移流項付き平均曲率流の弱解の存在について

高棹圭介　北大理　D3

利根川吉廣氏 (北大理) との共同研究

2012 年 10 月 4 日

北海道大学
HOKKAIDO UNIVERSITY

Introduction
移流項付き平均曲率流

Definition

$\mathbb{R}^n$ 内の超曲面 $\Gamma(t)$ の速度 V_Γ が

$$V_\Gamma = H \qquad \text{on} \qquad \Gamma(t), \qquad t \geq 0$$

で表されるとき, $\Gamma(t)$ を平均曲率流とよぶ.

ν : 単位法線ベクトル
H : $\Gamma(t)$ の平均曲率ベクトル

Example

$R > 0$, $r(t) = \sqrt{R^2 - 2(n-1)t}$ とする. このとき
$\Gamma(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r(t)\}$ は平均曲率流である.

Introduction
移流項付き平均曲率流

平均曲率流とは？

ラフに言うと「曲面の面積を小さくするように動く」現象.

例：金属の粒界の運動

Remark

曲面 M の平均曲率が $H=0$ のとき M は極小曲面となっている. 平面やカテノイド等は極小曲面であり動かない. 即ち平均曲率流は 1 点につぶれるとは限らない.

Introduction
移流項付き平均曲率流

Definition

$\mathbb{R}^n$ 内の超曲面 $\Gamma(t)$ の速度 V_Γ が

$$V_\Gamma = H + (u \cdot \nu)\nu \quad \text{on} \quad \Gamma(t), \quad t \geq 0$$

で表されるとき, $\Gamma(t)$ を移流項付き平均曲率流とよぶ.

ν : 単位法線ベクトル
H : $\Gamma(t)$ の平均曲率ベクトル
$u = u(x,t) : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$: 既知のベクトル値関数

Remark

u は摂動を与える項, ナビエ-ストークス方程式で現れる流速等を想定.

Introduction
本研究の目標

Aim

$n \geq 2$ における移流項付き平均曲率流 $\Gamma(t)$ の弱解 (= 弱い意味での解) の存在

研究の Motivation

1. 広いクラスで MCF の存在を示したい
   (グラフでなくてもよい, 微分できない特異点 (ジャンクション等) があっても良い).
2. MCF に摂動を加えるとどうなるのか？
   (摂動を加えても振る舞いが元の MCF と同様とみなせる u のクラスは？)
3. u がナビエ-ストークス方程式の流速だったら？
   (流速のデータは既知とし問題を単純化)

Introduction
幾何学的測度論

問題点

1. 曲面がグラフで記述できない
2. 曲面が滑らかとは限らない (微分できないところがある)
特に, その場合平均曲率はどう定義すればよいのか？

解決方法 : 幾何学的測度論

例えば... 弱い意味での平均曲率 : $\mathbb{R}^n$ 内の超曲面 M に対して H が generalized mean curvature vector ⇔

$$\int_M \mathrm{div}_M\, g\, d\mathcal{H}^{n-1} = -\int_M H \cdot g\, d\mathcal{H}^{n-1} \qquad \forall g \in C_c^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n).$$

$\mathrm{div}_M\, g = \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} g_j(\delta_{ij} - \nu_i\nu_j)$,
$g = (g_1,\ldots,g_n)$, $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n)$

Introduction
幾何学的測度論

幾何学的測度論 (バリフォールド) の Motivation

バリフォールド : マニフォールド (多様体) を一般化した概念.

$\mathbb{R}^n$ 内の超曲面 M(多様体) が与えられていると仮定. G を $\mathbb{R}^n$ 内の超平面全体の集合とする. このとき線形汎関数
$F : C_c(\mathbb{R}^n \times G) \to \mathbb{R}$ を

$$F(\phi) := \int_M \phi(x, T(x))\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

で定める ($T(x)$ は x における M の接平面).

ラフにいうと, バリフォールドは曲面を F のような線形汎関数と見做して一般化する手法.

Introduction
幾何学的測度論

Definition (弱解の定義)

$\mathbb{R}^n$ 内の超曲面 $\Gamma(t)$ に対し以下が成り立つとき $\Gamma(t)$ を Brakke の移流項付き平均曲率流 (本研究における弱解) という:
殆ど至る所の t に対し, ∃ 関数 $\theta : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{N}$ s.t.

$$\int_{\Gamma(t)} \phi\theta \, d\mathcal{H}^{n-1} \Big|_{t=t_1}^{t_2}$$
$$\leq \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Gamma(t)} (-H\phi + \nabla\phi) \cdot \{H + (u \cdot \nu)\nu\} \theta \, d\mathcal{H}^{n-1} \right) dt$$

が殆ど至る所の t_1, t_2 $(0 \leq t_1 < t_2 < \infty)$, $\forall \phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^+)$ に対して成り立つ (Brakke の不等式). θ : 曲面の多重度を表す関数.

