

測度論的確率論 *

小池 祐太 [†]

2025 年 1 月 16 日

目次

1	測度空間	4
1.1	集合論の記号と用語の復習	4
1.2	加法族と σ -加法族	5
1.3	Borel 集合	6
1.4	無限大を含む演算	7
1.5	集合関数に関する定義	12
1.6	測度空間の定義	13
1.7	測度に関する定義	13
1.8	測度の初等的性質	14
1.9	一意性の補題	15
1.10	外測度	17
1.11	Lebesgue 測度	22
2	可測関数	25
2.1	可測関数	25
2.2	可測関数の初等的性質	25
2.3	上限・下限・極限の可測性	27
2.4	確率変数	29
3	Lebesgue 積分	30
3.1	単関数	30
3.2	非負単関数の積分	30
3.3	非負関数の積分と単調収束定理	33
3.4	単調収束定理からの帰結	35
3.5	実関数の積分とその初等的性質	38
3.6	Lebesgue の収束定理	39
3.7	Riemann 積分との関係	41
3.8	密度と絶対連続性	42

* 東京大学大学院経済学研究科での 2019 年度の測度論的確率論 I の講義ノートです。校正をしっかりと行っていないので、誤植・誤りがあると思います。気付きましたらご連絡いただけるとありがたいです。

[†] 東京大学 数理情報・教育研究センター, 大学院数理科学研究科. Email: kyuta (at) ms.u-tokyo.ac.jp

3.9	像測度	42
3.10	微分と積分の順序交換	43
3.11	L^p -ノルム	44
3.12	Borel–Cantelli の第 1 補題	46
4	確率論の基礎概念	48
4.1	分布	48
4.2	期待値	50
4.3	共分散と相関係数	51
4.4	独立性	52
4.5	独立性と期待値	55
4.6	Borel–Cantelli の第 2 補題	56
5	極限定理	58
5.1	大数の弱法則	58
5.2	大数の強法則	60
5.3	中心極限定理	61
5.4	区間推定への応用	72
6	直積測度	76
6.1	単調族定理	76
6.2	直積 σ -加法族	76
6.3	直積測度: 有限測度の場合	77
6.4	直積測度: σ -有限測度への拡張	79
6.5	Fubini の定理	79
6.6	直積 σ -加法族: 一般の場合	81
6.7	直積測度: n 重への拡張	83
6.8	直積測度と独立性	84
6.9	Carathéodory の拡張定理	84
6.10	可算無限個の確率空間の直積	86
6.11	多次元 Lebesgue 測度の性質	88
6.12	多次元正規分布	92
7	特性関数とその応用	95
7.1	複素関数の積分	95
7.2	特性関数の定義と初等的性質	95
7.3	正規分布の特性関数	96
7.4	畳み込み	98
7.5	特性関数の一意性	99
7.6	共分散行列の退化を許す場合への多次元正規分布の一般化	101
7.7	Glivenko の定理	101
7.8	極限定理への応用	103

■ 参考文献

- 全体を通じて, Rudin [12] と Williams [17] を参考にしています. ときどき小谷 [7] や熊谷 [8] を参照しています.
- Lebesgue 測度の構成は Evans and Gariepy [5] を参考にしています.
- Stein の方法による中心極限定理の証明は Chen et al. [2] と Nourdin and Peccati [10] を参考にしています.
- 区間推定への応用のところでは van der Vaart [16] と吉田 [19] を参照しています.
- 補題 6.6 の証明は Mattila [9, Theorem 3.4] を参考にしています.
- 定理 7.2 の証明は Dudley [3, Section 9.5] を参考にしています.

■ Ver. 1 (2022 年 2 月 28 日の版) からの主な変更点

- 目次をつけました.
- Williams [17] に投げていた部分の証明を追記しました.
- Lebesgue 測度の構成法を変更しました (前より多少煩雑さが減っているはずです). これに伴い, Carathéodory の拡張定理を 6.9 節に移動しました.
- 多次元 Lebesgue 測度の性質に関する節 (6.11 節) を追加しました.

■ Ver. 2 (2023 年 6 月 13 日の版) からの主な変更点

- 特性関数に関する節を追加しました (7 節). この節はまったく校正していないので誤りが少なからずあると思います.

■ Ver. 3 (2023 年 7 月 11 日の版) からの主な変更点

- L^p -ノルムに関する節を 3.11 節に, Borel–Cantelli の第 1 補題を 3.12 節にそれぞれ移動し, 内容を追記しました.

■ Ver. 4 (2024 年 7 月 16 日の版) からの主な変更点

- 5 節において独立同分布列に対する大数の弱法則および中心極限定理を証明する際にそれぞれ課していた条件 $X_1 \in L^2(P)$ および $X_1 \in L^3(P)$ を, 刈り込みの議論によってそれぞれ $X_1 \in L^1(P)$ および $X_1 \in L^2(P)$ に緩和しました.

1 測度空間

1.1 集合論の記号と用語の復習

講義で必要となる集合論の記号と用語を以下に列挙する. 詳細は集合論の本, 例えば [15] の 1 章を参照.

- x が集合 S の要素であることを $x \in S$ で表す. このとき, x を S の元と呼ぶ. $x \in S$ でないことを $x \notin S$ で表す.
- 要素を 1 つも持たない集合は空集合と呼ばれ, 記号 $\emptyset$ で表される.
- 集合 A が別の集合 B に含まれるとは, $x \in A$ ならば常に $x \in B$ が成り立つことをいう. このことを記号 $A \subset B$ または $B \supset A$ で表す. このとき, A は B の部分集合であるともいう. 定義から特に $\emptyset$ は任意の集合の部分集合となる.
- 2 つの集合 A, B が等しいとは, $A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成り立つことをいい, このことを $A = B$ で表す.
- $\mathbb{N}$: 正の整数全体の集合
- $\mathbb{Z}$: 整数全体の集合
- $\mathbb{Q}$: 有理数全体の集合
- $\mathbb{R}$: 実数全体の集合
- 2 つの集合 A, B に対して,

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ または } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ かつ } x \in B\},$$

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

をそれぞれ A, B の和集合, 共通部分, 差集合と呼ぶ.

- $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を集合 Λ で添え字づけられた集合族とする. このとき,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x : \text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ について, } x \in A_\lambda\},$$
$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x : \text{すべての } \lambda \in \Lambda \text{ について, } x \in A_\lambda\}$$

をそれぞれ $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の和集合, 共通部分と呼ぶ. 特に $\Lambda = \mathbb{N}$ の場合は,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

と書く. $\Lambda = \{1, \dots, N\}$ などの場合にも類似の記法が用いられる.

- 集合 S に対して, S の部分集合の全体からなる集合を S のべき集合と呼び, $\mathcal{P}(S)$ で表す.
- 集合 A, B に対して, A の元 a と B の元 b の対 (a, b) の全体からなる集合を $A \times B$ で表し, A, B の直積集合と呼ぶ. ここで, 対 (a, b) において順序には意味がある. すなわち, (a, b) と (b, a) は別物である (そのため, (a, b) は a, b の順序対とも呼ばれる. 形式的には $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ と定義されることがある).
- f が集合 A から集合 B への写像であることを $f : A \rightarrow B$ で表す. このとき, A, B はそれぞれ f の定義域, 値域と呼ばれる. f の定義域はただ一つだが, 値域は無限にあることに注意 (B を含むような集合はすべて f の値域になるため).

関数という用語は写像と同じ意味で用いられる.

- $f : A \rightarrow B$ とする.
 - f が $x \in A$ に対応させる B の元を $f(x)$ で表す.
 - $A' \subset A$ に対して $x \in A'$ を $f(x) \in B$ に対応させることによって定まる A' から B への写像を f の A' への制限と呼ぶ.
 - $A_1 \subset A$ に対して,

$$f(A_1) := \{f(x) : x \in A_1\}$$

を f による A_1 の像と呼ぶ.

- $B_1 \subset B$ に対して,

$$f^{-1}(B_1) := \{x \in A : f(x) \in B_1\}$$

を f による B_1 の逆像と呼ぶ.

- $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ のとき, $x \in A$ を $g(f(x)) \in C$ に対応させることで定まる A から C への写像を f, g の合成と呼び, $g \circ f$ で表す.

1.2 加法族と σ -加法族

以下 S は集合を表す.

定義 1.1 (加法族). $\Sigma_0 \subset \mathcal{P}(S)$ が S 上の**加法族 (algebra, field)** であるとは, 次の 3 つの条件が成り立つことをいう:

- (i) $S \in \Sigma_0$.
- (ii) $F \in \Sigma_0$ ならば, $F^c := S \setminus F \in \Sigma_0$.
- (iii) $F, G \in \Sigma_0$ ならば, $F \cup G \in \Sigma_0$.

例 1.1. S のべき集合 $\mathcal{P}(S)$ は明らかに S 上の加法族である. また, $\{S, \emptyset\}$ も明らかに S 上の加法族である.

命題 1.1. Σ_0 を S 上の加法族とすると, 次のことが成り立つ.

- (a) $\emptyset \in \Sigma_0$.
- (b) $F_1, \dots, F_n \in \Sigma_0$ ならば, $F_1 \cup \dots \cup F_n \in \Sigma_0$.
- (c) $F_1, \dots, F_n \in \Sigma_0$ ならば, $F_1 \cap \dots \cap F_n \in \Sigma_0$.
- (d) $F, G \in \Sigma_0$ ならば, $F \setminus G \in \Sigma_0$.

証明. (a) $\emptyset = S^c \in \Sigma_0$ であるから.

(b) n に関する帰納法によって容易に証明できる.

(c) de Morgan の法則より $F_1 \cap \dots \cap F_n = (F_1^c \cup \dots \cup F_n^c)^c \in \Sigma_0$ となるから ((b) を使った).

(d) $F \setminus G = F \cap G^c \in \Sigma_0$ であるから ((c) を使った). □

定義 1.2 (σ -加法族). $\Sigma \subset \mathcal{P}(S)$ が S 上の **σ -加法族 (σ -algebra, σ -field)** であるとは, 次の 3 つの条件が成り立つことをいう:

- (i) $S \in \Sigma$.
- (ii) $F \in \Sigma$ ならば, $F^c := S \setminus F \in \Sigma$.
- (iii) $F_n \in \Sigma$ ($n = 1, 2, \dots$) ならば, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \Sigma$.

例 1.2. 例 1.1 で挙げた例はいずれも σ -加法族となっている.

命題 1.2. Σ を S 上の σ -加法族とすると、次のことが成り立つ。

- (a) $\emptyset \in \Sigma$.
- (b) Σ は S 上の加法族である。
- (c) $F_n \in \Sigma$ ($n = 1, 2, \dots$) ならば、 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in \Sigma$.

証明. (a) $\emptyset = S^c \in \Sigma$ であるから。

(b) $F, G \in \Sigma$ ならば $F \cup G \in \Sigma$ となることを示せば良い。 $F_1 := F, F_2 := G, F_n := \emptyset$ ($n = 3, 4, \dots$) とおけば、 $F_n \in \Sigma$ ($n = 1, 2, \dots$) となるから、 $F \cup G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \Sigma$ となる。

(c) de Morgan の法則より $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c)^c \in \Sigma$ となるから。 $\square$

定義 1.3 (可測空間). Σ が S 上の σ -加法族であるとき、順序対 (S, Σ) を **可測空間 (measurable space)** と呼ぶ。このとき、 Σ の元は S の Σ -**可測集合** (Σ -measurable set) あるいは単に **可測集合** と呼ばれる。

命題 1.3. 任意の $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(S)$ に対して、 $\mathcal{C}$ を含むような S 上の σ -加法族 Σ で最小のもの、すなわち $\mathcal{C} \subset \Sigma_1$ なる任意の S 上の σ -加法族に対して $\Sigma \subset \Sigma_1$ なるものがただ一つ存在する。

この Σ を $\mathcal{C}$ **によって生成される S 上の σ -加法族** と呼び、記号 $\sigma(\mathcal{C})$ で表すことにする。

証明. 一意性は明らか。実際、 Σ_1, Σ_2 がともに所与の性質を満たすのであれば、 $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ かつ $\Sigma_1 \supset \Sigma_2$ とならなければならないから。

次に存在を示す。 $\mathcal{C}$ を含むような S 上の σ -加法族すべての共通部分を Σ で表すと、この Σ が求めるべきものであることが容易にわかる。 $\square$

演習問題 1. 上の証明で構成した Σ が実際に $\mathcal{C}$ を含むような S 上の σ -加法族のうち最小のものであることを確認せよ。

補題 1.1. A, B を 2 つの空でない集合、 $f: A \rightarrow B$ とすると、以下が成り立つ。

- (a) Σ が A 上の σ -加法族ならば、 $\mathfrak{M} := \{F \in \mathcal{P}(B) : f^{-1}(F) \in \Sigma\}$ は B 上の σ -加法族である。
- (b) $\mathfrak{M}$ が B 上の σ -加法族ならば、 $\Sigma := \{f^{-1}(F) : F \in \mathfrak{M}\}$ は A 上の σ -加法族である。

演習問題 2. 補題 1.1 を証明せよ。

1.3 Borel 集合

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ とおく。 $\|x\|$ は x の **Euclid ノルム** と呼ばれる。

定義 1.4 ($\mathbb{R}^n$ の開集合). (a) $x \in \mathbb{R}^n$ と $\varepsilon > 0$ に対して x の ε -近傍を $U(x; \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \varepsilon\}$ で定義する。

(b) $U \subset \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の **開集合** であるとは、任意の $x \in U$ に対してある $\varepsilon > 0$ が存在して $U(x; \varepsilon) \subset U$ が成り立つことをいう。

$\mathbb{R}^n$ の開集合全体からなる集合を記号 $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ で表すことにする。

注意 1.1. 空集合 $\emptyset$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

演習問題 3. 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と $\varepsilon > 0$ に対して、 $U(x; \varepsilon)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ。

定義 1.5 ($E \subset \mathbb{R}^n$ の開集合). $E \subset \mathbb{R}^n$ とする。 $U \subset E$ が E の **開集合** であるとは、ある $V \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ が存在して $U = E \cap V$ と書けることをいう。

E の開集合全体からなる集合を記号 $\mathcal{O}(E)$ で表すことにする.

定義 1.6 ($E \subset \mathbb{R}^n$ の Borel 集合). $E \subset \mathbb{R}^n$ とする.

- (a) $\mathcal{O}(E)$ によって生成される E 上の σ -加法族を E 上の **Borel σ -加法族**と呼び, 記号 $\mathcal{B}(E)$ で表す. すなわち, $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{O}(E))$ である.
- (b) $\mathcal{B}(E)$ の元を E の **Borel 集合**と呼ぶ.

例 1.3. $a \leq b$ に対して, $(a, b), [a, b], (a, b], [a, b)$ はいずれも $\mathbb{R}$ の Borel 集合である. 実際, $(a, b) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であり, また,

$$\begin{aligned} [a, b] &= \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - 1/n, b + 1/n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \\ (a, b] &= \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b + 1/n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \\ [a, b) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - 1/n, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

特に, $\{a\} = [a, a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である.

補題 1.2. $E \subset \mathbb{R}^n$ に対して, $\mathcal{B}(E) = \{F \cap E : F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$ が成り立つ. 特に, $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ならば, $\mathcal{B}(E) = \{F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : F \subset E\}$ である.

証明. $\Sigma := \{F \cap E : F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$ とおく. また, ι を E から $\mathbb{R}^n$ への包含写像とする (すなわち $\iota(x) = x, x \in E$). このとき, 任意の $F \subset \mathbb{R}^n$ に対して $\iota^{-1}(F) = E \cap F$ が成り立つことに注意すると, $\Sigma = \{\iota^{-1}(F) : F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}$ が成り立つから, 補題 1.1 より Σ は E 上の σ -加法族である. 定義より $\mathcal{O}(E) \subset \Sigma$ が成り立つから, これは $\mathcal{B}(E) \subset \Sigma$ を意味する. 次に, $\mathfrak{M} := \{F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : \iota^{-1}(F) \in \mathcal{B}(E)\} = \{F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : F \cap E \in \mathcal{B}(E)\}$ とおくと, 補題 1.1 より $\mathfrak{M}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の σ -加法族である. また, $\mathcal{B}(E)$ の定義から明らかに $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}$ となるので, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}$ である. これは $\Sigma \subset \mathcal{B}(E)$ を意味する. $\square$

1.4 無限大を含む演算

定義 1.7 (拡大実数系). 実数全体の集合に正の無限大を表す記号 $+\infty$ と負の無限大を表す記号 $-\infty$ を付け加えた集合 $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ を (**アフィン**) **拡大実数系**と呼び, 記号 $\overline{\mathbb{R}}$ で表す.

文脈が明らかな場合, 記号 $+\infty$ はしばしば ∞ と書かれる.

定義 1.8 (拡大実数系における順序). 任意の $a \in \overline{\mathbb{R}}$ に対して, $a \leq \infty$ および $-\infty \leq a$ が成り立つと定義する. このようにして, $\mathbb{R}$ 上の順序関係 $\leq$ が自然に $\overline{\mathbb{R}}$ 上へと拡張される.

注意 1.2. 上の定義によって, 対 $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ が全順序集合となることが示せる. すなわち, 以下の性質が成り立つ:

- (i) (反射律) 任意の $a \in \overline{\mathbb{R}}$ に対して, $a \leq a$.
- (ii) (推移律) $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ が $a \leq b$ かつ $b \leq c$ を満たすならば, $a \leq c$.
- (iii) (反対称律) $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ が $a \leq b$ かつ $b \leq a$ を満たすならば, $a = b$.
- (iv) (全順序性) 任意の $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ に対して, $a \leq b$ と $b \leq a$ の少なくとも一方が必ず成り立つ.

注意 1.3. $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ に対して, $a \leq b$ のことを $b \geq a$ とも書く. また, $a \leq b$ かつ $a \neq b$ のことを $a < b$ または $b > a$ で表す.

定義 1.9 (絶対値). $|\infty| := \infty, |-\infty| := \infty$ と定義する.

定義 1.10 (区間). $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ に対して以下のように定義する:

$$\begin{aligned}(a, b) &:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x < b\}, \\ [a, b] &:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x \leq b\}, \\ (a, b] &:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x \leq b\}, \\ [a, b) &:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x < b\}.\end{aligned}$$

これらの定義は, 明らかに通常の実数における区間の定義と矛盾しない. また, $[-\infty, \infty] = \overline{\mathbb{R}}$ である.

定義 1.11 (拡大実数系における加法). $a \in \mathbb{R}$ に対して,

$$a \pm \infty := \pm\infty, \quad a - (\pm\infty) := \mp\infty$$

と定義する. また, $\infty + \infty := \infty, -\infty + (-\infty) := -\infty, \infty - (-\infty) := \infty, -\infty - \infty := -\infty$ と定義する ($\infty - \infty$ などは定義しない).

注意 1.4. 定義 1.11 より, $(-\infty, \infty]$ においては加法 $+$ が定義できるが, $(-\infty, \infty]$ はこの算法に関して単位元を 0 とする可換モノイドをなす. すなわち, 以下の性質が成り立つ:

- (i) (結合法則) $a, b, c \in (-\infty, \infty]$ ならば, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- (ii) (単位元の存在) 任意の $a \in (-\infty, \infty]$ に対して, $a + 0 = 0 + a = a$.
- (iii) (交換法則) $a, b \in (-\infty, \infty]$ ならば, $a + b = b + a$.

定義 1.12 (拡大実数系における乗法). $a \in \overline{\mathbb{R}}$ に対して,

$$a \cdot (\pm\infty) := \begin{cases} \pm\infty & \text{if } a > 0, \\ 0 & \text{if } a = 0 \\ \mp\infty & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

と定義する.

注意 1.5. 定義 1.11–1.12 より, $[0, \infty]$ においては加法 $+$ と乗法 $\cdot$ が定義できるが, $[0, \infty]$ はこれらの算法に関して可換半環をなす. すなわち, 以下の性質が成り立つ:

- (i) $[0, \infty]$ は加法 $+$ に関して単位元を 0 とする可換モノイドをなす.
- (ii) $[0, \infty]$ は乗法 $\cdot$ に関して単位元を 1 とする可換モノイドをなす.
- (iii) (分配法則) $a, b, c \in [0, \infty]$ ならば, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.
- (iv) (零元の存在) 任意の $a \in [0, \infty]$ に対して, $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

注意 1.6. $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ が $a \leq b$ を満たすとき, 以下が成り立つことが容易に確認できる.

- (i) $a, b > -\infty, c \in (-\infty, \infty] \Rightarrow a + c \leq b + c$.
- (ii) $a, b < \infty, c \in [-\infty, \infty) \Rightarrow a + c \leq b + c$.
- (iii) $c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$.
- (iv) $c \leq 0 \Rightarrow ac \geq bc$.

ただし, たとえ $a < b$ であっても, 例えば (i) で $a + c < b + c$ となるとは限らないことに注意 ($c = \infty$ ならば両辺ともに ∞ になってしまうため).

定義 1.13 ($\mathbb{R}$ の開集合). (a) $\varepsilon > 0$ に対して $\pm\infty$ の ε -近傍を $U(\infty; \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R} : y > \varepsilon\}$ および $U(-\infty; \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R} : y < -\varepsilon\}$ で定義する.

(b) $U \subset \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ の開集合であるとは, 任意の $x \in U$ に対してある $\varepsilon > 0$ が存在して $U(x; \varepsilon) \subset U$ が成り立つことをいう.

$\mathbb{R}$ の開集合全体からなる集合を記号 $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ で表すことにする.

例 1.4. 定義から明らかに $\mathcal{O}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{O}(\mathbb{R})$ である. また, $a \in \mathbb{R}$ に対して, $(a, \infty], [-\infty, a)$ はともに $\mathbb{R}$ の開集合である.

定義 1.14 ($E \subset \mathbb{R}$ の開集合). $E \subset \mathbb{R}$ とする. $U \subset E$ が E の開集合であるとは, ある $V \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ が存在して $U = E \cap V$ と書けることをいう.

E の開集合全体からなる集合を記号 $\mathcal{O}(E)$ で表すことにする.

注意 1.7. 任意の $V \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ について $V \cap \mathbb{R} \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ が成り立つことに注意すれば, 定義 1.14 は定義 1.5 と矛盾しない. すなわち, $E \subset \mathbb{R}$ の場合, 前者の意味での E の開集合と後者の意味での E の開集合は一致する.

定義 1.15 ($E \subset \mathbb{R}$ の Borel 集合). $E \subset \mathbb{R}$ とする.

(a) $\mathcal{O}(E)$ によって生成される E 上の σ -加法族を E 上の **Borel σ -加法族** と呼び, 記号 $\mathcal{B}(E)$ で表す. すなわち, $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{O}(E))$ である.

(b) $\mathcal{B}(E)$ の元を E の **Borel 集合** と呼ぶ.

補題 1.3. $E \subset \mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{B}(E) = \{F \cap E : F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ が成り立つ. 特に, $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ならば, $\mathcal{B}(E) = \{F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : F \subset E\}$ である.

証明. 補題 1.2 と同様にして証明できる. □

補題 1.4. U が $\mathbb{R}$ の開集合ならば, $\mathbb{R}$ の点列 $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ と正数列 $(\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty}$ が存在して $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U(x_i; \varepsilon_i)$ と書ける.

証明. $\mathcal{U} := \{U(x; k^{-1}) : x \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N}, U(x; k^{-1}) \subset U\} \cup \{U(\infty; k) : k \in \mathbb{N}, U(\infty; k) \subset U\} \cup \{U(-\infty; -k) : k \in \mathbb{N}, U(-\infty; -k) \subset U\}$ とおくと, $(\mathbb{Q} \cup \{\infty, -\infty\}) \times \mathbb{N}$ が可算集合であることから $\mathcal{U}$ も可算集合となる. 従って $U = \bigcup_{V \in \mathcal{U}} V$ となることを示せば証明は完成する.

$U \supset \bigcup_{V \in \mathcal{U}} V$ は明らかだから, $U \subset \bigcup_{V \in \mathcal{U}} V$ を示せばよい. $x \in U$ とすると, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $U(x; \varepsilon) \subset U$ となる. もし $x \in \{\infty, -\infty\}$ ならば, $k > \varepsilon$ となるように $k \in \mathbb{N}$ をとれば $U(x; k^{-1}) \subset U(x; \varepsilon) \subset U$ となるから, $U(x; k^{-1}) \in \mathcal{U}$, 従って $x \in \bigcup_{V \in \mathcal{U}} V$ となる. それ以外の場合, $1/k < \varepsilon/2$ となるように $k \in \mathbb{N}$ をとると, 有理数の稠密性よりある $y \in \mathbb{Q}$ が存在して $|x - y| < 1/k$ を満たす. このとき明らかに $x \in U(y; 1/k)$ であり, かつ任意の $z \in U(y; 1/k)$ に対して $|x - z| \leq |x - y| + |y - z| < 2/k < \varepsilon$ となるから $z \in U(x; \varepsilon) \subset U$, すなわち $U(y; 1/k) \subset U$ となる. 従って $U(y; 1/k) \in \mathcal{U}$ である. 故に $x \in \bigcup_{V \in \mathcal{U}} V$ となって証明は完成した. □

定理 1.1. $E \subset \mathbb{R}$ とする. $\pi(E) := \{[-\infty, x] \cap E : x \in \mathbb{R}\}$ とおくと, $\mathcal{B}(E) = \sigma(\pi(E))$ が成り立つ.

