グラフに収縮する細い領域上のラプラシアンの振る舞い

黒田　紘敏

大阪府立大学 高等教育推進機構

表面・界面シンポジウム IV

2012 年 10 月 4 日

$\mathbb{R}^n$ 内の領域 Ω_ε がグラフ G に $\varepsilon \to 0$ で収束する場合を考える.

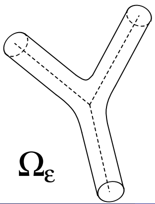
このとき，Ω_ε 上のある境界条件 B を備えたラプラシアン

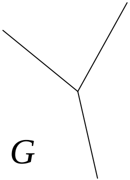
$$-\Delta_{\Omega_\varepsilon} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{with} \;\; Bu = 0 \;\; \text{on} \;\; \partial\Omega_\varepsilon$$

について，$\varepsilon \to +0$ とする際に起こる現象について考察する.

ここで，境界条件 B は例えば

$$Bu = u \; (Dirichlet, -\Delta^D_{\Omega_\varepsilon}), \;\; Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} \; (Neumann, -\Delta^N_{\Omega_\varepsilon}), \;\; \cdots$$





Ω_ε 上の微分作用素 $-\Delta_\varepsilon^B$ の極限を考察するために ⋯

- 偏微分方程式

$$(\mathrm{P}_\varepsilon)\begin{cases}\partial_t u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon = 0 & \text{in} \quad (0,T)\times\Omega_\varepsilon \\ Bu = 0 & \text{on} \quad (0,T)\times\partial\Omega_\varepsilon \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon & \text{in} \quad \Omega_\varepsilon\end{cases}$$

の解 $u^\varepsilon(t,x)$ について，$\lim_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon$ のみたす方程式を調べる.

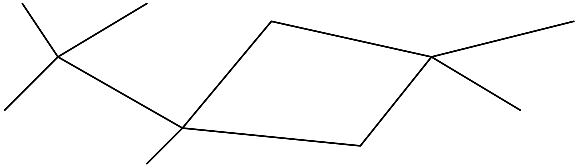
- 作用素の特徴の一つであるスペクトル（固有値）やレゾルベントの極限を調べる.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^B), \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}(-\Delta_{\Omega_\varepsilon}^B - z)^{-1}$$

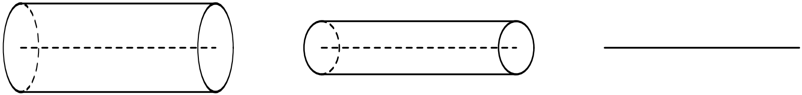
今回はこれらを包含するような変分論的手法（作用素に対応する汎関数の収束）を通して議論することを目標とする.

ごく細い領域をグラフで近似すると，ネットワークの性質は頂点でどのような条件を与えるかで決定される．
（この Quantum Graph の問題は 1930 年代から研究されていた．）

実際には厚みがあるので，制御するための条件はチューブの表面に与えることになる．チューブが限りなく細いときに，グラフでの結果との対応を考察する．



['92 Hale and Raugel]
G が 1 本の線分のときの考察がなされた.



グラフ G の幾何学的条件について

- 曲線も許すときにはどうなるか？
- チューブが蛇腹のように一様でない場合には？
- Y 字路のようなジャンクションとなる点をもつときには？

本日の講演内容

1. 問題設定・動機
2. 量子グラフ概説
3. 自己共役作用素に対応する汎関数の収束
4. 主結果

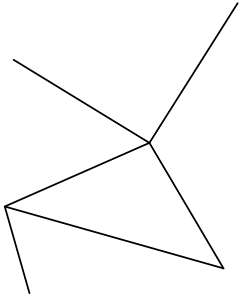
$G = (V, E)$：有限グラフ

$V = \{v_i\}_{i \in I}$：頂点集合（$|I| < +\infty$）

$E = \{e_j\}_{j \in J}$：辺集合（$|J| < +\infty$）

$l_j \in (0, +\infty)$：e_j の長さ

(i.e. $e_j \simeq [0, l_j] = \{s \in \mathbb{R} \mid 0 \leq s \leq l_j\}$)



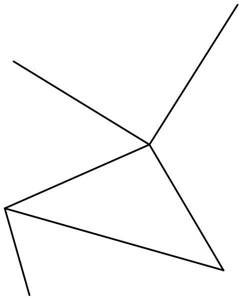
$G = (V, E)$: 有限グラフ

$V = \{v_i\}_{i \in I}$: 頂点集合 $(|I| < +\infty)$

$E = \{e_j\}_{j \in J}$: 辺集合 $(|J| < +\infty)$

$l_j \in (0, +\infty)$: e_j の長さ

$(\text{i.e. } e_j \simeq [0, l_j] = \{s \in \mathbb{R} \mid 0 \leq s \leq l_j\})$