主結果

Theorem (T-Tonegawa (2012))

$n \geq 2,\ p \geq 2,\ q > 2,\ p > \frac{n}{2} \cdot \frac{q}{q-1},\ \Omega = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n = \mathbb{T}^n,$
$\Gamma(0) \subset \Omega$: C^1 級の超曲面とする. さらに任意の $T > 0$ に対し

$$\|u\|_{L^q([0,T);(W^{1,p}(\Omega))^n)} := \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |u|^p + |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{q}{p}} dt \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

を仮定する. このとき以下が成り立つ:

(A) $\Gamma(t)$ は *Brakke* の移流項付き平均曲率流 (= 弱解).

(B) $\exists T_1 = T_1(\|u\|_{L^q([0,1);(W^{1,p}(\Omega))^n)}, \Gamma(0), p, q) \leq 1$ *s.t.* $\theta \equiv 1$ が殆ど至る所の $t \in [0, T_1]$ について成り立つ.
(*i.e.* 初期時刻から少しの間は曲面同士が重なり合わない)

証明の方針

Phase field 法 (Ilmanen (1993), $u \equiv 0$)

次の Allen-Cahn 方程式を考える:

$$\partial_t \varphi^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla \varphi^\varepsilon = \Delta \varphi^\varepsilon - \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2}.$$

u^ε : u の滑らかな近似関数

W : double-well potential (例: $W(\varphi) = \frac{(1-\varphi^2)^2}{2}$)

本来は二層流体の方程式.

Remark

1. 方程式の解 φ^ε は ± 1 を好む.
2. $n = 1, u = 0$ とすると $\varphi^\varepsilon = \tanh(\frac{x}{\varepsilon})$ が定常解として存在する ($n \geq 2, u \neq 0$ でもほぼ同様に考えることができる).

証明の方針

$\Gamma(t)$ の構成方法

1. 初期データ $\Gamma(0)$ の内側を $\varphi^\varepsilon \approx +1$ の部分, 外側を $\varphi^\varepsilon \approx -1$ の部分に対応させる (内側、外側と分けられなくともよい). その界面の厚みは ε 程度となる ($\varphi^\varepsilon \approx \tanh(\frac{x}{\varepsilon})$ より).
2. $\varepsilon \to 0$ とすると, 界面の厚みも 0 に収束し, 目標の平均曲率流 $\Gamma(t)$ に近づく.

Remark

$$F_t^\varepsilon(\phi) := C\int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2}{2} + \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}\right)dx,\ F_t(\phi) := \int_{\Gamma(t)} \phi\theta\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

として線形汎関数の F_t^ε と F_t を定義すると, $F_t^\varepsilon \to F_t$ となる (C は W に依存する定数).

証明の方針

Monotonicity formula (単調性公式) (Huisken (1990))

$0 \leq t < s < \infty$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\rho := \rho_{(y,s)}(x,t) := \frac{1}{(4\pi(s-t))^{\frac{n-1}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(s-t)}}$$

と定義する. また, $u \equiv 0$ を仮定. このとき次が成り立つ:

$$\frac{d}{dt} F_t^{\varepsilon}(\rho) = C \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \rho \left(\frac{\varepsilon |\nabla \varphi^{\varepsilon}|^2}{2} + \frac{W(\varphi^{\varepsilon})}{\varepsilon} \right) dx \leq 0$$

u がある場合でも同様のことが成り立つ (Liu-Sato-Tonegawa (2010)).

まとめ

1. 目的：移流項付き平均曲率流 $V_\Gamma = H + (u \cdot \nu)\nu$ の解の存在
2. 問題点：曲面がグラフで書き表すことが出来ない, または滑らかとは限らない等広いクラスの曲面を扱う必要がある
3. 解決方法：幾何学的測度論＆弱い意味での解 (=Brakke の平均曲率流) の採用
4. 結論：u がある程度滑らかであれば $t \in [0, \infty)$ で移流項付き平均曲率流の弱解 (brakke の平均曲率流) は存在する
5. 証明方法：Phase field 法 (Allen-Cahn 方程式の特異極限 → 平均曲率流)+Monotonicity formula(単調性公式)