_0$, $q_\nu = p_\nu - p_0$ とすると(NS)と(E)の式より

$$\frac{\partial v_\nu}{\partial t} + (u_\nu \nabla) v_\nu + (v_\nu \nabla) u_\nu - \nu \Delta v_\nu + \nabla q_\nu = \nu \Delta u_0$$

§1でやったエネルギー評価と同様に v_ν をかけて積分して若干評価をすれば

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| v_\nu \|^2 + \nu \| \nabla v_\nu \|^2 \leqq \nu \| \Delta u_0 \| \| v_\nu \| + |\nabla u_0|_{max} \| v_\nu \|^2$$

(ここで $|\nabla u_0|_{max}(t) = \sup_x |\nabla u_0(x, t)|$)

これより

$$\| v_\nu \|(t) \leqq \nu \int_0^t \| \Delta u_0 \| ds \exp \int_0^t | \nabla u_0 |_{max} (s) ds$$

したがってEuler方程式の解が存在していれば$\nu \to 0$のとき$\| v_\nu \| \to 0$となることがわかる。以下話を2次元にしぼって $\int_0^t \| \Delta u_0 \| ds$ はだいたい $\exp C \int_0^t | \nabla u_0 |_{max} (s) ds$ で評価$C > 0$できることがわかるから

$$\| v_\nu \|(t) \leqq \nu \cdot \exp (C+1) \int_0^t | \nabla u_0 |_{max} (s) ds$$

となる。したがって$| \nabla u_0 |_{max}$のふえ方をしらべればよい。ここで∇u_0はu_0の各微係数をとったもので $\mathrm{rot}\ u_0$で必ずしも評価できない。つまり

$$| \nabla u_0 |_{max} \leqq K | \mathrm{rot}\ u_0 |_{max}$$

はいえない。($\| \nabla u_0 \| \leqq K \| \mathrm{rot}\ u_0 \|$ はいえるが) $\mathrm{rot}\ u_0$の方が有界だからといって∇u_0の有界性がでないため数学的には

$$| \nabla u_0 |_{max} \leqq C \exp M | \mathrm{rot}\ a |_{max} t$$

しかいえていない。

以上より

$$\| v_\nu \|(t) \leqq \nu e^{e^{M | \mathrm{rot}\ a |_{max} t}}$$

となってしまう。

また，渦度の差について($w_\nu = \omega_\nu - \omega_0$)

$$\| w_\nu \|(t) \leqq \nu \int_0^t \| \Delta \omega_0 \| (s) ds \exp \int_0^t | \nabla \omega_0 |_{max} (s) ds$$

なる式がえられるが，$| \nabla \omega_0 |_{max}$の挙動がよくわからぬためどういう評価になるかわからぬ。たぶん

$$\| w_\nu \|(t) \leqq \nu e^{e^{Mt}}$$

型の評価はできると思っている。

§4. 質疑応答(覚えているもののみかきました)

桑原(名大・工)(E)をとくiterationの第1ステップでは境界条件はどうするのか。

答: ここでは境界なしでやっているつもり。あるとき，特に穴があるときは工夫を要す。Kato[2)]をみよ。

巽(京大・理) $\| v_\nu \|$, $\| w_\nu \|$ の下からの評価はないのか。特に$\| w_\nu \| \sim \nu e^{Mt^2}$とならないか。

答: こういうものを下からおさえるのは関数解析的方法では無理とおもわれる。上からの評価なら改善の余地あると思う。

長島(北大・工) 2次元のとき(NS)の解は空間的にもなめらかか。また安定なのか。

答: どちらも正しい。

付 録

§1 (NS)の解の存在

簡単なため全空間のかわりに有限領域で考える。

$\Omega \subset R^n$, $n=2, 3$ 有界とし，境界をなめらかとする。

$C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)=\{u \in C_0^{\infty}(\Omega);\ \mathrm{div}\, u=0\}$ 台コンパクトなソレノイド場全体

$H=C_{0,\sigma}^{\infty}$ の $L^2(\Omega)$ での閉包

$V=C_{0,\sigma}^{\infty}$ の $W_2^1(\Omega)$ での閉包（Ω の境界上0となる）

ここで $W_2^1(\Omega)=\{(u \in L^2(\Omega);\ \nabla u \in L^2(\Omega)\}$

任意のベクトル場は次のような "Helmholtz分解" ができる。

$$L^2(\Omega)=H \oplus G \quad (\text{Hilbert空間としての直和})$$

$$\text{但し } G=\{\nabla p;\ p \in W_2^1(\Omega)\}$$

P： Hへの射影とする。以上の記号により(NS)は $u:(0, T) \to H$ の方程式

$$(\mathrm{ANS}) \begin{cases} \dfrac{du}{dt}+\nu Au+Bu=0 \\ \qquad u(0)=a \end{cases}$$

となる。$-A=P\Delta$, $Bu=P(u\nabla)u$

弱解の存在定理は次の通り

定理 (Leray-Hopf)　$a \in H$ とする。このとき任意のTについて

$$u \in L^2(0, T; V) \quad \frac{du}{dt} \in L^1(0, T; V')$$

となる(ANS)の解がある。(少くともひとつ)　ここで V' はVの双対空間

2次元での正則性，一意性

定理　$n=2$ のとき，前記の解は一意的。また

$$u \in C([0, T]; H)$$

となる。

3次元の場合は初期速度が小でないといえない。よりなめらかな解であることは Ladyzhenskaya[5]等をみよ。

§2 (E)の解の存在

ここでは，Kato[2]，McGrath[6]，Kilcnch[4]による結果をのべる。

2次元の有界領域に話をしぼる。

定理 (Kato) $a \in C^{1+\mu}(\Omega)$ （$0<\mu<1$：Hölder指数）

$\mathrm{div}\, a=0$, $a \cdot n=0$ (境界上) とする。このとき任意のTについて(E)の解(u, p)で式中のすべての微分が $C(\Omega \times [0, T])$ にふくまれるような解が存在する。このような解はPについて t だけの関数を

加えることを除けば一意的である。

McGrath[6]は $\Omega = \mathrm{R}^2$，Kikuchi[4]は Ωが有界領域の外部の問題を扱った。

References

1) Y. Giga and T. Miyakawa, Solutions in L_r to the Navier-Stokes initial value problem, to appear in Arch. Rational Mech. Anal.

2) T. Kato, On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation, Arch. Rational Mech. Anal. 25 (1967), 188–200.

3) T. Kato and H. Fujita, On the nonstationary Navier-Stokes system, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 32 (1962) 243–260.

4) K. Kikuchi, Exterior problem for the two-dimensional Euler equation, to appear.

5) O. A. Ladyzhenskaya, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Revised English edn. New York–London, Gordon and Breach 1969.

6) F. J. McGrath, Nonstationary plane flow of viscous and ideal fluids, Arch. Rational Mech. Anal 27 (1968), 329–348.

7) R. Temam, Navier-Stokes Equations, Revised edn. Amsterdam–New York–Oxford, North-Holland 1979.

これらの文献の References も参照のこと。