（関数空間）

$$L^2(G) := \{\psi : G \to \mathbb{C} \mid \psi_j := \psi|_{e_j} \in L^2(e_j) \ \ (j \in J)\}$$

$$\psi_j \in L^2(e_j) \quad \Longleftrightarrow \quad \|\psi_j\|^2_{L^2(e_j)} := \int_0^{l_j} |\psi_j(s)|^2 \, ds < +\infty$$

$$\langle \psi, \phi \rangle_{L^2(G)} := \sum_{j \in J} \int_0^{l_j} \overline{\psi_j(s)} \, \phi_j(s) \, ds$$

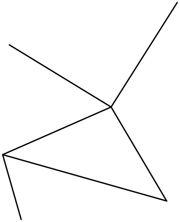
グラフ G 上に自己共役作用素

$$H = -\frac{d^2}{ds^2}$$ **with boundary conditions on each vertex**

を与える.

例 1 (Dirichlet condition)

$$D(H) = \{\psi \in H^2(G) \mid \psi(v) = 0 \ \ (v \in V)\}$$



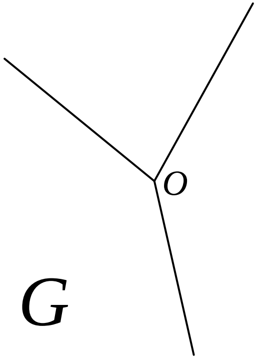
例 2 (Neumann condition)

$$D(H) = \{\psi \in H^2(G) \mid \psi'(v) = 0 \ \ (v \in V)\}$$

簡単のため分岐点が 1 点のグラフを考える.

例 3 (Kirchhoff condition)

- $\psi \in C(G)$
- $\displaystyle \sum_{j=1}^{N} \frac{d\psi_j}{ds}(0) = 0$
- $\displaystyle \frac{d\psi_j}{ds}(l_j) = 0 \ (j = 1, \ldots, N)$



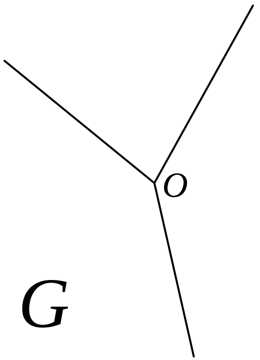
例 3 (Kirchhoff condition)

- $\psi \in C(G)$
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{d\psi_j}{ds}(0) = 0$
- $\displaystyle\frac{d\psi_j}{ds}(l_j) = 0 \ (j = 1, \ldots, N)$

例 4 (δ-type condition)

- $\psi \in C(G)$
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{d\psi_j}{ds}(0) = \alpha\psi(0)$
- $\displaystyle\frac{d\psi_j}{ds}(l_j) = 0 \ (j = 1, \ldots, N)$

ただし，$\alpha \in \mathbb{R}$ とする．



Ω を一般の領域とし

$$Q[u,w] = \int_{\Omega} \overline{\nabla u} \cdot \nabla w \, dx$$

で定める.

Ω を一般の領域とし

$$Q[u,w] = \int_\Omega \overline{\nabla u} \cdot \nabla w \, dx$$

で定める．もし

$$u \in C^2(\Omega) \qquad \text{かつ} \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on} \ \ \partial\Omega$$

ならば

$$Q[u,w] = \int_{\partial\Omega} \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)} w \, dS_x - \int_\Omega \overline{\Delta u} \, w \, dx = \int_\Omega \overline{-\Delta u} \, w \, dx$$

$$Q[u,w] = \langle -\Delta u, w \rangle_{L^2}$$

まとめると，$\mathcal{H} = L^2(\Omega)$

$$Q[u,w] = \int_\Omega \overline{\nabla u} \cdot \nabla w \, dx \qquad u, w \in D(Q) = H^1(\Omega)$$

で定めれば，$D(-\Delta_\Omega^N) := \{u \in H^2(\Omega) \mid \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on} \ \ \partial\Omega\}$ とおくとき

$$Q[u,w] = \langle -\Delta u, w\rangle_{\mathcal{H}} \qquad (u \in D(-\Delta_\Omega^N),\ w \in H^1(\Omega))$$

まとめると，$\mathcal{H} = L^2(\Omega)$

$$Q[u,w] = \int_\Omega \overline{\nabla u} \cdot \nabla w \, dx \qquad u,w \in D(Q) = H^1(\Omega)$$

