特別講演

曲面の発展方程式

儀我美一　北大・理

§1. 界面の運動方程式の例

物質の2相を隔てる曲面をしばしば界面と呼んでいる。近年、界面がどのように時間によって動くかというところに関心が向けられている。例えば、過冷却水の中で氷はどのように成長していくかという問題がひとつの典型的な例である。本稿で扱う問題は、このような熱拡散が大きい問題ではなく、金属の粒界の運動に現れるように、成長速度が界面の局所的な状態のみで決まるものである。

時刻 t における界面を表す $\Gamma(t)$ が $\mathbb{R}^n$ の有界開集合 $D(t)$ の境界であるとしよう。方程式を書くため、$\Gamma(t)$ は滑らかで $D(t)$ は $\Gamma(t)$ の片側にあるとする。$\vec{n}$ を $\Gamma(t)$ の外向き単位法ベクトル場とする。$\vec{n}$ を $\Gamma(t)$ の管状近傍に $(\vec{n}\cdot\nabla)\vec{n}=0$ となるように延長しておくと便利である。(その延長も $\vec{n}$ と書く)。$V=V(t,x)$ を $\Gamma(t)$ の点 x における外向きの法線方向への成長速度とする。ここで考える $\Gamma(t)$ の発展方程式は、f が

与えられているとして

(1) $$V = f(t, x, \overline{n}(x), \nabla\overline{n}(x)) \text{ on } \Gamma(t)$$

という形のものである。ただし $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})$.

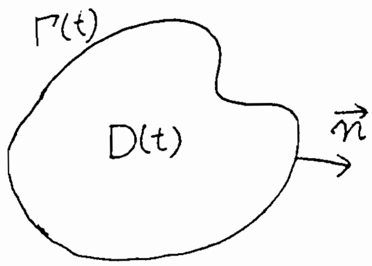


図1

幾何学的には $-\nabla\overline{n}$ はいわゆるWeingarten写像にあたる。典型的な(1)の方程式の例として平均曲率流方程式

(2) $$V = -\mathrm{div}\overline{n}$$

がある。これは曲面が各点の（$(n-1)$ 倍の）平均曲率ベクトルによって動く運動をあらわす方程式で微分幾何学で重要である。金属の粒界の運動等、固体の現象になると異方性がつきものなのでGurtin [Gu] が提唱するような一般的なモデル

(3) $$V = -\frac{1}{\beta(\overline{n})}\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_i}(\overline{n})\Big) + c\Big)$$

も重要である。ここで $\beta : S^{n-1} \to (0, \infty)$; $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は凸で $H(p) = |p|\sigma(\frac{p}{|p|})$, $\sigma : S^{n-1} \to [0, \infty)$ 。また c は定数であるとする。$c = 0, \beta \equiv 1, \sigma \equiv 1$ とすると(2)になる。この(3)で $H \equiv 0$ とすると

(4) $$V = -\frac{c}{\beta(\overline{n})}$$

で金属工学では、かなり昔から研究されている。ここでさらに$\beta \equiv 1$とすると

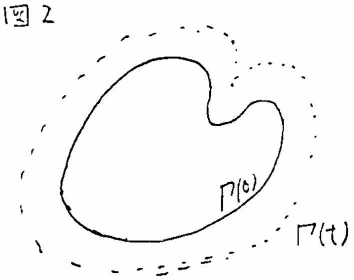
$$V = -c \tag{5}$$

という簡単な方程式になる。

§2. 大域解構成上の問題点

界面の運動方程式(1)に対して解析的な基本的問題は、与えられた初期曲面$\Gamma(0)$に対して(1)をみたす曲面族$\Gamma(t)$を時間大域的に作れるかという問題である。一般に初期曲面をどのように滑らかにしても有限時間内に特異点が現れる可能性がある。

図2



例えば(5)で$c=-1$とすると$\Gamma(0) \subset \mathbb{R}^2$を図2のようにするとある時刻$t$で$\Gamma(t)$は点線のような形になって特異点が現れる。方程式に放物型の効果が入っている平均曲率方程式(2)の場合は、Grayson [Gr1], Gage Hamilton [GH]の結果をあわせると$n=2$つまり$\Gamma(t)$が曲線の場合は特異点を生じたり交わったりすることなくやがて凸になり1点に収縮する。($\Gamma(0)$は任意の埋め込まれた閉曲線でよい)。ところ

が(2)でも$n=3$となると事情が異なる。実際、$\Gamma(0)$が次の図のようなハンドル部が細いバーベル状の時は、1点に収

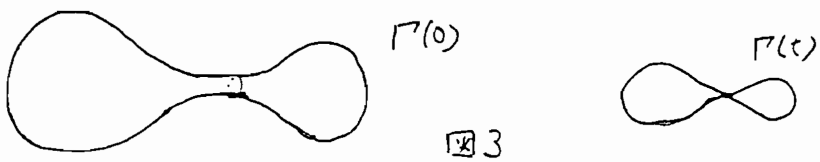


図3

縮する前に図3右図のように中央部がちぎれてしまう([Gr2]参照)。$n \geq 3$でも$\Gamma(0)$が凸なら$\Gamma(t)$は滑らかで凸のまま1点に収縮する。これはHuisken [H1]による。