証明. まず, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $[-\infty, x] \cap E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{[-\infty, x + 1/n] \cap E\} \in \mathcal{B}(E)$ となるから, $\pi(E) \subset \mathcal{B}(E)$, すなわち, $\sigma(\pi(E)) \subset \mathcal{B}(E)$ である.

次に $\sigma(\pi(E)) \supset \mathcal{B}(E)$ を示すが, このためには $\sigma(\pi(E)) \supset \mathcal{O}(E)$ を示せばよい. さらに, 補題 1.4

より $\overline{\mathbb{R}}$ の任意の開集合は可算個の $U(x; \varepsilon)$ ($x \in \overline{\mathbb{R}}, \varepsilon > 0$) という形の集合の和として表されるから, $U(x; \varepsilon) \cap E \in \sigma(\pi(E))$ となることを示せばよい.

$x = \infty$ の場合, $U(x; \varepsilon) \cap E = (\varepsilon, \infty] \cap E = E \setminus ([-\infty, \varepsilon] \cap E)$ かつ $[-\infty, \varepsilon] \cap E \in \pi(E)$ であるから, $U(x; \varepsilon) \cap E \in \sigma(\pi(E))$ である.

$x = -\infty$ の場合, $U(x; \varepsilon) \cap E = [-\infty, \varepsilon) \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} ([-\infty, \varepsilon - 1/n] \cap E) \in \sigma(\pi(E))$ である.

$x \in \mathbb{R}$ の場合, $U(x; \varepsilon) \cap E = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap E = \{[-\infty, x + \varepsilon) \cap E\} \setminus \{[-\infty, x - \varepsilon] \cap E\}$ かつ $[-\infty, x - \varepsilon] \cap E \in \pi(E) \subset \sigma(\pi(E))$, $[-\infty, x + \varepsilon) \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{[-\infty, x + \varepsilon - 1/n] \cap E\} \in \sigma(\pi(E))$ であるから, $U(x; \varepsilon) \cap E \in \sigma(\pi(E))$ である. 以上で証明は完成した. $\square$

定義 1.16 (上界・下界). $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ とする.

(a) $a \in \overline{\mathbb{R}}$ が A の**上界**であるとは, 任意の $x \in A$ に対して $x \leq a$ が成り立つことをいう.

(b) $a \in \overline{\mathbb{R}}$ が A の**下界**であるとは, 任意の $x \in A$ に対して $x \geq a$ が成り立つことをいう.

注意 1.8. 定義から明らかに, 任意の $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ に対して, ∞ は A の上界であり, $-\infty$ は A の下界である.

命題 1.4. A が $\overline{\mathbb{R}}$ の空でない部分集合であれば, A の上界のうち最小のもの, および A の下界のうち最大のものが存在する. 前者を A の**上限**, 後者を A の**下限**と呼び, それぞれ $\sup A, \inf A$ で表す.

証明. 上限についてのみ示す. $A = \{-\infty\}$ の場合は $-\infty$ が明らかに A の上限となるから, $A \neq \{-\infty\}$ の場合を考える. A が上に有界, すなわちある $a \in \mathbb{R}$ が存在してすべての $x \in A$ について $x \leq a$ となる場合, $A \setminus \{-\infty\}$ の上限の存在は実数の性質としてよく知られており (例えば [14] の 4 頁参照), この集合の上限は明らかに A の上限にもなっている. そうでない場合, A の上界は明らかに ∞ のみなので, これが A の上限となる. $\square$

注意 1.9. 規約として, 空集合の上限・下限はそれぞれ $\sup \emptyset := -\infty, \inf \emptyset := \infty$ で定める.

定義 1.17 ($\overline{\mathbb{R}}$ の点列の収束). $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ を $\overline{\mathbb{R}}$ の点列とする. すなわち, $a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ ($n = 1, 2, \dots$) とする. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき $a \in \overline{\mathbb{R}}$ に**収束する**とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq N \Rightarrow a_n \in U(a; \varepsilon)$$

が成り立つことをいう. このことを

$$a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{または} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

で表す. a は $n \rightarrow \infty$ のときの $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ の**極限**と呼ばれる.

注意 1.10. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ が実数列の場合, 上の定義は通常のもので同値となる.

補題 1.5. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ を $\overline{\mathbb{R}}$ の点列とすると, 以下が成り立つ.

(a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ が非減少, すなわち $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ ならば, $a_n \rightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} a_k := \sup\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ.

(b) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ が非増加, すなわち $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ ならば, $a_n \rightarrow \inf_{k \in \mathbb{N}} a_k := \inf\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ.

証明. (a) についてのみ示す. すべての n について $a_n = -\infty$ の場合は明らかだから, ある N について $a_N > -\infty$ となる場合を考えればよい. $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ が上に有界であれば, この結果は実数の性質とし

てよく知られている (例えば [14] の 1 章定理 4 参照). そうでない場合, $(a_n)_{n=1}^\infty$ が非減少であることから $a_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) となる. 一方でこの場合明らかに $\sup_{k \in \mathbb{N}} a_k = \infty$ である. $\square$

補題 1.6. $(-\infty, \infty]$ の点列 $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty$ がそれぞれ $\alpha, \beta \in (-\infty, \infty]$ に収束するとき, 次のことが成り立つ.

(a) $a_n + b_n \rightarrow \alpha + \beta$ ($n \rightarrow \infty$).

(b) $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$ かつ $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots$ ならば, $a_n b_n \rightarrow \alpha \beta$ ($n \rightarrow \infty$).

証明. (a) $\alpha, \beta < \infty$ のときは, 十分大きな n に対して $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ が成り立つから, 主張は微分積分学でよく知られた結果に帰着する (例えば [14] の 1 章定理 2 参照). 従って $\alpha = \infty$ または $\beta = \infty$ の場合を考えればよい. 対称性より $\alpha = \infty$ と仮定して一般性を失わない. まず, $\lim_n b_n = \beta$ と $\beta > -\infty$ よりある $N \in \mathbb{N}$ と $\beta_0 \in (-\infty, \beta)$ が存在して, $n \geq N \Rightarrow b_n > \beta_0$ となる. いま, 任意に $K > 0$ をとると, $\lim_n a_n = \infty$ よりある $N' \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N' \Rightarrow a_n > 2K - \beta_0$ となる. 従って $N'' := N \vee N'$ とおけば, $n \geq N'' \Rightarrow a_n + b_n \geq 2K > K$ となる. これは $\lim_n (a_n + b_n) = \infty = \alpha + \beta$ を意味する.

(b) $\alpha, \beta < \infty$ のときは, 十分大きな n に対して $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ が成り立つから, 主張は微分積分学でよく知られた結果に帰着する (例えば [14] の 1 章定理 2 参照). 従って $\alpha = \infty$ または $\beta = \infty$ の場合を考えればよい. 対称性より $\alpha = \infty$ と仮定して一般性を失わない.

もし $\beta = 0$ ならば, 仮定よりすべての n について $b_n = 0$ とならなければならないから, $a_n b_n = 0 = \alpha \beta$ ($n = 1, 2, \dots$) となって主張が成り立つ. $\beta > 0$ の場合, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $b_N > 0$ となる. もし $b_N = \infty$ ならば, 仮定よりすべての $n \geq N$ について $b_n = \infty$ となる. $\alpha = \infty$ より十分大きな n については $a_n > 0$ だから, これは $\lim_n a_n b_n = \infty = \alpha \beta$ を意味する. $b_N < \infty$ の場合を考える. 任意に $K > 0$ をとると, $\alpha = \infty$ よりある $N' \in \mathbb{N}$ が存在して $a_{N'} > 2K/b_N$ となる. このとき $n \geq N \vee N'$ ならば $a_n b_n \geq a_{N'} b_N \geq 2K > K$ となる. これは $\lim_n a_n b_n = \infty = \alpha \beta$ を意味する. $\square$

注意 1.11. 上の補題の (b) の主張において, 仮定「 $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$ かつ $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots$ 」は外すことができない. 実際, $a_n \equiv \infty$ の場合を考えると, $b_n = -1/n$ の場合 $b_1 \leq b_2 \leq \dots$ だが $a_n b_n \equiv \infty \neq 0 = \infty \cdot 0$ であり, また $b_n = 1/n$ の場合 $b_n > 0$ だが $a_n b_n \equiv \infty \neq 0 = \infty \cdot 0$ である.

定義 1.18 (正項級数). $(a_n)_{n=1}^\infty$ を $[0, \infty]$ の点列とする. このとき, $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, \dots$) とおくと, $(S_n)_{n=1}^\infty$ は明らかに非減少であるから, 補題 1.5 より $n \rightarrow \infty$ のときの極限が存在する. この極限を記号 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ で表す. すなわち,

$$\sum_{n=1}^\infty a_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n \left(= \sup_{N \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^N a_n \right)$$

である.

補題 1.7. $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty$ を $[0, \infty]$ の点列, $\alpha, \beta \in [0, \infty]$ とすると,

$$\sum_{n=1}^\infty (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^\infty a_n + \beta \sum_{n=1}^\infty b_n.$$

証明. 補題 1.6 から直ちに従う. $\square$

補題 1.8 (正項級数の和の順序交換). $(a_n)_{n=1}^\infty$ を $[0, \infty]$ の点列, $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を全単射とする. このとき,

$$\sum_{n=1}^\infty a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^\infty a_n$$

が成り立つ.

証明. すべての $n \in \mathbb{N}$ について $a_n < \infty$ である場合, この結果は微分積分学でよく知られている (例えば [14] の 5 章定理 6 参照). そうでない場合, 上式の両辺はともに ∞ となって成立する. $\square$

補題 1.9 (二重単調列の極限の順序交換). $(a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ を $[0, \infty]$ の点列で次の 2 条件を満たすものとする:

- (i) 各 $j \in \mathbb{N}$ について, $a_{1,j} \leq a_{2,j} \leq \dots$.
- (ii) 各 $i \in \mathbb{N}$ について, $a_{i,1} \leq a_{i,2} \leq \dots$.

このとき,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} a_{i,j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} a_{i,j} \quad (1.1)$$

が成り立つ.

証明. まず, 仮定と補題 1.5 より (1.1) に現れる極限はすべて存在し,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} a_{i,j} = \sup_{i \in \mathbb{N}} \sup_{j \in \mathbb{N}} a_{i,j} =: A, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} a_{i,j} = \sup_{j \in \mathbb{N}} \sup_{i \in \mathbb{N}} a_{i,j} =: B$$

が成り立つことに注意する. 次に, 任意の $i, j \in \mathbb{N}$ について $a_{i,j} \leq B$ が成り立つから, $A \leq B$ が成り立つ. 同様の議論で $B \leq A$ も示せるから, $A = B$ である. $\square$

系 1.1 (正項級数に対する Fubini の定理). $(a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ を $[0, \infty]$ の点列とすると,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}$$

が成り立つ.

証明. 補題 1.9 から直ちに従う. $\square$

1.5 集合関数に関する定義

以下では Σ_0 を S 上の加法族とし, μ_0 を Σ_0 から $[0, \infty]$ への関数とする.

定義 1.19 (加法性). μ_0 が**加法的**であるとは, 次の 2 条件が成立することをいう:

- (i) $\mu_0(\emptyset) = 0$.
- (ii) $F, G \in \Sigma_0$ かつ $F \cap G = \emptyset$ であるならば, $\mu_0(F \cup G) = \mu_0(F) + \mu_0(G)$.

定義 1.20 (可算加法性). μ_0 が**可算加法的**であるとは, 次の 2 条件が成立することをいう:

- (i) $\mu_0(\emptyset) = 0$.
- (ii) $F_n \in \Sigma_0$ ($n = 1, 2, \dots$) が $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \Sigma_0$ かつ $i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \emptyset$ を満たすならば,

$$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(F_n).$$

命題 1.5. μ_0 が可算加法的ならば, μ_0 は加法的である.

証明. 加法性の公理 (ii) の成立を確認すればよい. $F \cap G = \emptyset$ なる $F, G \in \Sigma_0$ を任意にとる. このとき, $F_1 = F, F_2 = G, F_n = \emptyset$ ($n = 3, 4, \dots$) とおくと, この F_n たちは明らかに可算加法性の公理 (ii) の仮定を満たすから, $\mu_0(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(F_n)$ が成り立つ. ここで, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F \cup G$ であり, また可算加法性の公理 (i) より $\mu_0(F_n) = 0$ ($n = 3, 4, \dots$) であるから, 題意は示された. $\square$

1.6 測度空間の定義

この節では (S, Σ) を可測空間とする.

定義 1.21 (測度空間). 関数 $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ が (S, Σ) 上の**測度 (measure)** であるとは, μ が可算加法的であることをいう. このとき順序対 (S, Σ, μ) を**測度空間**と呼ぶ.

例 1.5. 集合 F に対して, F の要素の個数を $\#F$ と書くことにする (F が無限集合の場合は $\#F = \infty$ とする). 関数 $\mu_1 : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ を

$$\mu_1(F) = \#F \quad (F \in \Sigma)$$

で定めると, μ_1 は明らかに (S, Σ) 上の測度となる. この測度 μ_1 を (S, Σ) 上の**計数測度 (counting measure)** と呼ぶ.

例 1.6. $x \in S$ に対して, 関数 $\delta_x : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ を

$$\delta_x(F) = 1_F(x) \quad (F \in \Sigma)$$

で定めると, δ_x は (S, Σ) 上の測度となる. この測度 δ_x を x に質量をもつ (S, Σ) 上の**デルタ測度 (delta measure)** または **Dirac 測度 (Dirac measure)** と呼ぶ.

証明. $\delta_x(\emptyset) = 0$ は明らか. いま, $F_n \in \Sigma$ ($n = 1, 2, \dots$) が $i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \emptyset$ を満たすとする. もしある $n \in \mathbb{N}$ について $x \in F_n$ となるならば, $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ となるから, $\delta_x(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 1$. 一方で仮定より $i \neq n$ なるすべての i について $x \notin F_i$ となるから, $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_x(F_i) = 1$. 他方, もしすべての $n \in \mathbb{N}$ について $x \notin F_n$ となるならば, $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ となるから, $\delta_x(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0 = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_x(F_i)$. 以上より δ_x は (S, Σ) 上の測度である. $\square$

1.7 測度に関する定義

(S, Σ, μ) を測度空間とする.

定義 1.22 (有限測度). μ もしくは (S, Σ, μ) が**有限**であるとは, $\mu(S) < \infty$ であることをいう.

定義 1.23 (σ -有限測度). μ もしくは (S, Σ, μ) が **σ -有限**であるとは, ある $S_n \in \Sigma$ ($n = 1, 2, \dots$) が存在して $\mu(S_n) < \infty$ ($n = 1, 2, \dots$) かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = S$ が成り立つことをいう.

定義 1.24 (確率測度). μ が**確率測度**であるとは, $\mu(S) = 1$ であることをいう. このとき (S, Σ, μ) を**確率空間**と呼ぶ.

注意 1.12. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が確率空間の場合, 以下のような用語 (方言) がしばしば用いられる.

- Ω を**標本空間**と呼ぶ.
- Ω の元を**標本点**と呼ぶ.
- Ω の可測集合 ($\mathcal{F}$ の元) を**事象**と呼ぶ.

例 1.7. μ を (S, Σ) 上の計数測度とする.

- μ が有限であるための必要十分条件は, S が有限集合であることである.
- μ が σ -有限であるための必要十分条件は, S が高々可算集合であることである.
- μ が確率測度であるための必要十分条件は, S が 1 点のみからなる集合であることである.

例 1.8. (S, Σ) 上のデルタ測度は明らかに確率測度である.

例 1.9. S が空でない有限集合ならば, 関数 $\mu_1 : \Sigma \rightarrow [0, 1]$ を $\mu_1(F) = \#F/\#S$ ($F \in \Sigma$) で定めれば, μ_1 は明らかに (S, Σ) 上の確率測度となる. この μ_1 は (S, Σ) 上の**離散一様分布**と呼ばれる.

定義 1.25 (測度ゼロ集合). (a) 集合 F が μ -**測度ゼロ**であるとは, $F \in \Sigma$ かつ $\mu(F) = 0$ であることをいう.

(b) $F \in \Sigma$ とする. $x \in F$ に関する命題 $P(x)$ が F 上 μ **に関してほとんどいたるところ成り立つ**, もしくは μ -**a.e. で成り立つ**とは, 集合 $\{x \in F : P(x) \text{は成り立たない}\}$ が μ -測度ゼロであることをいい, このことを「 $P(x)$ μ -a.e. on F 」などと書く. 文脈から明らかな場合, μ はしばしば省略される. また, $F = S$ の場合, F は通常省略される.

μ が確率測度の場合, 「ほとんどいたるところ」という語句の代わりに「**ほとんど確実に**」もしくは「**確率 1 で**」という語句が通常用いられ, 「a.e.」は「a.s.」で置き換えられる.

例 1.10. $\Sigma = \mathcal{P}(S)$ とする. μ として点 $x \in S$ に質量をもつデルタ測度 δ_x を考える. また, 関数 $f_x : S \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f_x(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y = x, \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める. このとき, $f_x = 0$ μ -a.s. である. 実際, 明らかに $\{y \in S : f_x(y) \neq 0\} \in \Sigma$ であり, また $\mu(\{y \in S : f_x(y) \neq 0\}) = \mu(S \setminus \{x\}) = 0$ となるからである.

1.8 測度の初等的性質

補題 1.10. Σ_0 を S 上の加法族とし, 関数 $\mu : \Sigma_0 \rightarrow [0, \infty]$ は加法的であるとする. このとき, 次が成り立つ.

(a) (単調性) $A, B \in \Sigma_0$ かつ $A \subset B$ ならば, $\mu_0(A) \leq \mu_0(B)$.

(b) (劣加法性) $F_1, \dots, F_n \in \Sigma_0$ ならば,

$$\mu_0\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu_0(F_i).$$

(c) $A, B \in \Sigma_0$ かつ $\mu_0(B) < \infty$ ならば, $\mu_0(B \setminus A) = \mu_0(B) - \mu_0(A \cap B)$.

証明. (a) $C := B \setminus A$ とおくと, $A \cup C = B$ かつ $A \cap C = \emptyset$ となるから, 加法性より $\mu_0(B) = \mu_0(A) + \mu_0(C)$ が成り立つ. $\mu_0(C) \geq 0$ だから $\mu_0(B) \geq \mu_0(A)$ を得る.

(b) n に関する帰納法による. $n = 1$ の場合は明らか. $n \geq 2$ として, $n - 1$ の場合に成立することを仮定する. このとき, $F := \bigcup_{i=1}^n F_i$, $A := \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i$ とおくと, $F = A \cup F_n = (A \setminus F_n) \cup F_n$ となるから, 加法性と単調性より

$$\mu_0\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right) = \mu_0((A \setminus F_n) \cup F_n) = \mu_0(A \setminus F_n) + \mu_0(F_n) \leq \mu_0(A) + \mu_0(F_n)$$

を得る. ここで, 帰納法の仮定より

$$\mu_0(A) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \mu_0(F_i)$$

が成り立つから, 求めるべき式が得られた.

(c) $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ と書けることに注意すると, 加法性より $\mu_0(B) = \mu_0(B \setminus A) + \mu_0(A \cap B)$ が成り立つ. ここで, $\mu_0(B) < \infty$ と単調性より $\mu_0(A \cap B) < \infty$ が成り立つから, 両辺から $\mu_0(A \cap B)$ を引くことが可能で求めるべき式が得られる. $\square$

命題 1.6. (S, Σ, μ) を測度空間とすると、次のことが成り立つ。

(a) $F_n \in \Sigma$ ($n = 1, 2, \dots$) が $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ を満たすならば、

$$\mu(F_n) \rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

(b) $G_n \in \Sigma$ ($n = 1, 2, \dots$) が $G_1 \supset G_2 \supset \dots$ を満たし、かつある $k \in \mathbb{N}$ について $\mu(G_k) < \infty$ を満たすならば、

$$\mu(G_n) \rightarrow \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

(c) (可算劣加法性) 任意の $F_n \in \Sigma$ ($n = 1, 2, \dots$) に対して、

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n).$$

証明. (a) $E_1 := F_1, E_n := F_n \setminus F_{n-1}$ ($n = 2, 3, \dots$) とおくと、 $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$ かつ $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ となるから、可算加法性より

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(E_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)$$

が成り立つ。 $\bigcup_{i=1}^n E_i = F_n$ であるから、示すべき等式を得られた。

(b) $F_n := G_k \setminus G_{k+n}$ ($n=1,2,\dots$) とおく。このとき、 $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = G_k \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{k+n}$ となるから、(a) より $\mu(F_n) \rightarrow \mu(G_k \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} G_{k+i})$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ。ここで、 $\mu(G_k) < \infty$ だから、補題 1.10(c) より $\mu(F_n) = \mu(G_k) - \mu(G_{k+n})$ かつ $\mu(G_k \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} G_{k+i}) = \mu(G_k) - \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} G_{k+i})$ が成り立つ。再び $\mu(G_k) < \infty$ であることに注意すると、これは $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_{k+n}) = \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} G_{k+i})$ を意味する。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_{k+n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_n)$ および $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_{k+i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ に注意すると、求めるべき結論を得る。

(c) (a) および補題 1.10(b) より

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^N F_n\right) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mu(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n).$$

□

注意 1.13. 命題 1.6(b) において、条件 $\mu(G_k) < \infty$ は外すことができない。実際、 $(S, \Sigma) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, μ を (S, Σ) 上の計数測度とし、 $G_n := \{n, n+1, \dots\}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおくと、 $G_1 \supset G_2 \supset \dots$ かつ $\mu(G_n) = \infty$ ($n = 1, 2, \dots$) だが、 $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$ だから $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) = 0$ である。

1.9 一意性の補題

定義 1.26 (π -系). $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(S)$ が S 上の π -系であるとは、すべての $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ について $I_1 \cap I_2 \in \mathcal{I}$ が成り立つことをいう。

例 1.11. $E \subset \mathbb{R}$ に対して、 $\pi(E)$ は E 上の π -系である。実際、任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、 $([-\infty, a] \cap E) \cap ([-\infty, b] \cap E) = [-\infty, a \wedge b] \cap E \in \pi(E)$ となる。

例 1.12. S 上の加法族はすべて S 上の π -系でもある。

補題 1.11 (一意性の補題). $\mathcal{I}$ を S 上の π -系として, $\Sigma := \sigma(\mathcal{I})$ とおく. また, μ_1, μ_2 を (S, Σ) 上の 2 つの有限測度で $\mu_1(S) = \mu_2(S)$ を満たすものとする. このとき, すべての $I \in \mathcal{I}$ について $\mu_1(I) = \mu_2(I)$ が成り立つならば, $\mu_1 = \mu_2$ である.

注意 1.14. 補題 1.11 においても μ_1, μ_2 がともに確率測度であるならば, 条件 $\mu_1(S) = \mu_2(S)$ は自動的に成立する.

注意 1.15. 補題 1.11 において μ_1, μ_2 が有限であるという仮定は外せない. 実際, $\mathcal{I} := \pi(\mathbb{R})$ として, $(S, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ とおき, $\mu_1 : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ を

$$\mu_1(F) = \begin{cases} 0 & \text{if } F = \emptyset, \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定めると, μ_1 は (S, Σ) 上の測度となる. いま μ_2 を (S, Σ) 上の計数測度とすると, 明らかに $\mu_1 \neq \mu_2$ である. 実際, $\mu_1(\{1\}) = \infty$ だが $\mu_2(\{1\}) = 1$ である. 一方で, $\mathcal{I}$ の元はすべて無限集合であるから, すべての $I \in \mathcal{I}$ について $\mu_1(I) = \mu_2(I)$ が成り立つ.

補題 1.11 の証明のためにいくつか準備を行う.

定義 1.27 (Dynkin 系). $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(S)$ が S 上の **Dynkin 系 (Dynkin system)** であるとは, 次の 3 つの条件が成り立つことをいう:

- (i) $S \in \mathcal{D}$.
- (ii) $A, B \in \mathcal{D}$ かつ $A \subset B$ ならば, $B \setminus A \in \mathcal{D}$.
- (iii) $A_n \in \mathcal{D}$ ($n = 1, 2, \dots$) かつ $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ ならば, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

命題 1.7. $\Sigma \subset \mathcal{P}(S)$ が S 上の σ -加法族となるための必要十分条件は, Σ が S 上の π -系かつ Dynkin 系となることである.