で定めれば，$D(-\Delta_\Omega^N) := \{u \in H^2(\Omega) \mid \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on} \ \ \partial\Omega\}$ とおくとき

$$Q[u,w] = \langle -\Delta u, w \rangle_{\mathcal{H}} \qquad (u \in D(-\Delta_\Omega^N),\ w \in H^1(\Omega))$$

また，$\varphi(u) = Q[u,u]$ とおくと，φ と Ω 上の Neumann Laplacian $-\Delta_\Omega^N$ には関連性がある．
つまり，φ の性質から $-\Delta_\Omega^N$ の性質が得られることが期待される．

$$Q_0[\psi,\phi] = \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} \overline{\psi_j'(s)}\,\phi_j'(s)\,ds$$

$$\psi,\phi \in H^1(G) = \{\psi \in C(G) \mid \psi_j \in H^1(e_j)\}$$

とおく．このとき，ψ が Kirchhoff 境界条件を満たせば

$$\begin{aligned} Q_0[\psi,\phi] &= \sum_{j=1}^{N} \left\{ \overline{\psi_j'(s)}\,\phi_j(s)\Big|_{s=0}^{s=l_j} - \int_0^{l_j} \overline{\psi_j''(s)}\,\phi_j(s)\,ds \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} \overline{-\psi_j''(s)}\,\phi_j(s)\,ds \\ &= \langle -\psi'', \phi \rangle_{L^2(G)} \end{aligned}$$

$$Q_0 \quad \longleftrightarrow \quad -\frac{d^2}{ds^2} \ \text{ with } \ \psi \in C(G),\ \sum_{e_j \in E_v} \frac{d\psi_j}{ds}(v) = 0 \quad (v \in V)$$

Definition

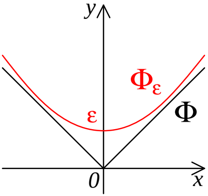
$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とする．閉 2 次形式 $\Phi_\varepsilon, \Phi : \mathcal{H} \to (-\infty, +\infty]$ に対して，Φ_ε が Φ に Mosco 収束するとは，次の 2 条件を満たすことである．

1. $u^\varepsilon \rightharpoonup u$ in $\mathcal{H}$ weakly $\Longrightarrow$ $\Phi(u) \le \liminf_{\varepsilon \to +0} \Phi_\varepsilon(u^\varepsilon)$
2. $\forall u \in \mathcal{H}, \exists u^\varepsilon \in \mathcal{H}$ s.t. $u^\varepsilon \to u$ strongly, $\Phi(u) = \lim_{\varepsilon \to +0} \Phi_\varepsilon(u^\varepsilon)$

例：滑らかな関数による近似

$$\mathcal{H} = \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) = |x|$$

$$\Phi_\varepsilon(x) = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$$



Theorem

閉 *2* 次形式 Φ_ε から定まる自己共役作用素を A_ε で表す.
このとき，次の条件はすべて同値である.

1. $\Phi_\varepsilon \to \Phi$ *Mosco* 収束
2. $e^{-tA_\varepsilon} \to e^{-tA}$ *strongly*
3. $(z - A_\varepsilon)^{-1} \to (z - A)^{-1}$ *strongly* $(\mathrm{Im}\, z \neq 0)$

ここで

- e^{-tA} は A から定まる *(1-パラメータ)* 半群
- $(z - A)^{-1}$ は A のレゾルベント

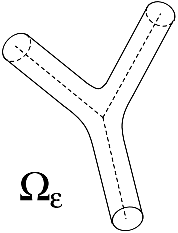
である.
さらにこのときあるコンパクト性の条件（詳細は省略）も満たせば，各固有値も収束する.

重みつき測度を $d\mu_\varepsilon = \dfrac{1}{\omega\varepsilon^{n-1}}\,dx$

$$\varphi_\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon = L^2(\Omega_\varepsilon, d\mu_\varepsilon) \to [0, +\infty]$$

$$\varphi_\varepsilon(u) = Q_\varepsilon[u, u]$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2\, d\mu_\varepsilon & \text{if } u \in H^1(\Omega_\varepsilon, d\mu_\varepsilon) \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$



とおいて，φ_ε の $\varepsilon \to +0$ での極限を調べる．ここで，$\omega\varepsilon^{n-1}$ は半径 ε である $n-1$ 次元球の体積（チューブの部分の断面積）

4.2 測度空間の Gromov-Hausdorff 収束 [cf: ’03 Kuwae-Shioya]