古典的な意味で解が接続できない場合は、しばしば弱い意味の解を考えるのが有効である。実際、Brakke [Br]は幾何学的測度論的な大域解を平均曲率ベクトル流方程式(曲面の余次元1とは限らぬ)に対して構成したが一意性はない。それに対して著者ら[CGG1]の、$\Gamma(t)$を補助関数の等高面としてとらえる方法は一意的な大域解を構成できる。著者らと同時に独立に同様な結果がEvansとSpruck [ES1]によって得られたが、彼らの結果は(2)に対してのみで、著者らの結果の方がより一般である。

(2)に対しては、$\mathbb{R}^n$のかわりに多様体としてもよい[I]

§3. 幾何学的方程式と一般化された解

ここでは、[CGG1]の結果を[GG1], [AAG]を参考にして少し異なった表現で述べる。今$u : [0,\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$という補助関数を使って

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
D(t) &= \{x \in \mathbb{R}^n : u(t,x) > 0\}\\
\Gamma(t) &= \{x \in \mathbb{R}^n : u(t,x) = 0\}
\end{aligned}
$$

と表されているとする。すると

$$
\begin{aligned}
&\vec{n} = -\nabla u/|\nabla u|\\
&\nabla\vec{n} = \frac{1}{\nabla u|} R_{\bar{p}}\cdot\nabla^2 u\cdot R_{\bar{p}}, \quad R_{\bar{p}} = I - \bar{p}\otimes\bar{p}\\
&\bar{p} = p/|p|, \quad p = \nabla u
\end{aligned}
$$

となる。$\nabla^2 u$は空間変数についてのHesse行列である。$V = u_t/|\nabla u|$であることを考慮すると(1)は

$$
(7)\qquad u_t + F_f(t,x,\nabla u,\nabla^2 u) = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma(t)
$$

（ただし、$F_f(t,x,p,X) = -|p|f(t,x,-\bar{p},-\frac{1}{|p|}Q_{\bar{p}}(X))$

$Q_{\bar{p}}(X) = R_{\bar{p}}XR_{\bar{p}}, X : n\times n$実対称行列）

と同値になる。例えば(3)の場合

$$
F_f(p,X) = -\mathrm{trace}(R_{\bar{p}}X)
$$

となる。著者らの方法は(7)を$\Gamma(t)$でなく$\mathbb{R}^n$全体で考える。

<u>定義</u>　ある$\alpha<0$に対して方程式(7)の$(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$での粘性

解$u \in K_\alpha$があるとする。ただし

$$K_\alpha = \{u \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}^n) : u - \alpha \text{ が } T > 0$$

$$\text{に対して } [0,T] \times \mathbb{R}^n \text{ でコンパクト台をもつ}\}$$

とした。もし$D(t), \Gamma(t)$が(6)で与えられるとき$D = \bigcup_{t \geq 0} \{t\} \times D(t)$を初期値$D(0)$の方程式(1)の<u>内側解</u>、$\Gamma = \bigcup_{t \geq 0} \{t\} \times \Gamma(t)$を初期値$\Gamma(0)$の(1)の<u>界面解</u>、$D \cup \Gamma$を初期値$D(0) \cup \Gamma(0)$の<u>外側解</u>という。([ES1]や[CGG1]とは少し異なる定義もある[S])

簡単なためfがt, xによらぬとする代表的な結果をひとつ書く。

<u>定理</u>　fが各変数につき連続とする。$-f$が退化楕円型つまり$f(p, Q_p(X)) \geq f(p, Q_p(Y))$, $X \geq Y$とする。fが$\nabla \vec{n}$について正斉次1次であるとする。

D_0を$\mathbb{R}^n$の有界開集合、E_0をD_0を含むコンパクト集合とする。このときD_0を初期値とする(1)の内側解D, E_0を初期値とする外側解Eがただひとつ存在する。

この定理は(2)-(5)の例にすべて適用できる。ただし、(3), (4)ではβは連続$H \in C^2(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$を仮定する必要がある。

一意性をいう場合、方程式(7)の解の一意性の他、(6)の$D(0), \Gamma(0)$が同じ場合定義関数uのとり方によらず$D(t), \Gamma(t)$が決まることをいう必要がある。つまりuの各等高面は、