証明. 必要性は命題 1.1 と 1.2 から従うから, 十分性を示す. Σ が σ -加法族の公理 (i)–(ii) を満たすことは, Dynkin 系の公理 (i)–(ii) から従う. いま, $F_n \in \Sigma$ ($n = 1, 2, \dots$) とすると, 上の議論から任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $F_n^c \in \Sigma$ が成り立つ. 従って, Σ が π -系であることから $G_n := F_1^c \cap \dots \cap F_n^c \in \Sigma$ が成り立つ. よって, 再び上の議論から $A_n := G_n^c \in \Sigma$ が成り立つ. de Morgan の法則より $A_n = F_1 \cup \dots \cup F_n$ であるから, $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, 従って $\Sigma \ni \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ である. 故に Σ は σ -加法族の公理 (iii) も満たす. $\square$

命題 1.8. 任意の $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(S)$ に対して, $\mathcal{C}$ を含むような S 上の Dynkin 系で最小のものがただ一つ存在する.

この Dynkin 系を $\mathcal{C}$ によって生成される S 上の Dynkin 系と呼び, 記号 $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ で表すことにする.

証明. 命題 1.3 の証明と同様の議論で証明できる. $\square$

補題 1.12 (Dynkin の補題). $\mathcal{I}$ が S 上の π -系ならば, $\mathcal{D}(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I})$ が成り立つ.

証明. 命題 1.7 より $\sigma(\mathcal{I})$ は S 上の Dynkin 系なので, $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ の最小性より $\mathcal{D}(\mathcal{I}) \subset \sigma(\mathcal{I})$ である. 従って, もし $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ が S 上の σ -加法族であることを示せば, $\sigma(\mathcal{I})$ の最小性より $\mathcal{D}(\mathcal{I}) \supset \sigma(\mathcal{I})$ が従うので証明が完成する. さらに, 命題 1.7 よりこれは $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ が π -系であることを示せば従う.

まず, $B \subset S$ で任意の $C \in \mathcal{I}$ に対して $B \cap C \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ を満たすようなものの全体の集合を $\mathcal{D}_1$ とする. $\mathcal{I}$ は π -系だから $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}_1$ である. さらに, $\mathcal{D}_1$ は S 上の Dynkin 系である. 実際, $S \in \mathcal{D}_1$ は $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}(\mathcal{I})$ から従う. また, $A, B \in \mathcal{D}_1$ かつ $A \subset B$ とすると, 任意の $C \in \mathcal{I}$ に対して $A \cap C, B \cap C \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ かつ $A \cap C \subset B \cap C$ となるから, $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ が Dynkin 系であることから $(B \setminus A) \cap C = B \cap C \setminus A \cap C \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ を得る. これは

$B \setminus A \in \mathcal{D}_1$ を意味する. 最後に, $A_n \in \mathcal{D}_1$ ($n = 1, 2, \dots$) が $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ を満たすとする, 任意の $C \in \mathcal{I}$ に対して $A_n \cap C \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ ($n = 1, 2, \dots$) かつ $A_1 \cap C \subset A_2 \cap C \subset \dots$ となるから, $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ が Dynkin 系であることより $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap C = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap C) \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ となる. これは $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}_1$ を意味する. 以上より $\mathcal{D}_1$ は S 上の Dynkin 系である. よって, $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ の最小性より $\mathcal{D}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{D}_1$ を得る. すなわち, 任意の $B \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ と $C \in \mathcal{I}$ に対して $B \cap C \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ が成り立つ.

次に, $C \subset S$ で任意の $B \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ に対して $B \cap C \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$ を満たすようなものの全体の集合を $\mathcal{D}_2$ とする. 上の結果から $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}_2$ である. さらに, 上と同様の議論で $\mathcal{D}_2$ が S 上の Dynkin 系となることを確認できる. 従って, $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ の最小性より $\mathcal{D}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{D}_2$ を得る. これは $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ が π -系であることを意味する. $\square$

補題 1.11 の証明. $\Sigma_1 := \{F \in \Sigma : \mu_1(F) = \mu_2(F)\}$ とおく. 仮定より $\mathcal{I} \subset \Sigma_1$ である. また, Σ_1 は S 上の Dynkin 系である. 実際, $S \in \Sigma_1$ は仮定から従う. また, $A, B \in \Sigma_1$ が $A \subset B$ を満たすとする, 補題 1.10 より

$$\mu_1(B \setminus A) = \mu_1(B) - \mu_1(A) = \mu_2(B) - \mu_2(A) = \mu_2(B \setminus A)$$

が成り立つから, $B \setminus A \in \Sigma_1$ である. さらに, $A_n \in \Sigma_1$ ($n = 1, 2, \dots$) が $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ を満たすならば, 命題 1.6 より

$$\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2(A_n) = \mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

となるから, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma_1$ である. 以上より Σ_1 は S 上の Dynkin 系であるから, $\mathcal{D}(\mathcal{I}) \subset \Sigma_1$ である. Dynkin の補題より $\mathcal{D}(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{I}) = \Sigma$ であるから, これは $\Sigma = \Sigma_1$, すなわち示すべき主張を意味する. $\square$

1.10 外測度

この節では次節で Lebesgue 測度を構成するための準備を行う.

定義 1.28 (集合関数に関する可測性). $\mathcal{G}_0$ を集合 S 上の加法族とし, $\lambda : \mathcal{G}_0 \rightarrow [0, \infty]$ とする. $L \in \mathcal{G}_0$ が λ -可測 (λ -measurable) であるとは, 任意の $G \in \mathcal{G}_0$ に対して

$$\lambda(L \cap G) + \lambda(L^c \cap G) = \lambda(G)$$

が成り立つことをいう.

補題 1.13. $\mathcal{G}_0$ を集合 S 上の加法族とし, $\lambda : \mathcal{G}_0 \rightarrow [0, \infty]$ は $\lambda(\emptyset) = 0$ を満たすとする. このとき, λ -可測集合の全体 $\mathcal{L}_0$ は S 上の加法族となり, かつ λ の $\mathcal{L}_0$ への制限は加法的となる. さらに, $L_1, \dots, L_n \in \mathcal{L}_0$ が $i \neq j \Rightarrow L_i \cap L_j = \emptyset$ を満たすならば, 任意の $G \in \mathcal{G}_0$ に対して

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^n (L_k \cap G)\right) = \sum_{k=1}^n \lambda(L_k \cap G) \quad (1.2)$$

が成り立つ.

証明. 4つのステップに分けて示す.

Step 1. $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_0$ ならば, $L := L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_0$ である. 実際, 任意の $G \in \mathcal{G}_0$ に対して, $L^c \cap G, L_2 \cap G \in \mathcal{G}$ となることに注意すると,

$$\begin{aligned} \lambda(L^c \cap G) &= \lambda(L_2 \cap L^c \cap G) + \lambda(L_2^c \cap L^c \cap G) \quad (\because L_2 \in \mathcal{L}_0) \\ &= \lambda(L_2 \cap L_1^c \cap G) + \lambda(L_2^c \cap G), \\ \lambda(L_2 \cap G) &= \lambda(L_1 \cap L_2 \cap G) + \lambda(L_1^c \cap L_2 \cap G) \quad (\because L_1 \in \mathcal{L}_0) \end{aligned}$$

が成り立つ。従って,

$$\begin{aligned}\lambda(L \cap G) + \lambda(L^c \cap G) &= \lambda(L_1 \cap L_2 \cap G) + \lambda(L_2 \cap L_1^c \cap G) + \lambda(L_2^c \cap G) \\ &= \lambda(L_2 \cap G) + \lambda(L_2^c \cap G) = \lambda(G)\end{aligned}$$

を得る。ただし、最後の等号は $L_2 \in \mathcal{G}$ より従う。以上より $L \in \mathcal{L}_0$ である。

Step 2. $\mathcal{L}_0$ は S 上の加法族である。実際、 $\lambda(\emptyset) = 0$ より $S \in \mathcal{L}_0$ である。また、 $L \in \mathcal{L}_0$ ならば $L^c \in \mathcal{L}_0$ となることは定義より明らか。最後に、 $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_0$ ならば、 $L_1^c, L_2^c \in \mathcal{L}_0$ だから、Step 1 より $L_1^c \cap L_2^c \in \mathcal{L}_0$ であり、従って $L_1 \cup L_2 = (L_1^c \cap L_2^c)^c \in \mathcal{L}_0$ である。

Step 3. (1.2) が成り立つことを n に関する帰納法で示す。 $n = 1$ のときは明らかだから、 $n > 1$ として、 $n - 1$ の場合には成り立つと仮定する。 $L_n \in \mathcal{L}_0$ より

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^n (L_k \cap G)\right) = \lambda\left(L_n \cap \bigcup_{k=1}^n (L_k \cap G)\right) + \lambda\left(L_n^c \cap \bigcup_{k=1}^n (L_k \cap G)\right)$$

が成り立つが、すべての $k \neq n$ について $L_k \cap L_n = \emptyset$ であることに注意すると、これは

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^n (L_k \cap G)\right) = \lambda(L_n \cap G) + \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} (L_k \cap G)\right)$$

を意味する。この式と帰納法の仮定より (1.2) が従う。

Step 4. (1.2) で特に $G = S$ の場合を考えれば、 λ の $\mathcal{L}_0$ への制限は加法的であることが従う。以上で証明は完成した。□

定義 1.29 (外測度). $(S, \mathcal{G})$ を可測空間とする。関数 $\lambda : \mathcal{G} \rightarrow [0, \infty]$ が $(S, \mathcal{G})$ 上の**外測度**であるとは、 λ が次の 3 条件を満たすことをいう：

- (i) $\lambda(\emptyset) = 0$.
- (ii) (単調性) $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ かつ $G_1 \subset G_2$ ならば、 $\lambda(G_1) \leq \lambda(G_2)$.
- (iii) (可算劣加法性) 任意の $G_k \in \mathcal{G}$ ($k = 1, 2, \dots$) に対して、

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(G_k).$$

$(S, \mathcal{P}(S))$ 上の外測度を単に S 上の外測度と呼ぶ。

例 1.13. 補題 1.10 と命題 1.6 より測度は外測度である。

定理 1.2 (Carathéodory の補題). λ を可測空間 $(S, \mathcal{G})$ 上の外測度とする。このとき、 λ -可測集合の全体 $\mathcal{L}$ は S 上の σ -加法族となり、かつ λ の $\mathcal{L}$ への制限は可算加法的となる。

証明. まず、補題 1.13 より $\mathcal{L}$ は S 上の加法族であることに注意しておく。

次に、 $L_i \in \mathcal{L}$ ($i = 1, 2, \dots$) が $i \neq j \Rightarrow L_i \cap L_j = \emptyset$ を満たすならば、 $L := \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i \in \mathcal{L}$ であり、かつ

$$\lambda(L) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(L_i) \tag{1.3}$$

が成り立つことを示す。任意に $G \in \mathcal{G}$ をとる。 λ の劣加法性より

$$\lambda(G) \leq \lambda(L \cap G) + \lambda(L^c \cap G)$$

が成り立つ. 一方で, 各 $n \in \mathbb{N}$ について $M_n := L_1 \cup \cdots \cup L_n$ とおくと, $\mathcal{L}$ が S 上の加法族であることより $M_n \in \mathcal{L}$ となるから,

$$\lambda(G) = \lambda(M_n \cap G) + \lambda(M_n^c \cap G)$$

が成り立つ. $M_n \subset L$ より $M_n^c \supset L^c$ なので, λ の単調性より

$$\lambda(G) \geq \lambda(M_n \cap G) + \lambda(L^c \cap G) = \sum_{i=1}^n \lambda(L_i \cap G) + \lambda(L^c \cap G)$$

を得る. ただし, 最後の等式は (1.2) から従う. $n \rightarrow \infty$ として

$$\lambda(G) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(L_i \cap G) + \lambda(L^c \cap G) \geq \lambda(L \cap G) + \lambda(L^c \cap G)$$

を得る. ただし, 最後の不等式は λ の可算劣加法性から従う. 以上より $L \in \mathcal{L}$ である. また, 特に上の最初の不等式で $G = L$ の場合を考えると

$$\lambda(L) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(L_i) + \lambda(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(L_i)$$

を得る. 逆向きの不等式が λ の可算劣加法性から従うので, (1.3) を得る.

ここまでの議論で λ の $\mathcal{L}$ への制限は可算加法的となることが示された. 従って $\mathcal{L}$ が S 上の σ -加法族であることを示せば証明は完成する. 補題 1.13 より $\mathcal{L}$ は S 上の加法族であるから, $L_i \in \mathcal{L}$ ($i = 1, 2, \dots$) ならば $L := \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i \in \mathcal{L}$ となることを示せばよい. 集合列 $K_1, K_2, \dots$ を帰納的に

$$K_1 := L_1, \quad K_i := L_i \setminus K_{i-1} \quad (i = 2, 3, \dots)$$

で定めると, $\mathcal{L}$ が S 上の加法族であることからすべての i について $K_i \in \mathcal{L}$ であり, かつ定義から $i \neq j \Rightarrow K_i \cap K_j = \emptyset$ が成り立つ. 従って上の結果より $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \in \mathcal{L}$ が成り立つ. $\square$

Carathéodory の補題より, ある集合上に外測度 λ を構成することができれば, それを λ -可測集合の全体に制限することで測度を構成できることがわかる. 外測度の構成には次の結果がよく利用される.

補題 1.14. $(S, \mathcal{G})$ を可測空間, $\emptyset \in \mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$ とし, 関数 $\lambda_0 : \mathcal{G}_0 \rightarrow [0, \infty]$ は $\lambda_0(\emptyset) = 0$ を満たすとする. このとき, 関数 $\lambda : \mathcal{G} \rightarrow [0, \infty]$ を

$$\lambda(G) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_0(G_j) : G_j \in \mathcal{G}_0 \ (j = 1, 2, \dots), G \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \right\} \quad (G \in \mathcal{G})$$

で定めると, λ は $(S, \mathcal{G})$ 上の外測度となる. さらに, 任意の $G \in \mathcal{G}_0$ に対して $\lambda_0(G) \leq \lambda(G)$ が成り立つ.

証明. 後半の主張は $\lambda_0(\emptyset) = 0$ に注意すると定義から明らかだから, 前半の主張を示す. $\lambda(\emptyset) = 0$ は $\lambda_0(\emptyset) = 0$ から従う. λ が単調性を持つことは定義より明らか. 従って, λ が可算劣加法性を持つこと, すなわち任意の $G_i \in \mathcal{G}$ ($i = 1, 2, \dots$) に対して

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(G_i) \tag{1.4}$$

が成り立つことを示せば証明は完成する. もしある i について $\lambda(G_i) = \infty$ となっているのであれば上の不等式は明らかであるから, そうでない場合を考える.

任意に $\varepsilon > 0$ を固定する. 各 i について $\lambda(G_i) < \lambda(G_i) + 2^{-i}\varepsilon$ であるから, ある $G_{ij} \in \mathcal{G}_0$ ($j = 1, 2, \dots$) が存在して $G_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} G_{ij}$ かつ $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_0(G_{ij}) < \lambda(G_i) + 2^{-i}\varepsilon$ を満たす. このとき, $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \subset \bigcup_{i,j=1}^{\infty} G_{ij}$ であるから, 定義より

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \lambda_0(G_{ij}) < \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(G_i) + \varepsilon$$

が成り立つ. $\varepsilon \downarrow 0$ として (1.4) を得る. □

ある外測度 λ を制限することで構成された測度が有用であるためには, 十分多くの集合が λ -可測である必要がある. 特に, $\mathbb{R}^n$ 上に測度を構成する場合, Borel 集合は可測となつてほしい. そこで次の定義を導入する.

定義 1.30 (Borel 外測度). $\mathbb{R}^n$ 上の外測度 λ が **Borel 外測度** であるとは, $\mathbb{R}^n$ の Borel 集合がすべて λ -可測であることをいう.

以下の目的は $\mathbb{R}^n$ 上の外測度が Borel 外測度となるための便利な十分条件を与えることである.

定義 1.31 (集合間の距離). $A, B \subset \mathbb{R}^n$ に対して, A と B の **距離 (distance)** を

$$\text{dist}(A, B) := \inf\{\|x - y\| : x \in A, y \in B\}$$

で定める. 特に, A が 1 点 a からなる場合は $\text{dist}(a, B)$ と書く:

$$\text{dist}(a, B) := \text{dist}(\{a\}, B) = \inf\{\|a - y\| : y \in B\}.$$

定理 1.3 (Carathéodory の判定法). λ を $\mathbb{R}^n$ 上の外測度とする. $\text{dist}(A, B) > 0$ なる任意の $A, B \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

が成り立つならば, λ は Borel 外測度である.

定理 1.3 の証明のために少し準備をする.

定義 1.32 (閉集合). $F \subset \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の **閉集合** であるとは, F^c が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることをいう.

補題 1.15. $F \subset \mathbb{R}^n$ とする. $x \in F$ ならば $\text{dist}(x, F) = 0$ である. また, F が閉集合ならば, 任意の $x \in F^c$ に対して $\text{dist}(x, F) > 0$ である.

証明. 前半は明らかなので, 後半を示す. F^c は開集合だから, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $U(x; \varepsilon) \subset F^c$ となる. このとき, $F \subset U(x; \varepsilon)^c$ となるから, 任意の $y \in F$ に対して $\|x - y\| \geq \varepsilon$ が成り立つ. 従って $\text{dist}(x, F) \geq \varepsilon > 0$ である. □

定理 1.3 の証明. Carathéodory の補題より, λ -可測集合の全体 $\mathcal{L}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の σ -加法族であるから, 任意の $\mathbb{R}^n$ の閉集合 F が $F \in \mathcal{L}$ を満たすことを示せばよい. 任意に $G \subset \mathbb{R}^n$ をとる. 可算劣加法性と $\lambda(\emptyset) = 0$ より

$$\lambda(G) \leq \lambda(F \cap G) + \lambda(F^c \cap G)$$

が成り立つ. 従って,

$$\lambda(G) \geq \lambda(F \cap G) + \lambda(F^c \cap G)$$

を示せば証明は完成する. $\lambda(G) = \infty$ のときは明らかだから, $\lambda(G) < \infty$ の場合を考える.

各 $k \in \mathbb{N}$ について

$$F_k := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, F) \leq \frac{1}{k} \right\}$$

とおく. 任意の $x \in F_k^c$ と $y \in F$ に対して $|x-y| \geq \text{dist}(x, F) > 1/k$ が成り立つから, $\text{dist}(G \cap F_k^c, G \cap F) \geq 1/k > 0$ である. 従って, 仮定より

$$\lambda(G \cap F_k^c) + \lambda(G \cap F) = \lambda((G \cap F_k^c) \cup (G \cap F))$$

が成り立つ. $F_k \supset F$ より $(G \cap F_k^c) \cup (G \cap F) \subset G$ だから, λ の単調性より

$$\lambda(G \cap F_k^c) + \lambda(G \cap F) \leq \lambda(G)$$

を得る. 故に, $\lambda(G \cap F_k^c) \rightarrow \lambda(G \cap F)$ ($k \rightarrow \infty$) となることを示せば証明は完成する.

各 $j \in \mathbb{N}$ について

$$R_j := \left\{ x \in G : \frac{1}{j+1} < \text{dist}(x, F) \leq \frac{1}{j} \right\}$$

とおく. F が閉集合であることから任意の $x \in F^c$ に対して $\text{dist}(x, F) > 0$ が成り立つので, $G \cap F = (G \cap F_k^c) \cup \bigcup_{j=k}^{\infty} R_j$ が成り立つ. 故に, 可算劣加法性より

$$\lambda(G \cap F) \leq \lambda(G \cap F_k^c) + \sum_{j=k}^{\infty} \lambda(R_j)$$

を得る. 単調性より $\lambda(G \cap F_k^c) \leq \lambda(G \cap F^c)$ が成り立つことに注意すると,

$$\sum_{j=k}^{\infty} \lambda(R_j) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \tag{1.5}$$

を示せば証明は完成する.

$x, y \in \mathbb{R}^n$ が $j, k \in \mathbb{N}$ に対して $\text{dist}(x, F) > 1/(j+1)$, $\text{dist}(x, F) \leq 1/k$ を満たすならば

$$\frac{1}{j+1} < \text{dist}(x, F) \leq \|x-y\| + \text{dist}(y, F) \leq \|x-y\| + \frac{1}{k}$$

が成り立つから, $j+2 \leq k$ ならば

$$\text{dist}\left(\bigcup_{i=1}^j R_i, R_k\right) \geq \frac{1}{j+1} - \frac{1}{k} > 0$$

が成り立つ. 従って, 仮定を繰り返し用いることで, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{j=1}^N \lambda(R_{2j}) = \lambda\left(\bigcup_{j=1}^N R_{2j}\right)$$

および

$$\sum_{j=1}^N \lambda(R_{2j-1}) = \lambda\left(\bigcup_{j=1}^N R_{2j-1}\right)$$

が成り立つ. すべての j について $R_j \subset G$ が成り立つことに注意すると, 単調性より

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(R_j) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2N} \lambda(R_j) \leq 2\lambda(G) < \infty$$

を得る. これは (1.5) を意味する. □

1.11 Lebesgue 測度

この節の主要な目標は次の定理を示すことである:

定理 1.4. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の測度 μ で, すべての $-\infty < a \leq b < \infty$ に対して

$$\mu((a, b]) = b - a \quad (1.6)$$

を満たすようなものがただ一つだけ存在する. この測度 μ を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の **Lebesgue 測度**と呼ぶ.

定理 1.4 の一意性の部分は一意性の補題を用いて示すことができる. 存在を示すのに前節の結果を使うが, そのために閉区間がコンパクトであるという事実を用いる.

定義 1.33 (コンパクト集合). $C \subset \mathbb{R}^n$ とする.

- (a) $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ が C の開被覆であるとは, $C \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ が成り立つことをいう.
- (b) $C \subset \mathbb{R}^n$ がコンパクトであるとは, C の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して, $\mathcal{U}$ の有限部分集合で再び C の開被覆となるものが存在することをいう.

補題 1.16 (Heine-Borel の被覆定理). $\mathbb{R}$ の閉区間はコンパクトである.

証明. 少し進んだ微分積分学の本か, 位相空間論の本には大抵書いてあるが, 例えば [13, 定理 1-3] を参照. $\square$

補題 1.17. $a < b, -\infty < a_i < b_i < \infty$ ($i = 1, \dots, n$) が $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i)$ を満たすならば,

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) > b - a$$

が成り立つ.

証明. n に関する帰納法による. $n = 1$ のときは明らかだから, $n > 1$ とし, $n - 1$ については成り立つと仮定する. いま $a \in [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i)$ より $a \in (a_j, b_j)$ なる $j \in \{1, \dots, n\}$ が存在する. もし $b \leq b_j$ であれば, $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \geq b_j - a_j > b - a$ となって示すべき不等式を得る. $b > b_j$ の場合, $[b_j, b] \subset \bigcup_{i:i \neq j} (a_i, b_i)$ とならなければならないから, 帰納法の仮定より $\sum_{i:i \neq j} (b_i - a_i) > b - b_j$ が成り立つ. 故に

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) > b - b_j + b_j - a_j > b - a$$

となって示すべき不等式を得る. $\square$

定理 1.4 の証明. 4 ステップに分けて証明する.

Step 1. まず一意性を示す. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の測度 μ_1, μ_2 がともに (1.6) を満たすとする. いま, 各 $n \in \mathbb{N}$ について, 補題 1.2 より $\mathcal{B}((-n, n]) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が成り立つから, 各 $i = 1, 2$ について μ_i の $\mathcal{B}((-n, n])$ への制限 $\mu_i^{(n)}$ を考えることができる. $\mu_i^{(n)}$ が $((-n, n], \mathcal{B}((-n, n]))$ 上の測度となっていることは容易に確認できる. さらに, (1.6) より, すべての $-n \leq a \leq b \leq n$ について $\mu_i^{(n)}((a, b]) = b - a$ が成り立つ. これはすべての $I \in \pi((-n, n])$ について $\mu_1^{(n)}(I) = \mu_2^{(n)}(I)$ が成り立つこと, および $\mu_1^{(n)}((-n, n]) = \mu_2^{(n)}((-n, n]) = 2n < \infty$ を意味する. 従って, 一意性の補題より $\mu_1^{(n)} = \mu_2^{(n)}$ を得る. 故に, 任意の $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して, $F \cap (-n, n] \in \mathcal{B}((-n, n])$ ($n = 1, 2, \dots$) となることに注意すれば, 命題 1.6 より,

$$\mu_1(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1(F \cap (-n, n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1^{(n)}(F \cap (-n, n])$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2^{(n)}(F \cap (-n, n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2(F \cap (-n, n]) = \mu_2(F)$$

を得る. 以上より $\mu_1 = \mu_2$ である.

Step 2. 残りの 3 ステップで存在を示す. $\mathcal{I} := \{(a, b] : -\infty < a \leq b < \infty\}$ とし, 各 $I = (a, b] \in \mathcal{I}$ について $|I| := b - a$ と定める. 補題 1.14 を $(S, \mathcal{G}) = (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$, $\mathcal{G}_0 = \mathcal{I}$ および $\lambda_0(I) = |I|$ ($I \in \mathcal{I}$) として適用することで $\mathbb{R}$ 上の外測度 λ を定める.