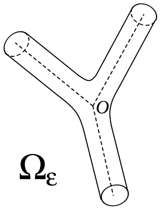
チューブ状領域からグラフへの射影の族 $f_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to G$ をうまく定めると，Gromov-Hausdorff の意味で

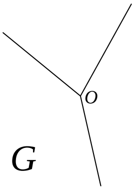
$$(\Omega_\varepsilon, O, d\mu_\varepsilon = dx/(\omega\varepsilon^{n-1})) \quad \longrightarrow \quad (G, O, ds) \qquad (\varepsilon \to +0)$$

が成り立つ．これは大雑把に言うと

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\Omega_\varepsilon} \psi \circ f_\varepsilon \, d\mu_\varepsilon = \int_G \psi \, ds \quad \left(= \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} \psi_j(s)\, ds \right)$$

が任意の $\psi \in C_0(G)$ に対して成り立つこと．





Definition

$(X_\varepsilon, dm_\varepsilon)$ が (X, dm) に Gromov-Hausdorff 収束するとする．また，$\mathcal{H}_\varepsilon = L^2(X_\varepsilon, dm_\varepsilon)$，$\mathcal{H} = L^2(X, dm)$ とおく．

閉 2 次形式 $\Phi_\varepsilon : \mathcal{H}_\varepsilon \to (-\infty, +\infty]$ と $\Phi : \mathcal{H} \to (-\infty, +\infty]$ に対して，Φ_ε が Φ に Mosco 収束するとは，次の 2 条件を満たすことである．

1. $\mathcal{H}_\varepsilon \ni u^\varepsilon \rightharpoonup u \in \mathcal{H}$ weakly $\Longrightarrow$ $\Phi(u) \le \liminf_{\varepsilon \to +0} \Phi_\varepsilon(u^\varepsilon)$
2. $\forall u \in \mathcal{H}, \exists u^\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$ s.t. $u^\varepsilon \to u$ strongly, $\Phi(u) = \lim_{\varepsilon \to +0} \Phi_\varepsilon(u^\varepsilon)$

ここで，$u^\varepsilon \to u$ strongly とは，これも大雑把に言って

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{X_\varepsilon} |u^\varepsilon - u \circ f_\varepsilon|^2 \, dm_\varepsilon = 0$$

ということ．（$f_\varepsilon : X_\varepsilon \to X$ は射影）

Theorem

閉 *2* 次形式 Φ_ε から定まる自己共役作用素を A_ε で表す.
このとき，次の条件はすべて同値である.

1. $\Phi_\varepsilon \to \Phi$ *Mosco* 収束
2. $e^{-tA_\varepsilon} \to e^{-tA}$ *strongly*
3. $(z - A_\varepsilon)^{-1} \to (z - A)^{-1}$ *strongly* $(\mathrm{Im}\, z \neq 0)$

ここで

- e^{-tA} は A から定まる *(1-*パラメータ*)* 半群
- $(z - A)^{-1}$ は A のレゾルベント

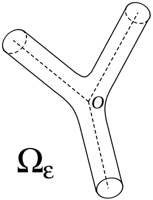
である.
さらにこのときあるコンパクト性の条件（詳細は省略）も満たせば，各固有値も収束する.

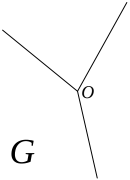
$\varphi_\varepsilon : L^2(\Omega_\varepsilon, d\mu_\varepsilon) \to [0, +\infty]$，$\varphi : L^2(G) \to [0, +\infty]$ を次で定める.

$$\varphi_\varepsilon(u) = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 \, d\mu_\varepsilon \qquad \text{if} \ \ u \in H^1(\Omega_\varepsilon, d\mu_\varepsilon)$$

$$\varphi(\psi) = \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} |\psi_j'(s)|^2 \, ds \qquad \text{if} \ \ \psi \in H^1(G)$$

$$H^1(G) = \{\psi \in C(G) \mid \psi_j \in H^1(e_j) \ (j = 1, \dots, N)\}$$





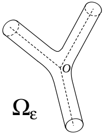
Theorem

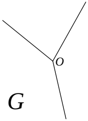
φ_ε は φ に $\varepsilon \to +0$ で *Mosco* 収束する．つまり，Ω_ε 上の *Neumann Laplacian* は G 上の *Kirchhoff Laplacian* に収束する．

$$\varphi_\varepsilon(u) = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 \, d\mu_\varepsilon \qquad \text{if} \ \ u \in H^1(\Omega_\varepsilon, d\mu_\varepsilon)$$

$$\varphi(\psi) = \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} |\psi_j'(s)|^2 \, ds \qquad \text{if} \ \ \psi \in H^1(G)$$

$$H^1(G) = \{\, \psi \in C(G) \mid \psi_j \in H^1(e_j) \ (j = 1, \ldots, N) \}$$





Theorem

φ_ε は φ に $\varepsilon \to +0$ で *Mosco* 収束する．つまり，Ω_ε 上の *Neumann Laplacian* は G 上の *Kirchhoff Laplacian* に収束する．