他の等高面に影響されぬことをいう必要がある。これは(7)のF_fが次のスケール不変性を満たすことによる。任意の$p \neq 0$, X, $\lambda > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$に対して

$$F_f(\lambda p, \lambda X + \sigma p \otimes p) = \lambda F_f(p, X). \tag{8}$$

(7)のF_fがこの性質を持つとき方程式(1)がgeometricであるとよんだ。geometricであることと粘性解についての比較定理を用いると、解の一意性がいえる。ただ、F_fは$p = 0$で連続でないので通常の比較定理を拡張する必要があった[CGG1]。解の存在はPerronの方法により示す。このとき優解、少解をgeometric性を用いて構成した[CGG1]。粘性解の比較定理に対しては、教科書として[CIL]がよい。また[GGIS]では[CGG1]の比較定理の証明が簡単にしてある。Fが(8)という性質をもつということと$F = F_f$とあるfを用いてかけることはFが退化楕円型であれば本質的に同じである[GG1]。[CGG1]と[ES1]の相違点については[CGG2]を見よ。

§4. 解の性質

　このような一般化された解は、古典解があるところではもちろんそれと一致する[ES1, GG2]。しかし、初期界面Γ_0が数字の8のような形(平面上)のときは、(2)の界面解$\Gamma(t)$

が厚みを持つこともある[ES1]。もっとやさしい(5)でもその現象が起こる[GGI]。[SS]では、そのようなことのおこらぬ十分条件を与えている。

という具合で解の性質はまだまだわかっていない。[AAG]では、関数のグラフの回転面でΓ_0があらわされているとき(2)の界面解$\Gamma(t)$がなめらかさを失うのは、有限回の時刻でしか起こり得ぬことを示した。Sturm型の放物型方程式の解の零点の数に対する事実[A]と[ES2]によるKorevaar型のアプリオリ評価を用いた。

特異摂動法との関係では[ESS]をあげておく([DG]もおもしろい)。また、特異点の近くでの曲面の形については[C], [SS], [AGG], [H2]をあげておく(但し、[2]について)。

[AGG] S. Altschuler, S. Angenent and Y. Giga, *Generalized motion by mean curvature for surfaces of rotation*, preprint.

[A] S. Angenent, *The zero set of a solugion of a parabolic equation*, Journal für die reine and angewandte Mathematik 390 (1988).

[Br] K.A. Brakke, *The motion of a surface by its mean curvature*, Princeton Univ. Press, NJ 1978.

[C] X.-Y. Chen, in preparation.

[CGG1] Y.-G. Chen, Y. Giga and S. Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, J. Differential Geometry **33** (1991), 749-786.

[CGG2] ―――――――, *Analysis toward snow crystal growth*, Proc. of Functional Analysis and Related Topics (Sapporo, 1990), (ed. S. Koshi) to appear..

[CIL] M.G. Crandall, H. Ishii and P.L. Lions, *User's guide to viscosity solutions for second order partial differential equations*, preprint.

[DG] E.De Giorgi, *Some conjectures on flow by mean curvature*, preprint.

[ESS] L.C. Evans, H.M. Soner and P.E. Souganidis, *The Allen-Cahn equations and generalized mean curvature flow equations*, Comm. Pure Appl. Math. (to appear).

[ES1] L.C. Evans and J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature I*, J. Differential Geometry **33** (1991), 635-681.

[ES2] ―――――――, *Motion of level sets by mean curvature III*, preprint.

[GH] M. Gage and H. Hamilton, *The heat equation shrinking of convex plane curves*, J. Differential Geometry **23** (1986), 69-96.

[GG1] Y. Giga and S. Goto, *Motion of hypersurfaces and geometric equations*, J. Math. Soc. Japan 44 (1992) (to appear).

[GG2] ―――――――, *Geometric evolution of phase boundaries*, IMA volumes in mathematics and its applications on the evolution of phase boundary (to appear).

[GGI] Y. Giga, S. Goto and H. Ishii, *Global existence of weak solutions for intarface equations coupled with diffusion equations*, preprint 1991.

[GGIS] Y. Giga, S. Goto, H. Ishii and M.-H. Sato, *Comparison principle and convexity preserving properties for singular degenerate parabolic equations on unbounded domains*, Indiana Univ. Math. J. 40 (1991). in press.

[Gr1] M. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to points*, J. Differential Geometry **26** (1987), 285-314.

[Gr2] ――――― *A short note on the evolution of a surface by its mean curvature*, Duke Math. J. **58** (1989), 555-558.

[Gu] M. Gurtin, *Multiphase thermomechanics with interface structure, 1.* Heat conduction and the capillary balance law. Arch. Rational Mech. Anal. **104** (1988), 195-221.

[H1] G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Differential Geometry 20 (1984), 237-266.

[H2] ———, *Asymptotic behaviour for singularities of the mean curvature flow*, J. Differential Geometry 31 (1990), 285-299.

[I] T. Ilmanen, *Generalized flow of sets by mean curvature on manifold*, preprint.

[S] H.M. Soner, *Motion of a set by the curvature of its boundary*, J. Differential Equations (to appear).

[SS] H.M. Soner and P.E. Souganidis, *Uniqueness and singularities of cylindically symmetric surfaces moving by mean curvature*, preprint.