Step 3. 任意の $I = (a, b] \in \mathcal{I}$ に対して $\lambda(I) = b - a$ が成り立つ. 実際, まず補題 1.14 の後半の主張から $\lambda(I) \leq b - a$ である. 従って $\lambda(I) \geq b - a$ を示せばよい. $a = b$ の場合は明らかだから, $a < b$ とする. $I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ なる $I_i = (a_i, b_i] \in \mathcal{I}$ ($i = 1, 2, \dots$) を任意にとる. $a < a' < b' < b$ なる a', b' を任意にとると, $[a', b'] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ となるから, $\{(a_i, b_i) : i \in \mathbb{N}\}$ は $[a', b']$ の開被覆である. 従って, Heine-Borel の被覆定理より, ある有限集合 $\mathcal{J} \subset \mathbb{N}$ が存在して $[a', b'] \subset \bigcup_{i \in \mathcal{J}} (a_i, b_i)$ となる. 故に, 補題 1.17 より

$$\sum_{i \in \mathcal{J}} (b_i - a_i) > b' - a'$$

が成り立つ. $a' \downarrow a, b' \uparrow b$ として $\sum_{i \in \mathcal{J}} |I_i| \geq b - a$ を得るから, $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \geq b - a$ である. これは $\lambda(I) \geq b - a$ を意味する.

Step 4. もし λ が $\mathbb{R}$ 上の Borel 外測度であることを証明できれば, Carathéodory の補題より λ の $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ への制限 μ は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の測度であり, かつ Step 3 より (1.6) を満たすので存在の証明が完成する. λ が $\mathbb{R}$ 上の Borel 外測度であることを示すには, Carathéodory の判定法より, $\text{dist}(A, B) > 0$ なる任意の $A, B \subset \mathbb{R}$ に対して $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ が成り立つことを示せばよい. λ が外測度であることに注意すると, これは $\lambda(A \cup B) \geq \lambda(A) + \lambda(B)$ を示せば従う. よって, λ の定義より, $A \cup B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ なる任意の $I_j \in \mathcal{I}$ に対して

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \geq \lambda(A) + \lambda(B)$$

を示せば証明は完成する.

$\varepsilon := \text{dist}(A, B) > 0$ とおく. 必要であれば各 I_j を細分して得られる区間たちを新たに考えることにより, すべての j について $|I_j| \leq \varepsilon/2$ が成り立つと仮定して一般性を失わない. このとき, 各 $S \in \{A, B\}$ に対して $\mathcal{J}_S := \{j \in \mathbb{N} : I_j \cap S \neq \emptyset\}$ とおくと, $S \subset \bigcup_{j \in \mathcal{J}_S} I_j$ が成り立つ. さらに, $\mathcal{J}_A \cap \mathcal{J}_B = \emptyset$ である. 実際, もし $j \in \mathcal{J}_A \cap \mathcal{J}_B$ ならば, 定義より $a \in I_j \cap A, b \in I_j \cap B$ なる点 a, b が取れるから, $\varepsilon \leq |a - b| \leq |I_j| \leq \varepsilon/2$ となって矛盾するからである. 故に,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \geq \sum_{j \in \mathcal{J}_A} |I_j| + \sum_{j \in \mathcal{J}_B} |I_j| \geq \lambda(A) + \lambda(B)$$

が成り立つ. □

最後に Lebesgue 測度の基本的性質をいくつか示しておく.

補題 1.18. 任意の $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して,

$$F + a := \{x + a : x \in F\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad aF := \{ax : x \in F\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

証明. 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $aF + b \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ を示せばよい. $F = \emptyset$ のときは $aF + b = \emptyset$ となり, $F \neq \emptyset$ かつ $a = 0$ のときは $aF + b = \{b\}$ となるから, $F \neq \emptyset$ かつ $a \neq 0$ の場合を考えればよい.

$\mathfrak{M} := \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : aF + b \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ とおく. 関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = (x - b)/a$ で定めると, 任意の $F \subset \mathbb{R}$ に対して $f^{-1}(F) = \{x \in \mathbb{R} : (x - b)/a \in F\} = aF + b$ が成り立つことに注意すれば, 補題 1.1 より

$\mathfrak{M}$ は $\mathbb{R}$ 上の σ -加法族となる. また, 定義から明らかに $\pi(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{M}$ となるから, $\sigma(\pi(\mathbb{R})) \subset \mathfrak{M}$ である. 従って定理 1.1 より $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{M}$ となる. 以上より示すべき結論が得られた. $\square$

注意 1.16. 一般に $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であっても $A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ となるとは限らない. [4] 参照.

命題 1.9. λ を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の Lebesgue 測度とすると, 次が成り立つ.

- (a) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\lambda(\{x\}) = 0$.
- (b) 任意の $a \leq b$ に対して, $\lambda((a, b)) = \lambda([a, b]) = \lambda((a, b]) = \lambda([a, b)) = b - a$.
- (c) (平行移動不変性) 任意の $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\lambda(F + x) = \lambda(F)$.
- (d) (スケール則) 任意の $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して, $\lambda(cF) = |c|\lambda(F)$.
- (e) λ は σ -有限である.

証明. (a) 命題 1.6 と (1.6) より $\lambda(\{x\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda((x - 1/n, x + 1/n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2/n = 0$ となる.

(b) (a), (1.6) と加法性からただちに従う.

(c) 関数 $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ を $\mu(F) = \lambda(F + x)$ で定めると, μ が (1.6) を満たす $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の測度であることが容易に確認できるから, 定理 1.4 の一意性の部分から従う.

(d) $c = 0$ の場合は $\lambda(cF) = \lambda(\{0\}) = 0 = |c|\lambda(F)$ となるから, $c \neq 0$ の場合を考える. 関数 $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ を $\mu(F) = |c|^{-1}\lambda(cF)$ で定めると, μ が (1.6) を満たす $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の測度であることが容易に確認できるから, 定理 1.4 の一意性の部分から従う.

(e) $\lambda((-n, n]) = 2n < \infty$ ($n = 1, 2, \dots$) かつ $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n]$ だから. $\square$

定義 1.34. $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ のとき, $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であるから, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の Lebesgue 測度の $\mathcal{B}(E)$ への制限 μ を考えることができる. この μ は明らかに $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の測度であり, $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の **Lebesgue 測度**と呼ばれる.

2 可測関数

$(S, \Sigma), (S_1, \Sigma_1)$ を 2 つの可測空間とする.

2.1 可測関数

定義 2.1 (可測関数). $h : S \rightarrow S_1$ とする. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(S)$ に対して,

$$h^{-1}(\mathcal{A}) := \{h^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$$

と定義する. $h^{-1}(\Sigma_1) \subset \Sigma$ が成り立つとき, h は Σ/Σ_1 -可測であるという.

注意 2.1. 補題 1.1(b) より, $h^{-1}(\Sigma_1)$ は S 上の σ -加法族である. 従って, $h^{-1}(\Sigma_1)$ は h が Σ/Σ_1 -可測となるような S 上の Σ -加法族のうち最小のものとなっている.

補題 2.1. $S_1 = \mathbb{R}^n$ または $S_1 = \overline{\mathbb{R}}$ として, $E \subset S_1, h : S \rightarrow E$ とする (従って $h : S \rightarrow S_1$ でもある). h が $\Sigma/\mathcal{B}(E)$ -可測となるための必要十分条件は, h が $\Sigma/\mathcal{B}(S_1)$ -可測となることである.

証明. 任意の $A \in \mathcal{B}(S_1)$ に対して $h^{-1}(A) = h^{-1}(A \cap E)$ が成り立つことと補題 1.2 及び 1.3 から従う. $\square$

定義 2.2 ($\mathbb{R}^n$ or $\overline{\mathbb{R}}$ に値をとる可測関数). 補題 2.1 の設定において, h が $\Sigma/\mathcal{B}(E)$ -可測であることを単に h は Σ -可測であるということにする. 補題 2.1 によりこの定義は h の値域 E の取り方に依存しない.

例 2.1 (定数関数). $c \in S_1$ として, 関数 $h : S \rightarrow S_1$ を $h(x) = c$ で定める. このとき, 任意の $A \in \Sigma_1$ に対して, $c \in A$ ならば $h^{-1}(A) = S \in \Sigma, c \notin A$ ならば $h^{-1}(A) = \emptyset \in \Sigma$ だから, h は Σ/Σ_1 -可測である.

例 2.2 (指示関数). $F \subset S$ の指示関数 1_F が Σ -可測であるための必要十分条件は $F \in \Sigma$ である. 実際, 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して, $0, 1 \in A$ ならば $1_F^{-1}(A) = S, 0 \in A, 1 \notin A$ ならば $1_F^{-1}(A) = F^c, 0 \notin A, 1 \in A$ ならば $1_F^{-1}(A) = F, 0, 1 \notin A$ ならば $1_F^{-1}(A) = \emptyset$ となるからである.

定義 2.3 (Borel 関数). $S \subset \mathbb{R}^n, \Sigma = \mathcal{B}(S)$ の場合, Σ -可測であることを **Borel 可測**であるともいい, Σ -可測関数は **Borel 関数**とも呼ばれる.

2.2 可測関数の初等的性質

$h : S \rightarrow S_1$ とする.

補題 2.2. $\mathcal{C} \subset \Sigma_1$ が $\sigma(\mathcal{C}) = \Sigma_1$ かつ $h^{-1}(\mathcal{C}) \subset \Sigma$ を満たすならば, h は Σ/Σ_1 -可測である.

証明. $\mathfrak{M} := \{E \in \mathcal{P}(S_1) : h^{-1}(E) \in \Sigma\}$ とおくと, 仮定より $\mathcal{C} \subset \mathfrak{M}$ である. 補題 1.1 より $\mathfrak{M}$ は S_1 上の σ -加法族であるから, これは $\Sigma_1 = \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathfrak{M}$ を意味する. すなわち, 任意の $F \in \Sigma_1$ について $h^{-1}(F) \in \Sigma$ となるから, h は Σ/Σ_1 -可測である. $\square$

命題 2.1. $f : S \rightarrow [-\infty, \infty]$ に対して, 次の 5 条件は互いに同値である:

- (i) f は Σ -可測である.
- (ii) 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して $\{f \leq c\} := \{x \in S : f(x) \leq c\} \in \Sigma$ が成り立つ.
- (iii) 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して $\{f < c\} := \{x \in S : f(x) < c\} \in \Sigma$ が成り立つ.
- (iv) 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して $\{f \geq c\} := \{x \in S : f(x) \geq c\} \in \Sigma$ が成り立つ.
- (v) 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して $\{f > c\} := \{x \in S : f(x) > c\} \in \Sigma$ が成り立つ.

証明. (i) $\Rightarrow$ (v): $(c, \infty] \in \mathcal{B}([-\infty, \infty])$ より従う.

(v) $\Rightarrow$ (iv): $\{f \geq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > c - 1/n\}$ であるから.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): $\{f < c\} = \{f \geq c\}^c$ であるから.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): $\{f \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f < c + 1/n\}$ であるから.

(ii) $\Rightarrow$ (i): (ii) は $f^{-1}(\pi([-\infty, \infty])) \subset \Sigma$ を意味するから, 定理 1.1 と補題 2.2 から従う. $\square$

補題 2.3. $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合の族とすると, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ となる.

証明. $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ とすると, ある $\lambda \in \Lambda$ について $x \in U_\lambda$ となる. $U_\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ だから, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $U(x; \varepsilon) \subset U_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となる. 従って $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ である. $\square$

補題 2.4 (連続関数の特徴付け). $S \subset \mathbb{R}^n, S_1 \subset \mathbb{R}^m$ とする. h が連続であるための必要十分条件は, $h^{-1}(\mathcal{O}(S_1)) \subset \mathcal{O}(S)$ である.

証明. 必要性: 任意の $V \in \mathcal{O}(S_1)$ に対して $h^{-1}(V) \in \mathcal{O}(S)$ となることを示せばよい. $\mathcal{U} := \{U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) : U \cap S \subset h^{-1}(V)\}$, $U_0 := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ とおくと, 補題 2.3 より $U_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ であり, また定義より明らかに $U_0 \cap S \subset h^{-1}(V)$ が成り立つ. 従って $U_0 \cap S \supset h^{-1}(V)$ を示せば, $h^{-1}(V) = U_0 \cap S \in \mathcal{O}(S)$ となって証明が完成する.

$V \in \mathcal{O}(S_1)$ よりある $W \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m)$ が存在して $V = W \cap S_1$ と書ける. いま $x \in h^{-1}(V)$ とすると, $h(x) \in V \subset W$ だから, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $U(h(x); \varepsilon) \subset W$ となる. ここで, h は連続だから, ある $\delta > 0$ が存在して $h(U(x; \delta) \cap S) \subset U(h(x); \varepsilon) \subset W$ となる. これは $U(x; \delta) \cap S \subset h^{-1}(W) = h^{-1}(V)$ を意味する. このことと $U(x; \delta) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ より $U(x; \delta) \in \mathcal{U}$ を得るから, $x \in U(x; \delta) \in U_0$ である. $x \in h^{-1}(V)$ より $x \in S$ であるから, $x \in U_0 \cap S$ となり証明は完成した.

十分性: 任意に $x \in S$ と $\varepsilon > 0$ をとる. $U(h(x); \varepsilon) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m)$ より $U(h(x); \varepsilon) \cap S_1 \in \mathcal{O}(S_1)$ であるから, 仮定より $h^{-1}(U(h(x); \varepsilon)) \in \mathcal{O}(S)$ である. すなわち, ある $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ が存在して $h^{-1}(U(h(x); \varepsilon)) = U \cap S$ と書ける. このとき $x \in h^{-1}(U(h(x); \varepsilon)) \subset U$ であるから, ある $\delta > 0$ が存在して $U(x; \delta) \subset U$ となる. このとき $\|y - x\| < \delta$ なる任意の $y \in S$ について $y \in U \cap S = h^{-1}(U(h(x); \varepsilon))$ が成り立つから, $\|h(y) - h(x)\| < \varepsilon$ となる. これは h が点 x で連続であることを意味する. $\square$

命題 2.2 (連続関数の Borel 可測性). $S \subset \mathbb{R}^n, S_1 \subset \mathbb{R}^m$ とする. h が連続ならば, h は Borel 可測である.

証明. 補題 2.4 より $h^{-1}(\mathcal{O}(S_1)) \subset \mathcal{O}(S) \subset \mathcal{B}(S)$ が成り立つから, 補題 2.2 より h は $\mathcal{B}(S)/\mathcal{B}(S_1)$ -可測, すなわち Borel 可測である. $\square$

注意 2.2. $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が連続であっても, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して $h(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ となるとは限らない. [3, Section 13.2] もしくは [18, 定理 13.3] 参照.

命題 2.3 (合成関数の可測性). (S_2, Σ_2) を可測空間, $h_1 : S_1 \rightarrow S_2$ とする. このとき, h が Σ/Σ_1 -可測, h_1 が Σ_1/Σ_2 -可測ならば, $h_1 \circ h$ は Σ/Σ_2 -可測である.

証明. 任意に $F \in \Sigma_2$ をとる. h_1 が Σ_1/Σ_2 -可測であることから $h_1^{-1}(F) \in \Sigma_1$ であり, h が Σ/Σ_1 -可測であることから $h^{-1}(h_1^{-1}(F)) \in \Sigma$ である. $(h_1 \circ h)^{-1}(F) = h^{-1}(h_1^{-1}(F))$ であるから, 題意は示された. $\square$

補題 2.5. $\mathbb{R}^n$ の任意の開集合は, 高々可算個の $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ ($a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$) という形の集合の和集合として表すことができる.

証明. 任意に $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ をとる. U の部分集合 A である $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ を用いて $A = (a_1, b_1) \times$

$\cdots \times (a_n, b_n)$ という形に書けるもの全体の集合を $\mathcal{A}$ とする. $\mathbb{Q}^{2n}$ が可算集合であることから $\mathcal{A}$ は可算集合である. 従って $U = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ となることを示せば証明は完成する.

$U \supset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ は $\mathcal{A}$ の定義より明らか. いま $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ とすると, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $U(x; \varepsilon) \subset U$ が成り立つ. ここで, 各 $i = 1, \dots, n$ について, 有理数の稠密性より $x_i - \varepsilon/\sqrt{n} < a_i < x_i < b_i < x_i + \varepsilon/\sqrt{n}$ を満たす $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ が取れる. このとき, 任意の $y = (y_1, \dots, y_n) \in A := (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ に対して,

$$\|y - x\|^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2$$

となるから, $y \in U(x; \varepsilon) \subset U$ となる. すなわち $A \subset U$ となるから, $A \in \mathcal{A}$ である. 故に, $x \in A \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ となるので, $U \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ が示された. $\square$

補題 2.6. $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ とし, 各 $i = 1, \dots, n$ について f の第 i 座標関数を f_i と書くことにする. このとき次の 2 条件は互いに同値である:

- (i) f は Σ -可測である.
- (ii) すべての $i = 1, \dots, n$ について f_i は Σ -可測である.

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) 各 $i = 1, \dots, n$ について関数 $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を $\pi(x_1, \dots, x_n) = x_i$ で定める. π_i は連続であるから, 命題 2.2 より Borel 可測である. 従って条件 (i) と命題 2.3 より $f_i = \pi_i \circ f$ は Σ -可測である.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\mathcal{A} := \{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) : a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}\}$ とおく. 補題 2.5 より $\mathbb{R}^n$ の任意の開集合は $\mathcal{A}$ の元の可算和で表されるから, $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ. 従って, 補題 2.2 より $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \Sigma$ を示せば証明は完成する. $A = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \in \mathcal{A}$ とすると, (ii) より $f^{-1}(A) = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}((a_i, b_i)) \in \Sigma$ となるから, 題意は示された. $\square$

命題 2.4 (和と積の可測性). $f : S \rightarrow \mathbb{R}, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ がともに Σ -可測ならば, $f + g, f \cdot g$ も Σ -可測である.

証明. 関数 $h : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $h(x) = (f(x), g(x))$ で定める. 補題 2.6 より h は Σ -可測である. 一方で, 関数 $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ および $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $\varphi(x, y) = x + y, \psi(x, y) = xy$ で定めると, φ, ψ はともに連続だから, 命題 2.2 より Borel 可測である. $f + g = \varphi \circ h, f \cdot g = \psi \circ h$ だから, 命題 2.3 より示すべき結論が従う. $\square$

系 2.1 (スカラー倍の可測性). $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ が Σ -可測ならば, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して αf も Σ -可測である.

証明. 定数関数が Σ -可測であることに注意すれば, 積の可測性に関する結果から従う. $\square$

演習問題 4. 関数 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が非減少ならば, g は Borel 可測となることを示せ.

2.3 上限・下限・極限の可測性

命題 2.5 (上限・下限の可測性). 各 $n \in \mathbb{N}$ について, $f_n : S \rightarrow [-\infty, \infty]$ は Σ -可測であるとする. このとき, $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ はともに Σ -可測である.

証明. 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq c \right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq c\} \in \Sigma, \quad \left\{ \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \geq c \right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \geq c\} \in \Sigma$$

となるから, 命題 2.1 より結論が従う. $\square$

系 2.2 (最大値・最小値の可測性). $f_i : S \rightarrow [-\infty, \infty]$ ($i = 1, \dots, n$) が Σ -可測ならば, $f_1 \vee \dots \vee f_n, f_1 \wedge \dots \wedge f_n$ も Σ -可測である.

証明. $m > n$ に対して $f_m := f_n$ とおけば, $f_1 \vee \dots \vee f_n = \sup_i f_i, f_1 \wedge \dots \wedge f_n = \inf_i f_i$ となるため. $\square$

定義 2.4 (上極限・下極限). $(a_n)_{n=1}^\infty$ を $[-\infty, \infty]$ の点列とする. このとき, $(\sup_{k:k \geq n} a_k)_{n=1}^\infty$ は明らかに非増加であるから, 補題 1.5 より $n \rightarrow \infty$ のときの極限が存在する. この極限を $(a_n)_{n=1}^\infty$ の**上極限**と呼び, 記号 $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ で表す. すなわち,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k:k \geq n} a_k \left(= \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k:k \geq n} a_k \right)$$

である. 同様に, $(a_n)_{n=1}^\infty$ の**下極限**を

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k:k \geq n} a_k \left(= \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k:k \geq n} a_k \right)$$

で定義する.

補題 2.7. $(a_n)_{n=1}^\infty$ を $[-\infty, \infty]$ の点列, $\alpha \in [-\infty, \infty]$ とする. $a_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$) となるための必要十分条件は, $\limsup_n a_n = \liminf_n a_n = \alpha$ となることである.

証明. 必要性 $\limsup_n a_n = \alpha$ を示す. まず, 不等式 $a_n \leq \sup_{k:k \geq n} a_k$ と仮定より $\alpha \leq \limsup_n a_n$ は明らか. 従って $\alpha = \infty$ の場合は $\limsup_n a_n = \infty$ となるから, $\alpha < \infty$ の場合を考えればよい. $a_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$) だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N \Rightarrow a_n \in U(\alpha; \varepsilon/2)$ が成り立つ. $\alpha = -\infty$ の場合, これは $n \geq N \Rightarrow \sup_{k:k \geq n} a_k \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ を意味するから, $n \geq N \Rightarrow \sup_{k:k \geq n} a_k \in U(\alpha; \varepsilon)$ である. 一方で $\alpha \in \mathbb{R}$ の場合, これは $n \geq N \Rightarrow \sup_{k:k \geq n} a_k \leq \alpha + \varepsilon/2 < \alpha + \varepsilon$ を意味するから, $\sup_{k:k \geq n} a_k \geq \limsup_n a_n \geq \alpha$ と合わせて $n \geq N \Rightarrow \sup_{k:k \geq n} a_k \in U(\alpha; \varepsilon)$ を得る. 以上より $\limsup_n a_n = \lim_n \sup_{k:k \geq n} a_k = \alpha$ である.

同様の議論で $\liminf_n a_n = \alpha$ も示せる.

十分性 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\inf_{k:k \geq n} a_k \leq a_n \leq \sup_{k:k \geq n} a_k$ が成り立つから, はさみうちの原理によって示すべき結論を得る. $\square$

演習問題 5. $(a_n)_{n=1}^\infty$ を $[-\infty, \infty]$ の点列とする.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

が成り立つことを示せ.

演習問題 6. $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty$ を $[-\infty, \infty]$ の 2 つの点列とする. すべての n について $a_n \leq b_n$ が成り立つとき,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$$

が成り立つことを示せ.

命題 2.6 (上極限・下極限の可測性). 各 $n \in \mathbb{N}$ について, $f_n : S \rightarrow [-\infty, \infty]$ は Σ -可測であるとする. このとき, $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ はともに Σ -可測である.

証明. 命題 2.5 から直ちに従う. $\square$

系 2.3. 各 $n \in \mathbb{N}$ について, $f_n : S \rightarrow [-\infty, \infty]$ は Σ -可測であるとする. このとき, 関数列 $(f_n)_{n=1}^\infty$ がある関数 $f : S \rightarrow [-\infty, \infty]$ に各点収束するならば, f は Σ -可測である.

証明. 仮定の下では補題 2.7 より $f = \limsup_n f_n$ となるから, 命題 2.6 より結論が従う. $\square$

補題 2.8. $f : S \rightarrow [-\infty, \infty], g : S \rightarrow [-\infty, \infty]$ がともに Σ -可測ならば, $\{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\} \in \Sigma$.

証明. まず, $\{f < g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \{g > q\}) \in \Sigma$ である. 次に, $\{f = g\}^c = \{f < g\} \cup \{f > g\} \in \Sigma$ より $\{f = g\} \in \Sigma$ である. 最後に, $\{f \leq g\} = \{f < g\} \cup \{f = g\} \in \Sigma$ である. $\square$

命題 2.7. 各 $n \in \mathbb{N}$ について, $f_n : S \rightarrow [-\infty, \infty]$ は Σ -可測であるとする. また, $f : S \rightarrow [-\infty, \infty]$ も Σ -可測であるとする. このとき, $F := \{x \in S : f_n(x) \rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty)\} \in \Sigma$ である.

証明. 補題 2.7 より $F = \{\limsup_n f_n = f\} \cap \{\liminf_n f_n = f\}$ と書きなおせるので, 命題 2.6 と補題 2.8 より結論が従う. $\square$

2.4 確率変数

確率変数は, 数学的には, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を設定した下で, Ω から $\mathbb{R}$ への $\mathcal{F}$ -可測関数として定式化される. より一般に, n 次元確率変数は Ω から $\mathbb{R}^n$ への $\mathcal{F}$ -可測関数として定式化される. ここでは簡単な例として, コイントスのモデルが測度論的確率論の枠組みにおいてどのように表されるかを見てみる.