（補足）適切な $V \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $V \geq 0$ をとり，$V_\varepsilon(x) = (1/\varepsilon)V(x/\varepsilon)$，定数 C_V を V の mass とすると，新たに汎関数を

$$\varphi_\varepsilon(u) = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 \, d\mu_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} V_\varepsilon |u|^2 \, d\mu_\varepsilon$$

$$\varphi(\psi) = \sum_{j=1}^{N} \int_0^{l_j} |\psi_j'(s)|^2 \, ds + C_V |\psi(O)|^2$$

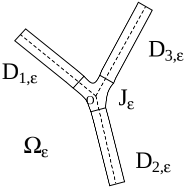
とおけば，φ_ε は φ に Mosco 収束する．

まとめ

- 自己共役作用素列の収束を調べるときに、それらに対応するエネルギー汎関数列の収束を調べることで解決できる.
- 領域が変化する場合でもその変形の様子が自然な写像で対応づくものであれば、固定された領域上と同様の収束理論を拡張したものが適用できる.
- グラフ上の保存則が成り立つハミルトニアン（Kirchhoff B.C.）は細いチューブ状の領域上の保存則が成り立つハミルトニアン（Neumann B.C.）で近似できている.

$\{u^{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ が

$$\sup_{\varepsilon>0}\{Q_{\varepsilon}[u^{\varepsilon}] + \|u^{\varepsilon}\|^2_{L^2(\Omega_E, d\mu_{\varepsilon})}\} < +\infty$$



をみたすときに，$\exists u^{\varepsilon_k} \to \psi^{\infty}$ を示す.
チューブ状領域 $D_{j,\varepsilon}$ 上では

$$w_j^{\varepsilon}(y) := u^{\varepsilon}|_{D_{j,\varepsilon}}(y_1, \varepsilon y')$$

$$y = (y_1, y') \in (0, l_j) \times B_1$$

とおけば

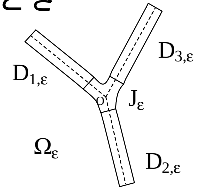
$$\sup_{\varepsilon>0} \|w_j^{\varepsilon}\|_{H^1} < +\infty, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \|\nabla_{y'} w_j^{\varepsilon}\|_{L^2} = 0$$

となるので

$$\exists w_j^{\varepsilon_k} \to \psi_j^{\infty}$$

各辺上の ψ_j をつなげて G 上の関数 ψ^∞ を定義するとき

$$\psi^\infty \in D(Q_0) = \{\psi \in C(G) \mid \psi_j \in H^1(e_j)\}$$



を示さなければならない． J_ε 上で

$$v^\varepsilon(z) := u^\varepsilon|_{J_\varepsilon}(\varepsilon z) \qquad (z \in J = \varepsilon^{-1} J_\varepsilon)$$

とおけば

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\nabla_z v^\varepsilon\|_{L^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v^\varepsilon \simeq C_\varepsilon : const$$

このとき， $D_{j,\varepsilon}$ と J_ε の共通部分で

$$\psi_j^\infty(0) = \lim_{k\to\infty} C_{\varepsilon_k}$$

がわかるので， $\psi^\infty \in C(G)$ が確認できる．

汎関数の収束理論と変分問題への応用の参考文献

1. H. Attouch, *Variational Convergence for Functions and Operators*, 1984.
2. G. Dal Maso, *An Introduction to* Γ*-Convergence*, 1993.
3. N. Kenmochi, Monotonicity and compactness Methods for Nonlinear Variational Inequalities, Handbook of Differential Equations, Stationary Partial Differential Equations, Vol. **4**, ed. M. Chiopt, Chapter 4, 203-298, North Holland, Amsterdam, 2007.
4. K. Kuwae and T. Shioya, Convergence of spectral structures: a functional analytic theory and its applications to spectral geometry, Comm. Anal. Geom., **11** (2003), 599–673.
5. U. Mosco, Convergence of convex sets and of solutions variational inequalities, Advances Math., **3**(1969), 510-585.