例 2.3 (コイントスのモデル). $\Omega = \{0, 1\}^n, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ として, P を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の離散一様分布とする. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間である. いま, 「コインを投げて表が出る」という根元事象を 1, 「コインを投げて裏が出る」という根元事象を 0 に対応させると, 標本点 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ はコインを n 回投げた際に得られる表裏の結果に対応するとみなせる. いま, 各 $i = 1, \dots, n$ について関数 $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を $X(\omega) = \omega_i$ で定めれば, X_i は確率変数であり, i 回目に投げたコインの表裏に応じて 1 と 0 の値をとる変数となる. また, n 回投げたうちの表が出た回数は $S_n = X_1 + \dots + X_n$ で表されるが, これも確率変数である.

確率論で現れる他の諸概念が測度論的確率論の枠組みにおいてどのように定式化されるということについてはあとで詳しく述べる.

3 Lebesgue 積分

(S, Σ, μ) を測度空間とする. また, $S \neq \emptyset$ とする.

3.1 単関数

定義 3.1 (単関数). $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ が単関数であるとは, f の像 $f(S)$ が有限集合であることをいう.

注意 3.1. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ が単関数のとき, 明らかに

$$f = \sum_{\alpha \in f(S)} \alpha 1_{\{f=\alpha\}} \quad (3.1)$$

が成り立つ.

補題 3.1. 単関数 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ が Σ -可測であるための必要十分条件は, 任意の $\alpha \in f(S)$ に対して $\{f = \alpha\} \in \Sigma$ が成り立つことである.

証明. 必要性は任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ について $\{\alpha\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であることから従う. 十分性は (3.1) 式と命題 2.4 から従う. $\square$

記号. Σ -可測な非負単関数全体の集合を $\text{SF}(\Sigma)^+$ で表す. また, 関数列 $f_n : S \rightarrow [-\infty, \infty]$ ($n = 1, 2, \dots$) が関数 $f : S \rightarrow [-\infty, \infty]$ に各点収束し, かつ $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ を満たすことを記号 $f_n \uparrow f$ ($n \rightarrow \infty$) で表す.

定理 3.1 (単関数近似定理). $f : S \rightarrow [0, \infty]$ が Σ -可測ならば, ある $f_n \in \text{SF}(\Sigma)^+$ ($n = 1, 2, \dots$) が存在して $f_n \uparrow f$ ($n \rightarrow \infty$) を満たす.

証明. $\delta_n := 2^{-n}$ とおく. また, $t \in \mathbb{R}$ に対して $k_n(t) := \lfloor t/\delta_n \rfloor$ とおく. さらに, 関数 $\varphi_n : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ を

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} k_n(t)\delta_n & t \in [0, n) \text{ のとき,} \\ n & t \in [n, \infty] \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める. 明らかに $\varphi_n([0, \infty]) = \{0 \cdot \delta_n, 1 \cdot \delta_n, \dots, (n/\delta_n) \cdot \delta_n\}$ であり, かつ各 $i = 0, 1, \dots, n/\delta_n$ について

$$\{\varphi_n = i\delta_n\} = \begin{cases} [i\delta_n, (i+1)\delta_n) & i < n/\delta_n \text{ のとき,} \\ [n, \infty] & i = n/\delta_n \text{ のとき} \end{cases}$$

となるから, 補題 3.1 より φ_n は $\mathcal{B}([0, \infty])$ -可測である. さらに, 任意の $t \in [0, \infty]$ について $\varphi_n(t) \rightarrow t$ ($n \rightarrow \infty$) かつ $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t) \leq \dots$ となることが容易に確認できる. 従って, $f_n := \varphi_n \circ f$ とおけば, $f_n \uparrow f$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ. φ_n が単関数であることから f_n も単関数であり, また命題 2.3 より f_n は Σ -可測である. 従って $f_n \in \text{SF}(\Sigma)^+$ であるから定理の証明は完成した. $\square$

系 3.1. $f : S \rightarrow [0, \infty], g : S \rightarrow [0, \infty]$ がともに Σ -可測ならば, $f + g, f \cdot g$ もともに Σ -可測である.

証明. 単関数近似定理より, ある $f_n, g_n \in \text{SF}(\Sigma)^+$ ($n = 1, 2, \dots$) が存在して $f_n \uparrow f, g_n \uparrow g$ が成り立つ. このとき補題 1.6 より $(f_n + g_n)_{n=1}^\infty, (f_n \cdot g_n)_{n=1}^\infty$ はそれぞれ $f + g, f \cdot g$ に各点収束する. 従って命題 2.4 と系 2.3 より結論が従う. $\square$

3.2 非負単関数の積分

定義 3.2 (非負単関数の積分). $f \in \text{SF}(\Sigma)^+$ と $E \in \Sigma$ に対して, μ に関する f の E 上の Lebesgue 積分を

$$\int_E f d\mu := \sum_{\alpha \in f(S)} \alpha \mu(\{f = \alpha\} \cap E)$$

と定義する.

例 3.1. $\alpha \in [0, \infty)$, $A \in \Sigma$ とすると, 明らかに $f := \alpha 1_A \in \text{SF}(\Sigma)^+$ である. この場合, $E \in \Sigma$ に対して

$$\int_E f d\mu = \alpha \mu(A \cap E)$$

が成り立つ. 実際, $A = \emptyset$ もしくは $\alpha = 0$ ならば $f(S) = \{0\}$ だから $\int_E f d\mu = 0 \cdot \mu(E) = 0 = \alpha \mu(A \cap E)$ である. $A \neq \emptyset$, $\alpha > 0$ の場合, $A \neq S$ ならば $f(S) = \{0, \alpha\}$, $\{f = \alpha\} = A$, $\{f = 0\} = A^c$ だから, $\int_E f d\mu = \alpha \mu(A \cap E) + 0 \cdot \mu(A^c \cap E) = \alpha \mu(A \cap E)$ である. $A = S$ ならば $f(S) = \{\alpha\}$ だから, $\int_E f d\mu = \alpha \mu(S \cap E) = \alpha \mu(A \cap E)$ である.

補題 3.2. $f \in \text{SF}(\Sigma)^+$ に対して, 関数 $\varphi : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ を

$$\varphi(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in \Sigma) \quad (3.2)$$

で定めると, φ は (S, Σ) 上の測度となる.

証明. まず, $\mu(\emptyset) = 0$ より $\varphi(\emptyset) = 0$ である. 次に, $E_n \in \Sigma$ ($n = 1, 2, \dots$) が $i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$ を満たす とすると,

$$\begin{aligned} \varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \sum_{\alpha \in f(S)} \alpha \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\{f = \alpha\} \cap E_n)\right) \\ &= \sum_{\alpha \in f(S)} \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{f = \alpha\} \cap E_n) \quad (\because \mu \text{ の可算加法性}) \\ &= \sum_{\alpha \in f(S)} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \mu(\{f = \alpha\} \cap E_n) \quad (\because \text{補題 1.7}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in f(S)} \alpha \mu(\{f = \alpha\} \cap E_n) \quad (\because \text{正項級数に対する Fubini の定理}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(E_n) \end{aligned}$$

となる. 従って φ は可算加法的である. 以上より題意は示された. $\square$

注意 3.2. (3.2) 式のような関係式を記号 $d\varphi = f d\mu$ で表すことがある. また, (3.2) 式で定義される関数 φ のことを記号 $f\mu$ で表すことがある.

補題 3.3. $f, g \in \text{SF}(\Sigma)^+$ ならば, $f + g \in \text{SF}(\Sigma)^+$ であり, かつ任意の $E \in \Sigma$ に対して

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu. \quad (3.3)$$

証明. $f + g$ が単関数であることは明らかであり, また命題 2.4 より Σ -可測であるから, $f + g \in \text{SF}(\Sigma)^+$ である.

(3.3) を示す. $f(S), g(S)$ の元の個数をそれぞれ n, m として, $f(S) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $g(S) = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ と書く. また, $A_i := \{f = \alpha_i\}$, $B_j := \{g = \beta_j\}$, $E_{ij} := A_i \cap B_j \cap E$ とおく. 定義より $i \neq k \Rightarrow A_i \cap A_k = \emptyset$, $j \neq l \Rightarrow B_j \cap B_l = \emptyset$ である. さらに,

$$\int_{E_{ij}} (f + g) d\mu = \sum_{\gamma \in (f+g)(S)} \gamma \mu(\{f + g = \gamma\} \cap E_{ij})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\gamma \in (f+g)(S)} (\alpha_i + \beta_j) \mu(\{f+g=\gamma\} \cap E_{ij}) \\
&= (\alpha_i + \beta_j) \mu(E_{ij}) \quad (\because \mu \text{ の加法性})
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
\int_{E_{ij}} f d\mu &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k \cap E_{ij}) = \alpha_i \mu(E_{ij}), \\
\int_{E_{ij}} g d\mu &= \sum_{k=1}^m \beta_k \mu(B_k \cap E_{ij}) = \beta_j \mu(E_{ij})
\end{aligned}$$

が成り立つ。従って,

$$\int_{E_{ij}} (f+g) d\mu = \int_{E_{ij}} f d\mu + \int_{E_{ij}} g d\mu$$

が成り立つ。 $(i, j) \neq (k, l) \Rightarrow E_{ij} \cap E_{kl} = \emptyset$ および $\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m E_{ij} = E$ に注意すれば, 上式の両辺の i, j に関する総和を考えて補題 3.2 を適用すると, 示すべき結論を得る。 $\square$

系 3.2. $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, \infty), A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ ならば, $f := \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i} \in \text{SF}(\Sigma)^+$ であり, 任意の $E \in \Sigma$ に対して

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

証明. 各 i について明らかに $\alpha_i 1_{A_i} \in \text{SF}(\Sigma)^+$ であるから, 補題 3.3 より $f \in \text{SF}(\Sigma)^+$ であり, かつ

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^n \int_E \alpha_i 1_{A_i} d\mu$$

が成り立つ。従って例 3.1 より結論が従う。 $\square$

系 3.3. $f \in \text{SF}(\Sigma)^+, c \in [0, \infty)$ ならば $cf \in \text{SF}(\Sigma)^+$ であり, 任意の $E \in \Sigma$ に対して

$$\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu.$$

証明. (3.1) 式と系 3.2 から直ちに従う。 $\square$

系 3.4. $f \in \text{SF}(\Sigma)^+, E \in \Sigma$ ならば, $f 1_E \in \text{SF}(\Sigma)^+$ であり,

$$\int_E f d\mu = \int_S f 1_E d\mu.$$

証明. (3.1) 式より $f 1_E = \sum_{\alpha \in f(S)} \alpha 1_{\{f=\alpha\} \cap E}$ と書けるから, 系 3.2 から従う。 $\square$

系 3.5. $f, g \in \text{SF}(\Sigma)^+$ かつ $f \leq g$ ならば, 任意の $E \in \Sigma$ に対して

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

演習問題 7. 系 3.5 を証明せよ。

3.3 非負関数の積分と単調収束定理

定義 3.3 (非負関数の積分). Σ -可測関数 $f : S \rightarrow [0, \infty]$ と可測集合 $E \in \Sigma$ に対して, μ に関する f の E 上の Lebesgue 積分を

$$\int_E f d\mu := \sup \left\{ \int_E g d\mu : g \in \text{SF}(\Sigma)^+, g \leq f \right\}$$

で定義する. 系 3.5 より, $f \in \text{SF}(\Sigma)^+$ のときこれは定義 3.2 によるものと一致する.

命題 3.1 (積分の単調性). 2 つの Σ -可測関数 $f : S \rightarrow [0, \infty], g : S \rightarrow [0, \infty]$ が $f \leq g$ を満たすならば, 任意の $E \in \Sigma$ に対して

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

証明. $h \in \text{SF}(\Sigma)^+$ が $h \leq f$ を満たすならば, 仮定より $h \leq g$ も満たすので, $\int_E g d\mu$ の定義より

$$\int_E h d\mu \leq \int_E g d\mu$$

が成り立つ. 従って $\int_E g d\mu$ は集合 $\{\int_E h d\mu : h \in \text{SF}(\Sigma)^+, h \leq f\}$ の上界だから, $\int_E f d\mu$ の定義より示すべき結論が得られる. $\square$

定理 3.2 (単調収束定理). $f_n : S \rightarrow [0, \infty]$ ($n = 1, 2, \dots$) を Σ -可測関数の列, $f : S \rightarrow [0, \infty]$ とし, $f_n \uparrow f$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つとする. このとき, f は Σ -可測関数であり, 任意の $E \in \Sigma$ に対して

$$\int_E f_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

証明. f の Σ -可測性は系 2.3 から従う. 次に, 命題 3.1 より $[0, \infty]$ の点列 $(\int_E f_n d\mu)_{n=1}^\infty$ は非減少だから, 補題 1.5 より $n \rightarrow \infty$ のとき $\alpha := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_E f_n d\mu$ に収束する. ここで, 仮定よりすべての n について $f_n \leq f$ であるから, 命題 3.1 より $\int_S E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$ が成り立つ. 従って

$$\alpha \leq \int_E f d\mu$$

が成り立つ. 故に,

$$\alpha \geq \int_E f d\mu \tag{3.4}$$

を示せば証明は完成する.

$g \in \text{SF}(\Sigma)^+$ で $g \leq f$ なるものを任意にとる. また, $c \in (0, 1)$ を任意にとる. $E_n := \{f_n \geq cg\} \cap E$ とおくと, 系 2.1 と補題 2.8 より $E_n \in \Sigma$ となる. また, $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ より $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ となる. さらに, $\bigcup_{n=1}^\infty E_n = E$ が成り立つ. 実際, 任意に $x \in E$ をとると, $g(x) = 0$ ならば $x \in E_1$ であり, $g(x) \neq 0$ ならば $cg(x) < g(x) \leq f(x)$ と $f_n \uparrow f$ よりある n が存在して $cg(x) < f_n(x)$ となるから, $x \in E_n$ となる. 以上と命題 1.6 および補題 3.2 より

$$\int_{E_n} g d\mu \rightarrow \int_E g d\mu$$

が成り立つ. ここで, E_n の定義より $f_n \geq cg 1_{E_n}$ が成り立つから, 命題 3.1 より

$$\int_E f_n d\mu \geq \int_E cg 1_{E_n} d\mu$$

が成り立つ. 系 3.3 と 3.4 を右辺に適用して

$$\int_E f_n d\mu \geq c \int_{E_n} g d\mu$$

を得る. 両辺で $n \rightarrow \infty$ として

$$\alpha \geq c \int_E g d\mu$$

を得る. $c \in (0, 1)$ は任意であったから, $c \uparrow 1$ として

$$\alpha \geq \int_E g d\mu$$

を得る. すなわち, α は $\{\int_E g d\mu : g \in \text{SF}(\Sigma)^+, g \leq f\}$ の上界であるから, $\int_E f d\mu$ の定義よりこれは (3.4) を意味する. $\square$

例 3.2 (可算無限集合上の計数測度に関する Lebesgue 積分). $(S, \Sigma) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ とし, μ を (S, Σ) 上の計数測度とする. このとき, 任意の関数 $f : S \rightarrow [0, \infty]$ は Σ -可測であるが, さらに

$$\int_S f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$$

が成り立つ. 実際, もしすべての $i \in \mathbb{N}$ について $f(i) < \infty$ であった場合, 各 n について関数 $f_n : S \rightarrow [0, \infty]$ を

$$f_n(i) = \begin{cases} f(i) & \text{if } i \leq n, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定めると, 明らかに $f_n \uparrow f$ ($n \rightarrow \infty$) となるから, 単調収束定理より

$$\int_S f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f_n d\mu$$

が成り立つ. ここで, $f_n = \sum_{i=1}^n f(i) 1_{\{i\}}$ と書けるから, 系 3.2 より

$$\int_S f_n d\mu = \sum_{i=1}^n f(i) \mu(\{i\}) = \sum_{i=1}^n f(i)$$

が成り立つ. 従って示すべき等式が得られる. 一方で, もしある $j \in \mathbb{N}$ について $f(j) = \infty$ となっていた場合, 任意の $k \in \mathbb{N}$ について,

$$\begin{aligned} \int_S f d\mu &\geq \int_S k 1_{\{j\}} d\mu \quad (\because \text{命題 3.1}) \\ &= k \mu(\{j\}) \quad (\because \text{系 3.2}) \\ &= k \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\int_S f d\mu = \infty = \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$$

となる.

注意 3.3. 例 3.2 の類推により, 一般に関数 $f : S \rightarrow [0, \infty]$ に対して

$$\sum_{x \in S} f(x) := \int_S f d\mu$$

と定義する. ここに, μ は $(S, \mathcal{P}(S))$ 上の計数測度を表す. S が可算無限集合で $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow S$ が全単射であれば,

$$\sum_{x \in S} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\varphi(n))$$

が成り立つことが例 3.2 と同様の議論により示せる.

例 3.3 (デルタ測度に関する Lebesgue 積分). $x_0 \in S$ として, δ_{x_0} を x_0 に質量をもつ (S, Σ) 上のデルタ測度とする. このとき, 任意の Σ -可測関数 $f: S \rightarrow [0, \infty]$ と $E \in \Sigma$ に対して,

$$\int_E f d\delta_{x_0} = \begin{cases} f(x_0) & \text{if } x_0 \in E, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.5)$$

となる.

演習問題 8. (3.5) 式を証明せよ.

3.4 単調収束定理からの帰結

$f: S \rightarrow [0, \infty]$ を Σ -可測関数, $E \in \Sigma$ を可測集合とする.

命題 3.2. $g: S \rightarrow [0, \infty]$ を Σ -可測関数, $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ とすると, $\alpha f + \beta g$ は Σ -可測であり,

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$$

が成り立つ.

証明. まず, 系 3.1 より $\alpha f + \beta g$ は Σ -可測である. 次に, 単関数近似定理より, ある $f_n, g_n \in \text{SF}(\Sigma)^+$ ($n = 1, 2, \dots$) が存在して $f_n \uparrow f, g_n \uparrow g$ が成り立つ. このとき補題 1.6 より $\alpha f_n + \beta g_n \uparrow \alpha f + \beta g$ が成り立つ. いま, 補題 3.3 と系 3.3 より

$$\int_E (\alpha f_n + \beta g_n) d\mu = \alpha \int_E f_n d\mu + \beta \int_E g_n d\mu$$

が成り立つから, $n \rightarrow \infty$ とすれば単調収束定理より示すべき結論を得る. □

演習問題 9. 命題 3.2 は $\alpha = \infty$ または $\beta = \infty$ の場合にも成立することを示せ.

命題 3.3. $f1_E$ は Σ -可測であり,

$$\int_E f d\mu = \int_S f1_E d\mu.$$

証明. 系 3.1 より $f1_E$ は Σ -可測である. 残りの主張は単関数近似定理と補題 1.6, 系 3.4, および単調収束定理から従う. □

命題 3.4. $\mu(E) = 0$ ならば,

$$\int_E f d\mu = 0.$$

証明. 単関数近似定理と単調収束定理より, $f \in \text{SF}(\Sigma)^+$ の場合を考えれば十分である. $\mu(E) = 0$ と測度の単調性より任意の $A \in \Sigma$ に対して $\mu(A \cap E) = 0$ が成り立つから,

$$\int_E f d\mu = \sum_{\alpha \in f(S)} \alpha \mu(\{f = \alpha\} \cap E) = 0$$

となって示すべき結果を得る. □

命題 3.5. Σ -可測関数 $g : S \rightarrow [0, \infty]$ が $\mu(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ を満たすならば,

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

証明. $A := \{f = g\}$ とおく. 明らかに $1_E = 1_{E \cap A} + 1_{E \cap A^c}$ と $f 1_{E \cap A} = g 1_{E \cap A}$ が成り立つ. 従って命題 3.2 と 3.3 より

$$\int_E f d\mu = \int_{E \cap A} f d\mu + \int_{E \cap A^c} f d\mu, \quad \int_E g d\mu = \int_{E \cap A} f d\mu + \int_{E \cap A^c} g d\mu$$

が成り立つ. ここで, 仮定より $\mu(E \cap A^c) = 0$ であるから, 命題 3.4 より

$$\int_{E \cap A^c} f d\mu = \int_{E \cap A^c} g d\mu = 0$$

が成り立つ. 以上で示すべき結論が得られた. □

命題 3.6. (a) $\int_E f d\mu = 0$ ならば, $f = 0$ a.e. on E .

(b) $\int_E f d\mu < \infty$ ならば, $f < \infty$ a.e. on E .

証明. (a) $A_n := \{f > 1/n\} \cap E$ とおくと, $A_n \in \Sigma$ であり, 命題 3.1 と 3.3 より

$$0 = \int_E f d\mu = \int_S f 1_E d\mu \geq \int_S f 1_{A_n} d\mu \geq \int_S \frac{1}{n} 1_{A_n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n)$$

となる. 従って $\mu(A_n) = 0$ である. $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E \cap \{f > 0\}$ より $\mu(A_n) \rightarrow \mu(E \cap \{f > 0\})$ ($n \rightarrow \infty$) だから, $\mu(E \cap \{f > 0\}) = 0$, すなわち $f = 0$ a.e. on E である.

(b) $A := \{f = \infty\}$ とおくと, $1_E = 1_{E \cap A} + 1_{E \cap A^c}$ となるから, 命題 3.2 と 3.3 より

$$\infty > \int_E f d\mu = \int_S f 1_{E \cap A} d\mu + \int_S f 1_{E \cap A^c} d\mu \geq \infty \cdot \mu(E \cap A)$$

が成り立つ. 従って $\mu(E \cap A) = 0$ でなければならない. □

定理 3.3 (項別積分定理). $f_n : S \rightarrow [0, \infty]$ ($n = 1, 2, \dots$) が Σ -可測ならば, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ も Σ -可測であり,

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$$

証明. $g_N := \sum_{n=1}^N f_n$ とおく. 命題 3.2 より g_N は Σ -可測であり,

$$\int_E g_N d\mu = \sum_{n=1}^N \int_E f_n d\mu \tag{3.6}$$

が成り立つ. さらに, 明らかに $g_N \uparrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ($N \rightarrow \infty$) であるから, 単調収束定理より $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ も Σ -可測であり,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_E g_N d\mu = \int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu$$

が成り立つ. 従って, (3.6) の両辺で $N \rightarrow \infty$ として求めるべき式を得る. □

系 3.6. $f_n : S \rightarrow [0, \infty]$ ($n = 1, 2, \dots$) が Σ -可測であり, かつ $\sum_{n=1}^{\infty} \int_S f_n d\mu < \infty$ を満たすならば, $f_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) a.e. である.

証明. 項別積分定理より

$$\int_S \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_S f_n d\mu < \infty$$

となるから, 命題 3.6(b) より $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$ a.e. である. これは $f_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) a.e. を意味する. $\square$

定理 3.4 (Fatou の補題). $f_n : S \rightarrow [0, \infty]$ ($n = 1, 2, \dots$) が Σ -可測ならば,

$$\int_E \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

証明. $g_N := \inf_{k: k \geq N} f_k$ とおく. 定義より $g_N \uparrow \liminf_n f_n$ ($N \rightarrow \infty$) が成り立つから, 単調収束定理より

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_E g_N d\mu = \int_E \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu$$

が成り立つ. 一方で, $g_N \leq f_N$ であるから, 積分の単調性より

$$\int_E g_N d\mu \leq \int_E f_N d\mu$$

が成り立つから,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \int_E g_N d\mu \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \int_E f_N d\mu$$

が成り立つ. 補題 2.7 に注意すると, 示すべき結論が得られた. $\square$

演習問題 10. Fatou の補題において, 等号が成立しない例をあげよ.

定理 3.5. 関数 $\varphi : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ を $\varphi := f\mu$, すなわち

$$\varphi(F) = \int_F f d\mu \quad (F \in \Sigma)$$

で定めると, φ は (S, Σ) 上の測度となる. さらに, 任意の Σ -可測関数 $g : S \rightarrow [0, \infty]$ に対して

$$\int_E g d\varphi = \int_E g f d\mu. \quad (3.7)$$

証明. まず, φ は (S, Σ) 上の測度である. 実際, $\varphi(\emptyset) = 0$ は命題 3.4 から従う. いま, $F_n \in \Sigma$ ($n = 1, 2, \dots$) が $i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \emptyset$ を満たすとし, $F := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ とおく. このとき明らかに $1_F = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{F_n}$ が成り立つから, 命題 3.3 と項別積分定理より

$$\varphi(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_S 1_{F_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(F_n)$$

が成り立つ. すなわち, φ は可算加法的である.

次に (3.7) を示す. まず $g \in \text{SF}(\Sigma)^+$ ならば,

$$\begin{aligned} \int_E g d\varphi &= \sum_{\alpha \in g(S)} \alpha \varphi(\{g = \alpha\} \cap E) = \sum_{\alpha \in g(S)} \alpha \int_S 1_{\{g = \alpha\} \cap E} f d\mu \quad (\because \text{命題 3.3}) \\ &= \int_E \left(\sum_{\alpha \in g(S)} \alpha 1_{\{g = \alpha\}} \right) f d\mu \quad (\because \text{命題 3.2 と 3.3}) \\ &= \int_E g f d\mu \quad (\because (3.1) \text{ 式}) \end{aligned}$$

となって成立する. 一般の場合は単関数近似定理と補題 1.6 および単調収束定理から従う. $\square$

3.5 実関数の積分とその初等的性質

この節でも引き続き $E \in \Sigma$ を可測集合とする.

定義 3.4 (正の部分・負の部分). 関数 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, f の**正の部分** f^+ および**負の部分** f^- を

$$f^+ = f \vee 0, \quad f^- := (-f) \vee 0$$

で定義する.

補題 3.4. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ が Σ -可測ならば, $f^+, f^-, |f|$ はすべて Σ -可測である.

証明. f^+, f^- の Σ -可測性は系 2.2 から従う. $|f|$ の Σ -可測性は公式 $|f| = f^+ + f^-$ と命題 2.4 から従う. $\square$

定義 3.5 (可積分関数). $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ が μ に関して **Lebesgue 可積分**, あるいは単に μ -**可積分**であるとは, f が Σ -可測であり, かつ

$$\int_S |f| d\mu < \infty$$

が成り立つことをいう. μ -可積分関数全体の集合を記号 $L^1(\mu)$ で表す. 可測空間 (S, Σ) を明示したいときには $L^1(S, \Sigma, \mu), L^1(S, \mu), L^1(\Sigma, \mu)$ などとも書く.

定義 3.6 (実関数の積分). $f \in L^1(\mu)$ とする. μ に関する f の E 上の **Lebesgue 積分**を

$$\int_E f d\mu := \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

で定義する (命題 3.1 と 3.3 より $\int_E f^+ d\mu, \int_E f^- d\mu \in [0, \infty)$ となることに注意). $f \geq 0$ であれば $f^+ = f, f^- = 0$ となるから, 上の定義は定義 3.3 によるものと一致する.

注意 3.4. $\int_E f d\mu$ のことを $\int_E f(x) d\mu(x)$ や $\int_E f(x) \mu(dx)$ などと書くことがある.

命題 3.7. $f \in L^1(\mu)$ ならば,

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

証明. $|f| = f^+ + f^-$ に注意すれば, 三角不等式と命題 3.2 より

$$\left| \int_E f d\mu \right| = \left| \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \right| \leq \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu = \int_E |f| d\mu$$

となる. $\square$

定理 3.6 (積分の線形性). $f, g \in L^1(\mu), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ならば, $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$ であり,

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu. \quad (3.8)$$

証明. Step 1 命題 2.4 より $\alpha f + \beta g$ は Σ -可測であり, また $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha| |f| + |\beta| |g|$ だから, 命題 3.1 と 3.3 より $\int_S |\alpha f + \beta g| d\mu < \infty$ である. 従って $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$ である.

Step 2 $\alpha = \beta = 1$ の場合に (3.8) が成り立つことを示す. この場合, $h = f + g$ とおくと $f = f^+ - f^-, g = g^+ - g^-, h = h^+ - h^-$ より $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$ となる. 従って命題 3.2 より

$$\int_E h^+ d\mu + \int_E f^- d\mu + \int_E g^- d\mu = \int_E h^- d\mu + \int_E f^+ d\mu + \int_E g^+ d\mu$$

が成り立つ。移項して整理すると (3.8) が得られる。

Step 3 $\alpha \geq 0, \beta = 0$ の場合に (3.8) が成り立つことを示す。この場合 $(\alpha f + \beta g)^+ = \alpha f^+, (\alpha f + \beta g)^- = \alpha f^-$ となるから、命題 3.2 より (3.8) が得られる。

Step 4 $\alpha < 0, \beta = 0$ の場合に (3.8) が成り立つことも Step 3 と同様にして示せる。

Step 5 一般の場合に (3.8) が成り立つことは Step 2-4 から従う。 □

命題 3.8. $f, g \in L^1(\mu)$ かつ $f \leq g$ ならば、

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

証明. 仮定より $g - f \geq 0$ だから、命題 3.1 より $\int_E (g - f) d\mu \geq 0$ である。積分の線形性を使って整理すると示すべき式を得る。 □

命題 3.9. $f \in L^1(\mu)$ ならば、 $f 1_E \in L^1(\mu)$ であり、

$$\int_E f d\mu = \int_S f 1_E d\mu.$$

証明. $f 1_E \in L^1(\mu)$ は命題 2.4 と $|f 1_E| \leq |f|$ から従う。等式は命題 3.3 と積分の線形性から従う。 □

命題 3.10. $f \in L^1(\mu)$ かつ $\mu(E) = 0$ ならば

$$\int_E f d\mu = 0.$$

証明. 命題 3.4 から直ちに従う。 □

命題 3.11. $f, g \in L^1(\mu)$ が $\mu(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ を満たすならば、

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

証明. 仮定より $\mu(\{x \in E : f^+(x) + g^-(x) \neq f^-(x) + g^+(x)\}) = 0$ だから、命題 3.5 より

$$\int_E (f^+ + g^-) d\mu = \int_E (f^- + g^+) d\mu.$$

命題 3.2 を適用して整理すると示すべき等式を得る。 □

命題 3.12. $f : S \rightarrow [0, \infty)$ は Σ -可測であるとする。このとき、 Σ -可測関数 $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ が $h \in L^1(f\mu)$ を満たすための必要十分条件は、 $h \cdot f \in L^1(\mu)$ である。さらにこのとき

$$\int_E h d(f\mu) = \int_E h \cdot f d\mu$$

が成り立つ。

証明. 定理 3.5 より $\int_S |h| d(f\mu) = \int_S |h| \cdot f d\mu$ が成り立つから、前半の主張が成り立つ。残りの主張も定理 3.5 と積分の線形性から直ちに従う。 □

3.6 Lebesgue の収束定理

この節でも引き続き $E \in \Sigma$ を可測集合とする。

補題 3.5. $a \in \mathbb{R}, b_n \in [-\infty, \infty] (n = 1, 2, \dots)$ のとき,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a + b_n) = a + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$$

が成り立つ.

証明. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $m \geq n \Rightarrow \inf_{k \geq n} (a + b_k) - a \leq b_m, a + b_m \geq a + \inf_{k \geq n} b_k$ が成り立つから, $\inf_{k \geq n} (a + b_k) - a \leq \inf_{k \geq n} b_k$ および $\inf_{k \geq n} (a + b_k) \geq a + \inf_{k \geq n} b_k$, すなわち $\inf_{k \geq n} (a + b_k) = a + \inf_{k \geq n} b_k$ を得る. 両辺で $n \rightarrow \infty$ として求めるべき式を得る. $\square$

補題 3.6 (逆向き Fatou の補題). $f_n : S \rightarrow [0, \infty) (n = 1, 2, \dots)$ が Σ -可測であり, かつある $g \in L^1(\mu)$ が存在して $f_n \leq g (n = 1, 2, \dots)$ を満たすならば,

$$\int_E \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

証明. まず, $0 \leq f_n \leq g$ より $f_n \in L^1(\mu)$ および $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \in L^1(\mu)$ であることに注意する. いま, 各 n について $g - f_n \geq 0$ かつ $g - f_n$ は Σ -可測だから, Fatou の補題より

$$\int_E \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} (g - f_n) \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E (g - f_n) d\mu$$

が成り立つ. ここで, 補題 3.5 より $\liminf_{n \rightarrow \infty} (g - f_n) = g + \liminf_{n \rightarrow \infty} (-f_n) = g - \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ が成り立つから, 積分の線形性より

$$\int_E \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} (g - f_n) \right) d\mu = \int_E g d\mu - \int_E \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu$$

が成り立つ. 一方で, 積分の線形性より $\int_E (g - f_n) d\mu = \int_E g d\mu - \int_E f_n d\mu$ であるから, 補題 3.5 より

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E (g - f_n) d\mu = \int_E g d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(- \int_E f_n d\mu \right) = \int_E g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

が成り立つ. 以上より

$$\int_E g d\mu - \int_E \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \int_E g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

が成り立つ. $\int_E g d\mu \in \mathbb{R}$ に注意して上式を整理すると求めるべき式を得る. $\square$

定義 3.7 (概収束). S 上の実関数列 $(f_n)_{n=1}^\infty$ が関数 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ に (μ に関して) **概収束する** とは, 実数列 $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ が $f(x)$ に収束するような点 $x \in S$ 全体の集合を S_0 とすると, S_0^c が μ -測度ゼロ集合となる, すなわち $S_0^c \in \Sigma$ かつ $\mu(S_0^c) = 0$ となることをいう. このことを記号 $f_n \rightarrow f (n \rightarrow \infty)$ a.e. で表す.

定理 3.7 (Lebesgue の収束定理). $L^1(\mu)$ の点列 $(f_n)_{n=1}^\infty$ がある Σ -可測関数 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ に概収束し, かつある $g \in L^1(\mu)$ が存在して $|f_n| \leq g (n = 1, 2, \dots)$ を満たすならば, $f \in L^1(\mu)$ であり, かつ

$$\int_E |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.9)$$

および

$$\int_E f_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu \quad (n \rightarrow \infty) \quad (3.10)$$

が成り立つ.

証明. まず, 仮定より $|f| = \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n|$ a.e. が成り立つから, 命題 3.5 と Fatou の補題より

$$\int_S |f| d\mu = \int_S \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n| \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_S |f_n| d\mu \leq \int_S g d\mu < \infty$$

が成り立つ (3 番目の不等式は命題 3.1 から従う). よって $f \in L^1(\mu)$ である. 次に, この結果より $f_n - f \in L^1(\mu)$ ($n = 1, 2, \dots$) となることと, $|f_n - f| \leq g + |f|$ ($n = 1, 2, \dots$) が成り立つことに注意すれば, 逆向き Fatou の補題より

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| d\mu \leq \int_E \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n - f| \right) d\mu$$

が成り立つ. 仮定より $\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n - f| = 0$ a.e. であるから, 再び命題 3.5 を用いて $\int_E (\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n - f|) d\mu = 0$ を得る. 従って $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| d\mu = 0$ であるから, (3.9) が成り立つ. 最後に, (3.10) は積分の線形性, 命題 3.7 と (3.9) から従う. $\square$

系 3.7 (有界収束定理). $L^1(\mu)$ の点列 $(f_n)_{n=1}^\infty$ がある Σ -可測関数 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ に概収束し, かつある定数 $K > 0$ が存在して $|f_n| \leq K$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たすとする. このとき, μ が有限ならば, $f \in L^1(\mu)$ であり, かつ (3.9) および (3.10) が成り立つ.

証明. $g \equiv K$ として Lebesgue の収束定理を適用すればよい. $\square$

演習問題 11. Lebesgue の収束定理において, 仮定「ある $g \in L^1(\mu)$ が存在して $|f_n| \leq g$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たす」を外すと, たとえ $f \in L^1(\mu)$ であっても残りの結論が成立しなくなるような反例を挙げよ.

3.7 Riemann 積分との関係

命題 3.13. $-\infty < a < b < \infty$ とし, λ を $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$ 上の Lebesgue 測度とする. また, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ について $[a, b]$ の分割 $a = t_{n,0} < t_{n,1} < \dots < t_{n,N_n-1} < t_{n,N_n} = b$ が与えられていて, $\Delta_n := \max_{1 \leq i \leq N_n} (t_{n,i} - t_{n,i-1}) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を満たすとする. さらに, 各 $n \in \mathbb{N}$ と $i \in \{0, 1, \dots, N_n\}$ について点 $\xi_{n,i} \in [t_{n,i-1}, t_{n,i}]$ が与えられているとする. このとき,

$$\sum_{i=1}^{N_n} f(\xi_{n,i})(t_{n,i} - t_{n,i-1}) \rightarrow \int_{[a,b]} f d\lambda \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

証明. $f_n := f(a)1_{\{a\}} + \sum_{i=1}^{N_n} f(\xi_{n,i})1_{(t_{n,i-1}, t_{n,i}]}$ とおく. f の連続性より $(f_n)_{n=1}^\infty$ は f に各点収束し, また $|f_n| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| < \infty$ が成り立つ. 従って, 有界収束定理より

$$\int_{[a,b]} f_n d\lambda \rightarrow \int_{[a,b]} f d\lambda \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. ここで,

$$\int_{[a,b]} f_n d\lambda = f(a)\lambda(\{a\}) + \sum_{i=1}^{N_n} f(\xi_{n,i})\lambda((t_{n,i-1}, t_{n,i}]) = \sum_{i=1}^{N_n} f(\xi_{n,i})(t_{n,i} - t_{n,i-1})$$

であるから, 題意は示された. $\square$

命題 3.13 は, 閉区間 $[a, b]$ 上の実連続関数は Riemann 積分可能であり, その Riemann 積分の値は $\int_{[a,b]} f d\lambda$ に一致するということを主張している (Riemann 積分の定義については, 例えば [14] の 4 章 1 節参照). この

ことから, 多くの場合, 積分 $\int_{[a,b]} f d\lambda$ は記号 $\int_a^b f(x) dx$ で表される (この記号は f の $[a, b]$ 上での Riemann 積分を表すためにも用いられるが, 命題 3.13 よりその値は $\int_{[a,b]} f d\lambda$ に一致するのでこの記法に矛盾はない).

注意 3.5. 一般に Riemann 積分可能であっても Borel 可測であるとは限らないため, 命題 3.13 を連続でない一般の Riemann 積分可能関数 f に対して適用することはできない. しかし, 測度空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ に**完備化**と呼ばれる操作を施して, 可測関数のクラスを拡張することにより, すべての Riemann 積分可能関数を可測関数とすることが可能であり, この拡張された測度空間において, 命題 3.13 と同様の結論が成り立つことが知られている (詳細は [7] の 4.1 節 (c) 参照). ここでいう拡張された意味で可測な関数は **Lebesgue 可測**であるという.

3.8 密度と絶対連続性

λ を (S, Σ) 上の測度とする.

定義 3.8 (密度). Σ -可測関数 $f : S \rightarrow [0, \infty]$ が μ に関する λ の**密度**であるとは, $\lambda = f\mu$ が成り立つことをいう. このとき, f を記号

$$\frac{d\lambda}{d\mu}$$

で表すことがある. ただし, f は λ, μ によって一意には定まらないことに注意. 次の補題で見るように, λ が σ -有限であれば f は μ -測度ゼロ集合上での違いを無視すれば一意に定まる.

補題 3.7. λ は σ -有限であるとする. f, g がともに λ の μ に関する密度ならば, $f = g$ μ -a.e. である.

証明. λ は σ -有限だから, ある $S_n \in \Sigma$ ($n = 1, 2, \dots$) が存在して $\lambda(S_n) < \infty$ ($n = 1, 2, \dots$) かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = S$ となる. このとき, 各 $n \in \mathbb{N}$ について $\int_{S_n \cap \{f \geq g\}} f d\mu = \int_{S_n \cap \{f \geq g\}} g d\mu = \lambda(S_n \cap \{f \geq g\}) < \infty$ となることに注意すると, $\int_{S_n} (f - g) 1_{\{f \geq g\}} d\mu = 0$ となる. 従って命題 3.6 より $(f - g) 1_{\{f \geq g\}} = 0$ μ -a.e. on S_n を得る. 同様にして $(f - g) 1_{\{f < g\}} = 0$ μ -a.e. on S_n を得るから, $f = g$ μ -a.e. S_n である. すなわち $\mu(\{f \neq g\} \cap S_n) = 0$ である. $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = S$ であるからこれは $\mu(\{f \neq g\}) = 0$ を意味する. $\square$

注意 3.6. 補題 3.7 の主張は λ が σ -有限でない場合は一般には正しくない. 実際, μ_1 を注意 1.15 で定めた測度とし, $\lambda = \mu = \mu_1$ とすると, 任意の $a > 0$ に対して a に値をとる定数関数 $f_a : S \rightarrow [0, \infty)$ は λ の μ に関する密度となるが, 任意の相異なる $a, b > 0$ に対して $\mu(\{f_a \neq f_b\}) = \mu_1(S) = \infty$ となる.

定義 3.9 (絶対連続性). λ が μ に関して**絶対連続**であるとは, $\mu(F) = 0$ なる任意の $F \in \Sigma$ に対して $\lambda(F) = 0$ が成り立つことをいう. このことを記号 $\lambda \ll \mu$ で表す.

命題 3.14. λ が μ に関する密度をもつならば, $\lambda \ll \mu$ である.

証明. 命題 3.4 から直ちに従う. $\square$

注意 3.7. 本講義ではカバーしないが, λ, μ がともに σ -有限であれば, 命題 3.14 の逆が成立することが知られている. この主張は **Radon-Nikodým の定理**と呼ばれる. 詳細は [17, Chapter 14] または [12, Chapter 6] を参照のこと. このことから, 密度のことを **Radon-Nikodým 微分**と呼ぶことがある.

3.9 像測度

この節では, (S_1, Σ_1) を可測空間とする.

定義 3.10 (像測度). Σ/Σ_1 -可測関数 $f: S \rightarrow S_1$ が与えられたとき, 関数 $\lambda: \Sigma_1 \rightarrow [0, \infty]$ を

$$\lambda(F) = \mu(f^{-1}(F)) \quad (F \in \Sigma_1)$$

で定めることができ, λ は (S_1, Σ_1) 上の測度となることが証明できる. この λ を f によって (S_1, Σ_1) 上に誘導される μ の**像測度**と呼び, 記号 μ^f で表す.

注意 3.8. μ^f は標準的に使われる記号ではない.

演習問題 12. 定義 3.10 の像測度 μ^f が実際に (S_1, Σ_1) 上の測度となっていることを確認せよ.

命題 3.15. $f: S \rightarrow S_1$ を Σ/Σ_1 -可測関数とすると, 以下が成り立つ.

(a) $\varphi: S_1 \rightarrow [0, \infty]$ が Σ_1 -可測ならば, $\varphi \circ f$ は Σ -可測であり,

$$\int_S \varphi \circ f d\mu = \int_{S_1} \varphi d\mu^f. \quad (3.11)$$

(b) $\varphi: S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ が Σ_1 -可測ならば, $\varphi \circ f \in L^1(\mu)$ と $\varphi \in L^1(\mu^f)$ は同値である. さらにこのとき,

$$\int_S \varphi \circ f d\mu = \int_{S_1} \varphi d\mu^f.$$

証明. (a) $\varphi \circ f$ が Σ -可測であることは命題 2.3 から従う. (3.11) を示すには, 単関数近似定理と単調収束定理より, $\varphi \in \text{SF}(\Sigma_1)^+$ の場合に示せば十分である. さらに, 命題 3.3 より, ある $F \in \Sigma_1$ が存在して $\varphi = 1_F$ と書ける場合のみ考えれば十分である. この場合, $\varphi \circ f = 1_{f^{-1}(F)}$ となるから, 像測度の定義より (3.11) は成り立つ.

(b) (a) と積分の線形性から直ちに従う. □

3.10 微分と積分の順序交換

定理 3.8. $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $f: S \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ とする. 各 $x \in S$ および $t \in (a, b)$ に対して, 関数 $f_x: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ および $f^t: S \rightarrow \mathbb{R}$ を $f_x(s) = f(x, s)$ ($s \in (a, b)$) および $f^t(y) = f(y, t)$ ($y \in S$) で定める. 次の 2 条件が成り立つと仮定する:

(i) 任意の $t \in (a, b)$ について, $f^t \in L^1(\mu)$.

(ii) 任意の $x \in S$ について, f_x は微分可能である. さらに, ある $\Psi \in L^1(\mu)$ が存在して, $\sup_{t \in (a, b)} |f'_x(t)| \leq |\Psi(x)|$ が成り立つ.

このとき, 任意の $t \in (a, b)$ に対して, 関数 $S \ni x \mapsto f'_x(t) \in \mathbb{R}$ は μ -可積である. さらに, 関数 $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$F(t) = \int_S f(x, t) \mu(dx) \quad (t \in (a, b))$$

で定めれば, F は微分可能であり, 任意の $t \in (a, b)$ について

$$F'(t) = \int_S f'_x(t) \mu(dx) \quad (3.12)$$

が成り立つ.

証明. 任意に $t \in (a, b)$ を固定し, 関数 $g: S \rightarrow \mathbb{R}$ を $g(x) = f'_x(t)$ ($x \in S$) で定める. いま, 0 に収束する実数列 $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ で $\delta_n \neq 0$ かつ $t + \delta_n \in (a, b)$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たすものを任意にとる ($a < t < b$ よりこの

ような列は必ずとれる). 各 $n \in \mathbb{N}$ について関数 $g_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g_n(x) = \delta_n^{-1} \{f(x, t + \delta_n) - f(x, t)\} \quad (x \in S)$$

で定めると, 命題 2.4 より g_n は Σ -可測であり, また条件 (i) より $(g_n)_{n=1}^\infty$ は g に各点収束する. 従って, 系 2.3 より g は Σ -可測である. さらに, 条件 (ii) より

$$\int_S |g| d\mu \leq \int_S |\Psi| d\mu < \infty$$

となるので, $g \in L^1(\mu)$ である. $t \in (a, b)$ は任意であったから, これで定理の前半の主張は証明された.

定理の後半の主張を示す. まず, 任意の $x \in S, n \in \mathbb{N}$ に対して, 平均値の定理より $g_n(x) = f'_x(t + \theta_{t,n} \delta_n)$ を満たす $\theta_{t,n} \in (0, 1)$ が存在する. 従って, 条件 (ii) より $|g_n(x)| \leq \sup_{s \in (a,b)} |f'_x(s)| \leq |\Psi(x)|$ が成り立つ. 故に, Lebesgue の収束定理より

$$\int_S g_n d\mu \rightarrow \int_S g d\mu \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. ここで, $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ は条件を満たす限り任意にとれることと,

$$\int_S g_n d\mu = \frac{F(t + \delta_n) - F(t)}{\delta_n}$$

に注意すれば, 上の収束は F が点 t で微分可能で

$$F'(t) = \int_S g d\mu = \int_S f'_x(t) \mu(dx)$$

が成り立つことを意味する. $t \in (a, b)$ は任意であったから, 定理の後半の主張も証明された. $\square$

注意 3.9. 偏微分の記号を用いると, (3.12) 式は

$$F'(t) = \int_S \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \mu(dx)$$

と表現できる.

3.11 L^p -ノルム

この節では $p \in [1, \infty)$ とする.

定義 3.11 (L^p -空間). Σ -可測関数 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ で $\int_S |f|^p d\mu < \infty$ を満たすものの全体の集合を $L^p(\mu)$ で表す. 可測空間 (S, Σ) を明示したいときには $L^p(S, \Sigma, \mu), L^p(S, \mu), L^p(\Sigma, \mu)$ などとも書く.

定義 3.12 (L^p -ノルム). Σ -可測関数 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ の L^p -ノルム (L^p -norm) を

$$\|f\|_p := \left(\int_S |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

で定義する. ただし, $\infty^{1/p} := \infty$ と定義する. 測度空間を明示したい場合は $\|f\|_{L^p(\mu)}$ などとも書く.

補題 3.8 (Young の不等式). $a, b \geq 0$ とする. $p > 1$ ならば, $q = p/(p-1)$ に対して

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

証明. $a = 0$ または $b = 0$ のときは明らかだから, $a, b > 0$ と仮定する. 対数関数 $\log$ が $(0, \infty)$ 上の凹関数であることから, 任意の $t \in [0, 1]$ に対して $\log(ta^p + (1-t)b^q) \geq t \log a^p + (1-t) \log b^q$ が成り立つ. $1-1/p = 1/q$ であることに注意すると, $t = 1/p$ として $\log(a^p/p + b^q/q) \geq p^{-1} \log a^p + q^{-1} \log b^q = \log(ab)$ を得る. 両辺の指数関数を考えて示すべき不等式を得る. $\square$

定理 3.9 (Hölder の不等式). $f : S \rightarrow \mathbb{R}, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ はともに Σ -可測であるとする. $p > 1$ ならば, $q = p/(p-1)$ に対して

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (3.13)$$

が成り立つ. 特に, $f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)$ ならば, $fg \in L^1(\mu)$ である.

証明. まず, $\|f\|_p = 0$ または $\|g\|_q = 0$ ならば, 命題 3.6 より $f = 0$ a.e. または $g = 0$ a.e. となるから, 命題 3.11 より $\|fg\|_1 = 0$ となって (3.13) は明らかに成り立つ. 従って $\|f\|_p > 0$ かつ $\|g\|_q > 0$ と仮定してよい. さらに, この場合もし $\|f\|_p = \infty$ または $\|g\|_q = \infty$ ならば, (3.13) の右辺は ∞ となるため (3.13) は明らかに成り立つ. 以上より $0 < \|f\|_p < \infty$ かつ $0 < \|g\|_q < \infty$ と仮定してよい. このとき, 各 $x \in S$ について $a = |f(x)|/\|f\|_p, b = |g(x)|/\|g\|_q$ として Young の不等式を適用することで

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$$

を得る. $\|f\|_p^p = \int_S |f|^p d\mu, \|g\|_q^q = \int_S |g|^q d\mu$ であることに注意すると, 両辺の μ に関する積分を考えると

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

を得る. 両辺に $\|f\|_p \|g\|_q$ をかけて (3.13) を得る. $\square$

注意 3.10. $p = 2$ の場合の Hölder の不等式は「Schwarz の不等式」と呼ばれる.

系 3.8 (Minkowski の不等式). $f : S \rightarrow \mathbb{R}, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ がともに Σ -可測ならば

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (3.14)$$

が成り立つ. 特に, $f, g \in L^p(\mu)$ ならば $f + g \in L^p(\mu)$ である.

証明. $p = 1$ の場合は不等式 $|f + g| \leq |f| + |g|$ と積分の単調性から従うので, $p > 1$ の場合に示せばよい.

$\|f + g\|_p = 0$ の場合は明らかなので, $\|f + g\|_p > 0$ と仮定してよい. さらに, $\|f\|_p = \infty$ または $\|g\|_p = \infty$ の場合は (3.14) の右辺が ∞ となって明らかに成り立つので, $\|f\|_p < \infty$ かつ $\|g\|_p < \infty$ と仮定してよい. 関数 $[0, \infty) \ni t \mapsto t^p \in [0, \infty)$ の凸性より $|f + g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$ が成り立つことに注意すると, これは $\|f + g\|_p < \infty$ を意味する. 一方で, $|f + g|^p \leq |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}$ が成り立つことから, 両辺を μ に関して積分してから右辺に Hölder の不等式を適用すると

$$\|f + g\|_p^p = \int_S |f + g|^p d\mu \leq \|f\|_p \|f + g\|_q^{p-1} + \|g\|_p \|f + g\|_q^{p-1} \|g\|_q$$

を得る. $\|f + g\|_q^{p-1} \|g\|_q = \int_S |f + g|^{(p-1)q} d\mu = \int_S |f + g|^p d\mu = \|f + g\|_p^p$ に注意すると,

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p/q}$$

を得る. $p - p/q = 1$ であることから, 両辺を $\|f + g\|_p^{p/q}$ で割って (3.14) を得る. $\square$

定義 3.13 (L^p 空間における Cauchy 列). S 上の実関数列 $(f_n)_{n=1}^\infty$ が $L^p(\mu)$ における Cauchy 列であるとは, $f_n \in L^p(\mu)$ ($n = 1, 2, \dots$) かつ $\|f_n - f_m\|_p \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$) が成り立つことをいう.

命題 3.16. $f_n \in L^p(\mu)$ ($n = 1, 2, \dots$) とする. Σ -可測関数 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つならば, $(f_n)_{n=1}^\infty$ は $L^p(\mu)$ における Cauchy 列である. さらに, $f \in L^p(\mu)$ が成り立つ.

演習問題 13. 命題 3.16 を証明せよ.

次の定理の (b) は, 命題 3.16 の前半部分は逆も正しいことを意味している.

定理 3.10. $(f_n)_{n=1}^\infty$ を $L^p(\mu)$ における Cauchy 列とすると次が成り立つ.

- (a) $(f_n)_{n=1}^\infty$ はある $f \in L^p(\mu)$ に概収束する部分列をもつ.
- (b) (L^p 空間の完備性) ある $f \in L^p(\mu)$ が存在して $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ.

証明. (a) 各 $i \in \mathbb{N}$ について $I_i := \{N \in \mathbb{N} : \sup_{m, n \geq N} \|f_m - f_n\|_p \leq 2^{-i}\}$ とおく. $(f_n)_{n=1}^\infty$ が $L^p(\mu)$ における Cauchy 列であることから, $I_i \neq \emptyset$ である. 従って, I_i は最小値 N_i をもつ. このとき, 正整数の増加列 $n_1 < n_2 < \dots$ を帰納的に $n_1 := N_1, n_i := n_{i-1} + N_i$ ($i = 2, 3, \dots$) と定めると, 任意の $i \in \mathbb{N}$ について $n_{i+1}, n_i \geq N_i$ が成り立つことから

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \leq 2^{-i}$$

を得る. 従って,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \right\|_p &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^k |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \right\|_p \quad (\because \text{Fatou の補題}) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \quad (\because \text{Minkowski の不等式}) \\ &\leq 1 < \infty \end{aligned}$$

となるから, 命題 3.6 よりほとんどすべての $x \in S$ について級数 $\sum_{i=1}^{\infty} \{f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\}$ は絶対収束する. $i \geq 2$ に対して $f_{n_i} = f_{n_1} + \sum_{j=2}^i (f_{n_j} - f_{n_{j-1}})$ と書けることに注意すると, これは $(f_{n_i})_{i=1}^\infty$ がある Σ -可測関数 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ に概収束することを意味する. $f \in L^p(\mu)$ であることは $\left\| \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \right\|_p < \infty$ から従う.

(b) (a) より (f_n) はある $f \in L^p(\mu)$ に概収束する部分列 $(f_{n_i})_{i=1}^\infty$ をもつ. いま任意に $\varepsilon > 0$ をとると, (f_n) が $L^p(\mu)$ における Cauchy 列であることから, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $\sup_{m, n \geq N} \|f_m - f_n\|_p < \varepsilon$ となる. 従って, $n_i \rightarrow \infty$ ($i \rightarrow \infty$) であることに注意すると, $n \geq N$ ならば, Fatou の補題より

$$\|f_n - f\|_p \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \|f_n - f_{n_i}\|_p \leq \varepsilon$$

が成り立つ. 従って $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) である. □

3.12 Borel–Cantelli の第 1 補題

定義 3.14 (集合の上極限と下極限). $(E_n)_{n=1}^\infty$ を集合の列とする. $(E_n)_{n=1}^\infty$ の上極限 (upper limit) を

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

で定義する. また, $(E_n)_{n=1}^\infty$ の下極限 (lower limit) を

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$$

で定義する.

注意 3.11. (a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ は「無限個の $n \in \mathbb{N}$ について E_n に属する」ような元全体の集合となっていることが確認できる. そのため, $\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ のことを $(E_n, \text{i.o.})$ と書くこともある (i.o. は infinitely often の略).

(b) $\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n$ は「十分大きなすべての $n \in \mathbb{N}$ について E_n に属する」ような元全体の集合となっていることが確認できる. そのため, $\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n$ のことを (E_n, ev) と書くこともある (ev は eventually の略).

(c) $E_n \in \Sigma$ ならば明らかに $\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n \in \Sigma$ である.

定理 3.11 (Borel–Cantelli の第 1 補題). $E_n \in \Sigma$ ($n = 1, 2, \dots$) が $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ を満たすならば,

$$\mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n\right) = 0.$$

証明. 仮定より $\sum_{n=1}^{\infty} \int_S 1_{E_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ であるから, 系 3.6 より $\limsup_{n \rightarrow \infty} 1_{E_n} = 0$ a.e. である. $\limsup_{n \rightarrow \infty} 1_{E_n} = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq k} 1_{E_k} = 1_{\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n}$ であるから, $\mu(1_{\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n} \neq 0) = 0$ を得る. これは $\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n) = 0$ を意味する. $\square$

Borel–Cantelli の第 1 補題は概収束を示す際にしばしば有用である. 一例として次の結果を示す.

命題 3.17. $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$), $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ を Σ -可測関数とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in S : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \infty$ が成り立つならば, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は f に概収束する.

証明. Borel–Cantelli の第 1 補題より $\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{x \in S : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$ が成り立つ.

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \{x \in S : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in S : \sup_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\} \\ &\supset \{x \in S : \limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \end{aligned}$$

であるから, $\mu(\{x \in S : \limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$ を得る. 従って

$$\mu(\{x \in S : \limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| > 0\}) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(\{x \in S : \limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| > 1/i\}) = 0$$

であるから, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ は f に概収束する. $\square$

4 確率論の基礎概念

本節では、確率論の諸概念が測度論の言葉を用いてどのようにして数学的に定式化されるのかということについて説明する。以下、 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする。すなわち、 Ω は集合、 $\mathcal{F}$ は Ω 上の σ -加法族、 P は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 ($P(\Omega) = 1$ であるような $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度) である。注意 1.12 ですでに触れたとおり、この場合、 Ω のことを**標本空間 (sample space)**、 Ω の元を**標本点 (sample point)** や**結果 (outcome)** などと呼ぶ慣習がある。また、可測集合 ($\mathcal{F}$ の元) は**事象 (event)** と呼ばれる。事象 $A \in \mathcal{F}$ に対して、 $P(A)$ を A の起こる**確率 (probability)** と呼ぶ。

4.1 分布

2.4 節ですでに触れたように、 Ω から $\mathbb{R}^d$ への $\mathcal{F}$ -可測関数のことを $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の d **次元確率変数 (d -dimensional random variable)** と呼ぶ。特に 1 次元確率変数は単に**確率変数**と呼ばれる。文脈から明らかな場合、「 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の」はしばしば省略される。

注意 4.1. 定義から明らかなように、確率変数を定義するのに確率測度 P が定義されている必要は実際にはない。

X を d 次元確率変数とする。確率統計においては、確率測度が何であるかよりも、確率変数の分布が何であるかに着目することが多い。測度論の言葉を使うと、確率変数の分布は以下のように定義される。

定義 4.1 (分布). (a) X の (P に関する) **分布 (distribution)** とは、 X によって $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上に誘導される P の像測度 P^X のことをいう (3.9 節参照)。なお、分布のことを**法則 (law)** とも呼ぶ。

(b) X の分布がある与えられた $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度 ν に一致するとき、 X は ν に**従う**といい、 $X \sim \nu$ と書く。

命題 4.1. ν を $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度とする。このとき、ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とその上の d 次元確率変数 X で、 X の分布が ν となるものが存在する。

証明. $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \nu)$, $X(\omega) = \omega$ ($\omega \in \Omega$) とすればよい。 □

以下、この節では主として 1 次元の場合を考察するため、 $d = 1$ とする。Borel 集合 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して、集合 $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$ のことをしばしば $\{X \in A\}$ と略記する。同様に、 $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$ などは $\{X \leq a\}$ などと略記される。また、 $P(\{X \in A\})$, $P(\{X \leq a\})$ などは $P(X \in A)$, $P(X \leq a)$ と略記される。

定義 4.2 ((累積) 分布関数). X の (分布の)**(累積) 分布関数 ((cumulative) distribution function, CDF)** とは、

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定義される関数 $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ のことをいう。

分布関数は X の分布を完全に決定する。

命題 4.2. X, Y を 2 つの確率変数とし、 F_X, F_Y をそれぞれ X, Y の分布関数とする。このとき、 $P^X = P^Y$ となるための必要十分条件は、 $F_X = F_Y$ である。

証明. 必要性は明らか。十分性は定理 1.1 と一意性の補題から従う。 □

離散分布と連続分布の定義を測度論の言葉で述べておく。

定義 4.3 (離散分布・連続分布). ν を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度とする.

- (a) ν が**離散分布 (discrete distribution)** であるとは, $\{x \in \mathbb{R} : \nu(\{x\}) \neq 0\}$ が高々可算集合であること
をいう. このとき, $f(x) = \nu(\{x\})$ ($x \in \mathbb{R}$) で定義される関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ のことを ν の**確率 (質量) 関数 (probability (mass) function)** と呼ぶ. 離散分布を分布にもつような確率変数は**離散型 (discrete)**
であるという.
- (b) ν が**連続分布 (continuous distribution)** であるとは, ν が $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の Lebesgue 測度に関する密度
 f を持つことをいう. このとき, 関数 f は ν の**確率密度関数 (probability density function, PDF)** あ
るいは単に**密度 (density)** と呼ばれる. 連続分布を分布にもつような確率変数は**連続型 (continuous)**
であるという.

命題 4.3. $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ とする.

- (a) $\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$ ならば, $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ は高々可算集合であり, f を確率関数にもつ離散分布が
ただ一つ存在する.
- (b) f が Borel 可測で $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ ならば, f を密度にもつような連続分布がただ一つ存在する.

証明. (a) まず, $A := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ が高々可算であることを示す. μ を $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ 上の計数測度とす
る. また, 各 $n \in \mathbb{N}$ について $A_n := \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 1/n\}$ とおく. このとき,

$$1 = \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu \geq \int_{A_n} f d\mu \geq \frac{\mu(A_n)}{n}$$

となるから, $\mu(A_n) \leq n$ である. 特に, A_n は有限集合である. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ と書けるから, A は高々可算で
ある.

次に, 関数 $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ を

$$\nu(B) = \int_B f d\mu \quad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

で定めると, $\nu(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu = \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$ であり, また, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $\nu(\{x\}) =$
 $f(x)\mu(\{x\}) = f(x)$ となるので, 定理 3.5 に注意すると, ν は f を確率関数にもつ離散分布である.

最後に一意性を示す. ν_1 も f を確率関数にもつ離散分布であるとする. このとき, A が高々可算集合であ
ることに注意すると, $\nu_1(A) = \sum_{x \in A} \nu_1(\{x\}) = \int_A f d\mu$ となる. ここで, $f1_{A^c} \equiv 0$ より $\int_{A^c} f d\mu = 0$ であ
るから, $\nu_1(A) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu = 1$ を得る. 従って $\nu_1(A^c) = 1 - \nu_1(A) = 0$ である. 以上より, 任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
に対して,

$$\nu_1(B) = \nu_1(B \cap A) = \sum_{x \in B \cap A} \nu_1(\{x\}) = \int_{B \cap A} f d\mu = \int_B f d\mu = \nu(B)$$

となる.

(b) 一意性は明らか. 存在は定理 3.5 から従う. □

例 4.1 (二項分布). $n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$ とする. 関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ を

$$f(x) = \binom{n}{p} p^x (1-p)^{n-x} \quad (x \in \{0, 1, \dots, n\}), \quad f(x) = 0 \quad (x \notin \{0, 1, \dots, n\})$$

で定めると, 二項定理を用いることで $\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sum_{x=0}^n f(x) = 1$ となることが確認できる. 従って, 命
題 4.3 より, f を確率関数にもつ離散分布がただ一つ存在する. この離散分布を試行回数 n , 成功確率 p の

二項分布 (binomial distribution) と呼ぶ. 特に, $n = 1$ の場合は成功確率 p の **Bernoulli 分布 (Bernoulli distribution)** と呼ぶ.

例 4.2 (正規分布). $\mu \in \mathbb{R}, v > 0$ とする. 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ を

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定めると, f は連続であるから Borel 可測である. さらに, 微分積分学でよく知られているように,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$$

が成り立つ. 従って, 命題 4.3 より, f を密度にもつような連続分布がただ一つ存在する. この連続分布を平均 μ , 分散 v の **正規分布 (normal distribution)** と呼び, 記号 $N(\mu, v)$ で表す. 特に, $N(0, 1)$ を **標準正規分布 (standard normal distribution)** と呼ぶ.

例 4.3 (一様分布). $-\infty < a < b < \infty$ とする. 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ を

$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定めると, $(a, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ より f は Borel 可測であり, また明らかに $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ であるから, 命題 4.3 より f を密度にもつ連続分布が存在する. この連続分布を区間 (a, b) 上の **一様分布 (uniform distribution)** と呼び, 記号 $U(a, b)$ で表す.

4.2 期待値

引き続き X を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数とする.

定義 4.4 (期待値). X が非負もしくは $X \in L^1(P)$ を満たすとき, $(P$ に関する) X の **期待値 (expectation)** を

$$E[X] := \int_{\Omega} X dP$$

で定義する. また, $A \in \mathcal{F}$ に対して, X の A 上の期待値を

$$E[X; A] := \int_A X dP$$

で定義する. 確率測度 P を明示する必要がある場合, $E[X], E[X; A]$ のことをそれぞれ $E^P[X], E^P[X; A]$ などと書く (広く浸透している記法ではない).

注意 4.2. 期待値は **平均 (mean)** とも呼ばれる.

関数 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 合成関数 $\varphi \circ X$ のことをしばしば $\varphi(X)$ と略記する.

命題 4.4. $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を Borel 可測関数とし, $\varphi \geq 0$ もしくは $\varphi(X) \in L^1(P)$ を満たすとする. このとき,

$$E[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi dP^X$$

が成り立つ.

証明. 命題 3.15 から直ちに従う. □

系 4.1. $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を Borel 可測関数とし, $\varphi(X) \in L^1(P)$ を満たすとする.

(a) X は離散型であるとし, その確率関数を f とする. このとき, $\sum_{x \in X(\Omega)} |\varphi(x)|f(x) < \infty$ であり,

$$E[\varphi(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x)f(x).$$

(b) X は連続型であるとし, その密度を f とする. このとき, $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|f(x)dx < \infty$ であり,

$$E[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)f(x)dx.$$

証明. (a) まず,

$$\begin{aligned} \infty &> \int_{\mathbb{R}} |\varphi(X)|dP = \int_{\mathbb{R}} |\varphi|dP^X (\because \text{命題 4.4}) \\ &= \int_{X(\Omega)} |\varphi|dP^X (\because P^X(X(\Omega)^c) = P(X \notin X(\Omega)) = 0) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \int_{\{x\}} |\varphi|dP^X (\because X(\Omega) \text{ は高々可算, 例 3.2, 定理 3.5}) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} |\varphi(x)|f(x) \end{aligned}$$

が成り立つ. 同様の議論によって $E[\varphi(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x)f(x)$ も示せる.

(b) 命題 4.4 と 3.12 から従う. □

例 4.4. X が平均 μ , 分散 v の正規分布に従うならば, $X \in L^1(P)$ であり, $E[X] = \mu$ となる.

4.3 共分散と相関係数

定理 4.1 (Lyapunov の不等式). $1 \leq p < q < \infty$ ならば, 任意の確率変数 X に対して

$$\|X\|_p \leq \|X\|_q.$$

特に, $L^q(P) \subset L^p(P)$ である.

証明. $r = q/p > 1$ とおくと, Hölder の不等式より $E[|X|^p] = E[|X|^p \cdot 1] \leq (E[|X|^{pr}])^{1/r} = \|X\|_q^{p/q}$ が成り立つ. 両辺を $1/p$ 乗して示すべき不等式を得る. □

定義 4.5 (分散・共分散). $X, Y \in L^2(P)$ とする. このとき, Lyapunov の不等式より $X, Y \in L^1(P)$ となり, さらに Minkowski の不等式より $X - E[X], Y - E[Y] \in L^2(P)$ も成り立つから, Schwarz の不等式より $(X - E[X])(Y - E[Y]) \in L^1(P)$ となる. X と Y の**共分散 (covariance)** は

$$\text{Cov}[X, Y] := E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

で定義される. 特に $X = Y$ の場合, $\text{Var}[X] := \text{Cov}[X, X]$ と書き, X の**分散 (variance)** と呼ぶ.

例 4.5. X が平均 μ , 分散 v の正規分布に従うならば, $X \in L^2(P)$ であり, $\text{Var}[X] = v$ となる.

命題 4.5. $X, Y \in L^2(P)$ とする. このとき, 以下が成り立つ.

- (a) $\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$. 特に, $\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$.
- (b) $|\text{Cov}[X, Y]| \leq \sqrt{\text{Var}[X]}\sqrt{\text{Var}[Y]}$.
- (c) $\text{Cov}[Y, X] = \text{Cov}[X, Y]$.
- (d) $a, b \in \mathbb{R}, Z \in L^2(P)$ ならば, $\text{Cov}[aX + bY, Z] = a\text{Cov}[X, Z] + b\text{Cov}[Y, Z]$.

演習問題 14. 命題 4.5 を証明せよ.

定義 4.6 (相関係数). $X, Y \in L^2(P)$ とする. $\text{Var}[X] > 0$ かつ $\text{Var}[Y] > 0$ のとき, X と Y の **(Pearson の) 相関係数 ((Pearson) correlation coefficient)** を

$$\text{Corr}[X, Y] := \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X]}\sqrt{\text{Var}[Y]}}$$

で定義する. 命題 4.5 より常に $|\text{Corr}[X, Y]| \leq 1$ が成り立つ.

4.4 独立性

本節では確率論特有の概念である (統計的) 独立性について述べる. まず, 最も一般的な形の定義を述べた後, 応用上重要である特殊な場合について述べていく.

定義 4.7 (部分集合族の独立性). $\mathcal{F}$ の部分集合族 $(\mathcal{G}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が $(P$ の下で) **独立 (independent)** であるとは, 任意の相異なる有限個の Λ の元 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ に対して,

$$G_i \in \mathcal{G}_{\lambda_i} \ (i = 1, \dots, n) \Rightarrow P(G_1 \cap \dots \cap G_n) = P(G_1) \cdots P(G_n)$$

が成り立つことをいう.

注意 4.3. 定義 4.7 で特に $\Lambda = \{1, 2\}$ の場合を考えると, 2 つの $\mathcal{F}$ の部分集合族 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ が独立であることの定義が得られる: $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ が独立であるとは, 任意の $G_1 \in \mathcal{G}_1, G_2 \in \mathcal{G}_2$ に対して $P(G_1 \cap G_2) = P(G_1)P(G_2)$ が成り立つことをいう.

注意 4.4. 定義から明らかなように, もし $\mathcal{F}$ の部分集合族 $(\mathcal{G}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が独立であれば, Λ の任意の空でない部分集合 Λ_0 に対して, $(\mathcal{G}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_0}$ も独立となる.

定義 4.8 (確率変数の生成する σ -加法族). d 次元確率変数 X に対して, X の生成する σ -加法族 (σ -algebra generated by X) を

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$$

で定義する. 補題 1.1 より $\sigma(X)$ は実際に Ω 上の σ -加法族である. なお, X の第 i 成分が X_i ($i = 1, \dots, d$) の場合, $\sigma(X)$ のことを $\sigma(X_1, \dots, X_d)$ とも書く.

定義 4.9 (確率変数族の独立性). Λ を空でない集合とし, 各 $\lambda \in \Lambda$ について $d_\lambda \in \mathbb{N}$ と d_λ 次元確率変数 X_λ が与えられているとする. このとき, 族 $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が $(P$ の下で) **独立 (independent)** であるとは, $\mathcal{F}$ の部分集合族 $(\sigma(X_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ が独立であることをいう.

定義 4.10 (事象の独立性). $\mathcal{F}$ の元の族 $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が $(P$ の下で) **独立 (independent)** であるとは, 確率変数族 $(1_{E_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ が独立であることをいう.

上の定義と初等的な確率統計で現れる独立性の定義との関連を述べるために, 次の補題を用意する.

補題 4.1. $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \mathcal{F}$ を 2 つの Ω 上の π -系とし, $\mathcal{G} := \sigma(\mathcal{I}), \mathcal{H} := \sigma(\mathcal{J})$ とおく. このとき, $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ が独立であるための必要十分条件は, $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ が独立であることである.

証明. 必要性は明らかだから, 十分性を示す. まず, 任意に $I \in \mathcal{I}$ を 1 つ固定し, 関数 $\mu_1 : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$ および $\lambda_1 : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$ を $\mu_1(H) = P(I \cap H), \lambda_1(H) = P(I)P(H)$ で定める. μ_1, λ_1 がともに $(\Omega, \mathcal{H})$ 上の有限測度となることは容易に示せる. $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ が独立であることから, 任意の $J \in \mathcal{J}$ に対して $\mu_1(J) = \lambda_1(J)$ が

成り立ち, かつ $\mu_1(\Omega) = P(I) = \lambda_1(\Omega)$ であるから, 一意性の補題より $\mu_1 = \lambda_1$ を得る. すなわち, 任意の $H \in \mathcal{H}$ に対して $P(I \cap H) = P(I)P(H)$ が成り立つ. 次に, 任意に $H \in \mathcal{H}$ を固定して, 関数 $\mu_2 : \mathcal{G} \rightarrow [0, 1]$ および $\lambda_2 : \mathcal{G} \rightarrow [0, 1]$ を $\mu_2(G) = P(G \cap H), \lambda_2(G) = P(G)P(H)$ で定める. μ_2, λ_2 がともに $(\Omega, \mathcal{G})$ 上の有限測度となることは容易に示せる. 上で示した結果から, 任意の $I \in \mathcal{I}$ に対して $\mu_2(I) = \lambda_2(I)$ が成り立ち, かつ $\mu_2(\Omega) = P(H) = \lambda_2(\Omega)$ であるから, 一意性の補題より $\mu_2 = \lambda_2$ を得る. すなわち, 任意の $G \in \mathcal{G}$ に対して $P(G \cap H) = P(G)P(H)$ が成り立つ. これは $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ が独立であることを意味する. $\square$

系 4.2. $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_{n+1} \subset \mathcal{F}$ を独立な $n+1$ 個の Ω 上の π -系とする. このとき, $\sigma(\mathcal{I}_1 \cup \dots \cup \mathcal{I}_n), \sigma(\mathcal{I}_{n+1})$ は独立である.

証明.

$$\mathcal{I} := \bigcup_{r=1}^n \{I_1 \cap \dots \cap I_r : I_k \in \mathcal{I}_{i(k)} (k=1, \dots, r), 1 \leq i(1) < \dots < i(r) \leq n\}$$

とおく. 明らかに $\mathcal{I}_1 \cup \dots \cup \mathcal{I}_n \subset \mathcal{I}$ であるから, $\sigma(\mathcal{I}), \sigma(\mathcal{I}_{n+1})$ が独立であることを示せば証明は完成する. 各 $\mathcal{I}_i$ が Ω 上の π -系であることに注意すると, $\mathcal{I}$ も Ω 上の π -系となる. 従って, 補題 4.1 より $\mathcal{I}, \mathcal{I}_{n+1}$ が独立であることを示せば十分である. いま, 任意に $I \in \mathcal{I}$ と $J \in \mathcal{I}_{n+1}$ をとると, ある $r \in \{1, \dots, n\}$ と $1 \leq i(1) < \dots < i(r) \leq n$ および $I_k \in \mathcal{I}_{i(k)} (k=1, \dots, r)$ が存在して $I = I_1 \cap \dots \cap I_r$ と書ける. 従って,

$$\begin{aligned} P(I \cap J) &= P(I_1 \cap \dots \cap I_r \cap J) \\ &= P(I_1) \cdots P(I_r) \cdot P(J) \quad (\because \mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_{n+1} \text{ の独立性}) \\ &= P(I_1 \cap \dots \cap I_r) \cdot P(J) \quad (\because \mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n \text{ の独立性}) \\ &= P(I)P(J) \end{aligned}$$

が成り立つ. 故に, $\mathcal{I}, \mathcal{I}_{n+1}$ は独立である. $\square$

系 4.3. $(\mathcal{I}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathcal{F}$ の部分集合族として, 各 $\lambda \in \Lambda$ について $\mathcal{I}_\lambda$ は Ω 上の π -系であるとする. このとき, $(\sigma(\mathcal{I}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ が独立であるための必要十分条件は, $(\mathcal{I}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が独立であることである.

証明. 必要性は明らかだから, 十分性を示す. 独立性の定義から, Λ が有限集合の場合に示せば十分である. このことを Λ の元の個数 $\#\Lambda$ に関する帰納法で示す. $\#\Lambda = 1$ の場合には示すべきことは何もない. いま, $n \geq 2$ とし, $\#\Lambda < n$ の場合には主張が成り立つと仮定する. いま, Λ の相異なる有限個の元 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ を任意にとり, 各 $i = 1, \dots, m$ について $G_i \in \sigma(\mathcal{I}_{\lambda_i})$ を任意にとる. このとき,

$$P(G_1 \cap \dots \cap G_m) = P(G_1) \cdots P(G_m) \quad (4.1)$$

が成り立つことを示せば証明は完成する. $n = \#\Lambda$ であるから $m \leq n$ であるが, もし $m < n$ であれば, 帰納法の仮定より $(\sigma(\mathcal{I}_{\lambda_i}))_{i=1}^m$ は独立となるから, (4.1) は成り立つ. そこで, $m = n$ の場合を考える. いま, 仮定より $(\mathcal{I}_{\lambda_i})_{i=1}^m$ は独立であるから, 系 4.2 より $\sigma(\bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{I}_{\lambda_i}), \sigma(\mathcal{I}_{\lambda_m})$ は独立である. ここで, 各 $j = 1, \dots, m-1$ について $G_j \in \sigma(\mathcal{I}_{\lambda_j}) \subset \sigma(\bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{I}_{\lambda_i})$ であるから, $G_1 \cap \dots \cap G_{m-1} \in \sigma(\bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{I}_{\lambda_i})$ である. 故に,

$$P(G_1 \cap \dots \cap G_m) = P(G_1 \cap \dots \cap G_{m-1})P(G_m)$$

が成り立つ. ここで, 帰納法の仮定より $(\sigma(\mathcal{I}_{\lambda_i}))_{i=1}^{m-1}$ は独立であるから,

$$P(G_1 \cap \dots \cap G_{m-1}) = P(G_1) \cdots P(G_{m-1})$$

も成り立つ. これら 2 つの式を合わせて (4.1) を得る. 以上で証明は完成した. $\square$

次の命題は、定義 4.10 による事象の独立性が、初等的な確率・統計で用いられているものと同等であることを示している。

命題 4.6. $\mathcal{F}$ の元の族 $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が独立であるための必要十分条件は、任意の相異なる有限個の Λ の元 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ に対して、

$$P(E_{\lambda_1} \cap \dots \cap E_{\lambda_n}) = P(E_{\lambda_1}) \cdots P(E_{\lambda_n})$$

が成り立つことである。

証明. 各 $\lambda \in \Lambda$ について $\sigma(1_{E_\lambda}) = \{\emptyset, E_\lambda, E_\lambda^c, \Omega\} = \sigma(\{E_\lambda\})$ が成り立つから、 $\mathcal{I}_\lambda := \{E_\lambda\}$ として系 4.3 を適用すれば、示すべき結論が得られる。□

定義 4.9 による確率変数列の独立性が初等的な確率統計で用いられているものと同等であることを示すために、次の補題を用意する。

補題 4.2. X を確率変数とする。 $X^{-1}(\pi(\mathbb{R}))$ は Ω 上の π -系であり、 $\sigma(X) = \sigma(X^{-1}(\pi(\mathbb{R})))$ が成り立つ。

証明. $X^{-1}(\pi(\mathbb{R}))$ が Ω 上の π -系であることは容易に確認できる。また、 $\pi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ より $X^{-1}(\pi(\mathbb{R})) \subset X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \sigma(X)$ 、従って $\sigma(X^{-1}(\pi(\mathbb{R}))) \subset \sigma(X)$ である。従って、 $\sigma(X) \subset \sigma(X^{-1}(\pi(\mathbb{R})))$ を示せば証明は完成する。

$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : X^{-1}(A) \in \sigma(X^{-1}(\pi(\mathbb{R})))\}$ とおく。補題 1.1 より $\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}$ 上の σ -加法族である。また、明らかに $\pi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$ である。このことと定理 1.1 より $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\pi(\mathbb{R})) \subset \mathcal{A}$ を得る。これは任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して $X^{-1}(B) \in \sigma(X^{-1}(\pi(\mathbb{R})))$ となることを意味するから、 $\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \sigma(X^{-1}(\pi(\mathbb{R})))$ である。□

命題 4.7. n 個の確率変数 $X_1, \dots, X_n$ が独立であるための必要十分条件は、任意の $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ に対して

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \cdots P(X_n \leq x_n) \quad (4.2)$$

が成り立つことである。ここに、

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) := P(\{X_1 \leq x_1\} \cap \dots \cap \{X_n \leq x_n\}).$$

証明. 必要性は明らかだから、十分性を示せばよい。すなわち、(4.2) を仮定した下で $X_1, \dots, X_n$ が独立であることを示せばよいが、系 4.3 と補題 4.2 より、 $X_1^{-1}(\pi(\mathbb{R})), \dots, X_n^{-1}(\pi(\mathbb{R}))$ が独立であることを示せばよい。すなわち、 $\{1, \dots, n\}$ の相異なる有限個の元 $i_1, \dots, i_r$ を任意にとったとき、任意の $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}$ に対して

$$P(X_{i_1} \leq x_1, \dots, X_{i_r} \leq x_r) = P(X_{i_1} \leq x_1) \cdots P(X_{i_r} \leq x_r) \quad (4.3)$$

が成り立つことを示せばよい。いま、各 $k \in \mathbb{N}$ について、 $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_r\}$ に対しては $x_j^{(k)} := k$ とおき、かつ $x_{i_j}^{(k)} := x_j$ ($j = 1, \dots, r$) とおいて実数列 $x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ を定義すると、仮定より

$$P(X_1 \leq x_1^{(k)}, \dots, X_n \leq x_n^{(k)}) = P(X_1 \leq x_1^{(k)}) \cdots P(X_n \leq x_n^{(k)})$$

が成り立つ。上の等式で $k \rightarrow \infty$ とすると、命題 1.6(a) より (4.3) を得る。□

本節の最後に、確率論における最も基本的な研究対象の 1 つである、独立同分布な確率変数列の定義を述べておく。

定義 4.11 (独立同分布). $(X_n)_{n=1}^\infty$ を d 次元確率変数列とする。

- (a) $(X_n)_{n=1}^\infty$ が**同分布 (identically distributed)** であるとは, $P^{X_1} = P^{X_2} = \dots$ が成り立つことをいう.
 (b) $(X_n)_{n=1}^\infty$ が**独立同分布 (independent and identically distributed, i.i.d.)** であるとは, $(X_n)_{n=1}^\infty$ が独立かつ同分布であることをいう.

注意 4.5. $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度の列 $(\nu_n)_{n=1}^\infty$ が与えられたとき, 「適当な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された独立な確率変数列 $(X_n)_{n=1}^\infty$ で, 各 X_n が ν_n に従うようなものが構成できるか?」という問題は自明ではない. 後の節で直積測度の構成を通じてこの問題に肯定的な解答を与えるが, しばらくの間この問題は保留して, 「独立な確率変数列が与えられた際にどのような結論が得られるか?」という問題について調べていく.

4.5 独立性と期待値

定理 4.2. $X, Y \in L^1(P)$ とする. X, Y が独立ならば, $XY \in L^1(P)$ であり,

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y].$$

証明. まず $X \geq 0$ かつ $Y \geq 0$ の場合に成り立つことを示す. X は $\sigma(X)$ -可測であるから, 単関数近似定理より, ある $X_n \in \text{SF}(\sigma(X))^+$ ($n = 1, 2, \dots$) が存在して $X_n \uparrow X$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ. 同様に, ある $Y_n \in \text{SF}(\sigma(Y))^+$ ($n = 1, 2, \dots$) が存在して $Y_n \uparrow Y$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ. このとき, 各 $n \in \mathbb{N}$ について,

$$\begin{aligned} E[X_n Y_n] &= E \left[\sum_{\alpha \in X_n(\Omega)} \sum_{\beta \in Y_n(\Omega)} \alpha \beta 1_{\{X_n=\alpha\} \cap \{Y_n=\beta\}} \right] \\ &= \sum_{\alpha \in X_n(\Omega)} \sum_{\beta \in Y_n(\Omega)} \alpha \beta P(\{X_n=\alpha\} \cap \{Y_n=\beta\}) \\ &= \sum_{\alpha \in X_n(\Omega)} \sum_{\beta \in Y_n(\Omega)} \alpha \beta P(X_n=\alpha) P(Y_n=\beta) \quad (\because \sigma(X), \sigma(Y) \text{ の独立性}) \\ &= \sum_{\alpha \in X_n(\Omega)} \sum_{\beta \in Y_n(\Omega)} \alpha \beta E[1_{\{X_n=\alpha\}}] E[1_{\{Y_n=\beta\}}] \\ &= E[X_n] \cdot E[Y_n] \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, 単調収束定理より $n \rightarrow \infty$ のとき $E[X_n] \rightarrow E[X], E[Y_n] \rightarrow E[Y], E[X_n Y_n] \rightarrow E[XY]$ が成り立つから, 上の式で $n \rightarrow \infty$ とすれば示すべき等式を得る. また, $X, Y \in L^1(P)$ より $XY \in L^1(P)$ も従う.

次に一般の場合を考える. このとき, X^+ と X^- は $\sigma(X)$ -可測であり, Y^+ と Y^- は $\sigma(Y)$ -可測であることに注意すると, 上の結果から $X^+ Y^+, X^+ Y^-, X^- Y^+, X^- Y^- \in L^1(P)$ および

$$\begin{aligned} E[X^+ Y^+] &= E[X^+] \cdot E[Y^+], & E[X^+ Y^-] &= E[X^+] \cdot E[Y^-], \\ E[X^- Y^+] &= E[X^-] \cdot E[Y^+], & E[X^- Y^-] &= E[X^-] \cdot E[Y^-] \end{aligned}$$

が成り立つ. $XY = X^+ Y^+ - X^+ Y^- - X^- Y^+ + X^- Y^-$ と書けることに注意すれば, 積分の線形性より定理の主張が従う. $\square$

定理 4.2 を 3 個以上の確率変数の場合に拡張するために, 次の補題を用意する.

補題 4.3. $X_1, \dots, X_n$ を確率変数とすると, $\sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(\bigcup_{i=1}^n \sigma(X_i))$.

証明. $\mathcal{G} := \sigma(\bigcup_{i=1}^n \sigma(X_i))$ とおく. また, $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ は, X_i を第 i 成分にもつ n 次元確率変数を X として, $\sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(X)$ で定義されることを思い出しておく. いま, 定義より明らかに X は $\sigma(X)$ -可

測であるから、補題 2.6 より各 $i = 1, \dots, n$ について X_i は $\sigma(X)$ -可測である。これは $\sigma(X_i) \subset \sigma(X)$ を意味するから、 $\mathcal{G} \subset \sigma(X)$ である。次に、 $\mathcal{G}$ の定義より各 $i = 1, \dots, n$ について X_i は $\mathcal{G}$ -可測であるから、補題 2.6 より X は $\mathcal{G}$ -可測である。これは $\mathcal{G} \supset \sigma(X)$ と同値である。以上で証明は完成した。 $\square$

系 4.4. $X_1, \dots, X_{n+1}$ を独立な確率変数とすると、 $\sigma(X_1, \dots, X_n), \sigma(X_{n+1})$ は独立である。

証明. 各 $\sigma(X_i)$ が Ω 上の π -系であることに注意すると、系 4.2 と補題 4.3 より示すべき結論を得る。 $\square$

定理 4.3. $X_1, \dots, X_n \in L^1(P)$ とする。 $X_1, \dots, X_n$ が独立であれば、 $X_1 \cdots X_n \in L^1(P)$ であり、

$$E[X_1 \cdots X_n] = E[X_1] \cdots E[X_n].$$

証明. n に関する帰納法による。 $n = 1$ の場合は明らかだから、 $n \geq 2$ として、 $n - 1$ 個の場合は成り立つと仮定する。このとき、帰納法の仮定より $X_1 \cdots X_{n-1} \in L^1(P)$ であり、

$$E[X_1 \cdots X_{n-1}] = E[X_1] \cdots E[X_{n-1}]$$

が成り立つ。一方で、系 4.4 より $\sigma(X_1, \dots, X_{n-1}), \sigma(X_n)$ は独立である。特に、 $X_1 \cdots X_{n-1}, X_n$ は独立であるから、定理 4.2 より $X_1 \cdots X_{n-1} \cdot X_n \in L^1(P)$ であり、

$$E[X_1 \cdots X_n] = E[X_1 \cdots X_{n-1}] \cdot E[X_n]$$

が成り立つ。以上より n 個の場合にも成り立つことが証明された。 $\square$

次に独立性と共分散の関係について述べる。

定義 4.12 (無相関). 確率変数族 $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が (互いに) **無相関 (uncorrelated)** であるとは、任意の $\lambda \in \Lambda$ について $X_\lambda \in L^2(P)$ であり、かつ相異なる任意の $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ に対して $\text{Cov}[X_\lambda, X_{\lambda'}] = 0$ が成り立つことをいう。

命題 4.8. $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を独立な確率変数族とする。任意の $\lambda \in \Lambda$ について $X_\lambda \in L^2(P)$ が成り立つならば、 $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は無相関である。

証明. 定理 4.2 から直ちに従う。 $\square$

演習問題 15. 無相関な確率変数族で独立でないようなものの例を挙げよ。

4.6 Borel–Cantelli の第 2 補題

定理 4.4 (Borel–Cantelli の第 2 補題). $E_n \in \mathcal{F}$ ($n = 1, 2, \dots$) が $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) < \infty$ を満たし、かつ $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ が独立ならば、

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n\right) = 0.$$

証明. $\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ の補集合 $(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k^c$ が P -測度ゼロであることを示せばよい。各 $n \in \mathbb{N}$ について $F_n := \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k^c$ とおくと、 $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} P(F_n) = (\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n)^c$ となるから、すべての $n \in \mathbb{N}$ について $P(F_n) = 0$ となることを示せば、命題 1.6 より求めるべき主張を得る。

$N \geq n$ なる $N \in \mathbb{N}$ を任意にとる。このとき、 $F_n \subset \bigcap_{k=n}^N E_k^c$ が成り立つから、測度の単調性と $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ の独立性より

$$P(F_n) \leq P\left(\bigcap_{k=n}^N E_k^c\right) = \prod_{k=n}^N P(E_k^c) = \prod_{k=n}^N \{1 - P(E_k)\}$$

を得る. ここで, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ不等式 $e^x \geq 1 + x$ を用いると,

$$P(F_n) \leq \prod_{k=n}^N \exp(-P(E_k)) = \exp\left(-\sum_{k=n}^N P(E_k)\right)$$

を得る. 仮定より $N \rightarrow \infty$ のとき $\exp\left(-\sum_{k=n}^N P(E_k)\right) \rightarrow 0$ であるから, 上の式で $N \rightarrow \infty$ とすると $P(F_n) \leq 0$ を得る. すなわち $P(F_n) = 0$ である. $\square$

例 4.6 (Borel–Cantelli の補題の応用例). $(X_n)_{n=1}^\infty$ をレート 1 の指数分布に従う独立同分布な確率変数列とする. すなわち, $(X_n)_{n=1}^\infty$ は独立な確率変数列で,

$$P(X_n > x) = e^{-x}, \quad x > 0, n = 1, 2, \dots$$

を満たすとする. このとき,

$$L := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} = 1 \quad \text{a.s.}$$

が成り立つ. 実際, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $\alpha > 0$ に対して

$$P(X_n > \alpha \log n) = n^{-\alpha}$$

が成り立つから, $\alpha > 1$ ならば, Borel–Cantelli の第 1 補題より $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n > \alpha \log n\}) = 0$ が成り立ち, $\alpha \leq 1$ ならば, Borel–Cantelli の第 2 補題より $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n > \alpha \log n\}) = 1$ が成り立つ. 特に,

$$1 = P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n > \log n\}\right) \leq P(L \geq 1)$$

となるから, $P(L \geq 1) = 1$ である. 一方で, 任意の $k \in \mathbb{N}$ について,

$$P(L > 1 + k^{-1}) \leq P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n > (1 + k^{-1}) \log n\}\right) = 0$$

となるから, $P(L > 1 + k^{-1}) = 0$. 従って, $P(L > 1) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(L > 1 + k^{-1}) = 0$ である. 以上より $P(L = 1) = 1$ である.

5 極限定理

この節でも引き続き、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を設定して議論を進める。

5.1 大数の弱法則

定義 5.1 (確率収束). d 次元確率変数の列 $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ が d 次元確率変数 X に (P の下で) **確率収束する** (converge in probability) とは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$P(\|X_n - X\| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つことをいう。このとき、 $X_n \xrightarrow{P} X$ ($n \rightarrow \infty$) や $X_n \rightarrow^P X$ ($n \rightarrow \infty$) などと書く。

演習問題 16. 定義 5.1 の設定の下で、 $\|X_n - X\|$ は常に確率変数となること、すなわち $\mathcal{F}$ -可測となることを示せ。

この節の最初の目標は以下の定理を証明することである。

定理 5.1 (大数の弱法則). $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ を無相関な確率変数列で $\sup_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}[X_n] < \infty$ を満たすものとする、

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i]) \rightarrow^P 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ。

定理 5.1 の証明には次の不等式 (の特別な場合) を用いる。

補題 5.1 (Markov の不等式). Z を確率変数、 $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ を非減少関数とする。このとき、 $c \in \mathbb{R}$ が $g(c) > 0$ を満たすならば、

$$P(Z \geq c) \leq g(c)^{-1} \mathbb{E}[g(Z)].$$

証明. g が非負かつ非減少であることに注意すれば、

$$P(Z \geq c) = \mathbb{E}[1_{\{Z \geq c\}}] = g(c)^{-1} \mathbb{E}[g(c)1_{\{Z \geq c\}}] \leq g(c)^{-1} \mathbb{E}[g(Z)1_{\{Z \geq c\}}] \leq g(c)^{-1} \mathbb{E}[g(Z)]$$

となる。□

注意 5.1. 補題 5.1 において、 g は Borel 可測であるから (演習問題 4 参照)、 $g(Z)$ は $\mathcal{F}$ -可測である。

系 5.1 (Chebyshev の不等式). $X \in L^2(P)$ ならば、任意の $c > 0$ に対して

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| > c) \leq c^{-2} \text{Var}[X].$$

証明. $Z := |X - \mathbb{E}[X]|$, $g(z) = (z \vee 0)^2$ として Markov の不等式を適用すればよい。□

定理 5.1 の証明. $\bar{X}_n := n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ とおく。 $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ が無相関であることに注意すると、命題 4.5 より

$$\text{Var}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \text{Cov}[X_i, X_j] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i]$$

が成り立つ。従って、Chebyshev の不等式より、任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$P(|\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n]| > \varepsilon) \leq \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] \leq \frac{1}{n \varepsilon^2} \sup_{i \in \mathbb{N}} \text{Var}[X_i]$$

が成り立つ。故に、仮定より $P(|\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n]| > \varepsilon) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を得る。 $\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i])$ に注意すれば定理の結論を得る。□

次に, $(X_n)_{n=1}^\infty$ が独立同分布な確率変数列であれば, 平均の存在を保証する仮定 $X_1 \in L^1(P)$ のみで大数の弱法則が得られることを示す. 証明は上の議論と**刈り込みの方法 (truncation technique)** を組み合わせて行う. 今後の応用で必要となる刈り込みの方法を次の補題で定式化しておく.

補題 5.2. $(X_n)_{n=1}^\infty$ を同分布な確率変数列とし, ある $p \in [1, \infty)$ に対して $X_1 \in L^p(P)$ が成り立つとする. このとき, $n \in \mathbb{N}$ と $\delta > 0$ に対して $X_i(n, \delta) := X_i 1_{\{|X_i| \leq \delta n^{1/p}\}}$ ($i = 1, 2, \dots$) と定めると

$$\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^n E[|X_i(n, \delta) - X_i|] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

証明. $(X_n)_{n=1}^\infty$ が同分布であることから,

$$\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^n E[|X_i(n, \delta) - X_i|] = n^{1-1/p} E[|X_1| 1_{\{|X_1| > \delta n^{1/p}\}}]$$

が成り立つ. 積分の単調性より $E[|X_1| 1_{\{|X_1| > \delta n^{1/p}\}}] \leq (\delta n^{1/p})^{1-p} E[|X_1|^p 1_{\{|X_1| > \delta n^{1/p}\}}]$ が成り立つから,

$$\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^n E[|X_i(n, \delta) - X_i|] \leq \delta^{1-p} E[|X_1|^p 1_{\{|X_1| > \delta n^{1/p}\}}]$$

を得る. ここで, $|X_1|^p 1_{\{|X_1| > \delta n^{1/p}\}} \leq |X_1|^p$ および $|X_1|^p 1_{\{|X_1| > \delta n^{1/p}\}} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) a.s. が成り立つことから, Lebesgue の収束定理より $E[|X_1|^p 1_{\{|X_1| > \delta n^{1/p}\}}] \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) である. 以上より示すべき結論を得る. $\square$

定理 5.2 (大数の弱法則: 独立同分布の場合). $(X_n)_{n=1}^\infty$ を独立同分布な確率変数列で $X_1 \in L^2(P)$ を満たすものとする. このとき, $\mu := E[X_1]$ とおくと,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow^p \mu \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

証明. $\delta > 0$ を任意に 1 つ固定し, 各 $n \in \mathbb{N}$ について確率変数列 $(X_i(n, \delta))_{i=1}^\infty$ を補題 5.2 で $p = 1$ として定める. このとき, $\bar{X}_n := n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ および $\bar{X}_n(\delta) := n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i(n, \delta)$ とおくと,

$$|E[\bar{X}_n] - E[\bar{X}_n(\delta)]| \leq E[|\bar{X}_n - \bar{X}_n(\delta)|] \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[|X_i(n, \delta) - X_i|] \quad (5.1)$$

が成り立つから, 補題 5.2 より $n \rightarrow \infty$ のとき $E[\bar{X}_n] - E[\bar{X}_n(\delta)] \rightarrow 0$ および $E[|\bar{X}_n - \bar{X}_n(\delta)|] \rightarrow 0$ が成り立つ. さらに, $(X_i(n, \delta))_{i=1}^\infty$ は独立となるから, 命題 4.8 と 4.5 より

$$\text{Var}[\bar{X}_n(\delta)] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i(\delta)] \leq \frac{E[X_i(\delta)^2]}{n} \leq \delta^2$$

が成り立つ. 従って, Lyapunov の不等式より $E[|\bar{X}_n(\delta) - E[\bar{X}_n(\delta)]|] \leq \sqrt{\text{Var}[\bar{X}_n(\delta)]} \leq \delta$ を得る. 以上のことと三角不等式によって

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} E[|\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]|] \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (E[|\bar{X}_n - \bar{X}_n(\delta)|] + E[|\bar{X}_n(\delta) - E[\bar{X}_n(\delta)]|] + E[|E[\bar{X}_n(\delta)] - E[\bar{X}_n]|]) \leq \delta \end{aligned}$$

が成り立つ。従って、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、Markov の不等式より

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]| > \varepsilon) \leq \varepsilon^{-1} \delta$$

が成り立つ。 $\delta > 0$ は任意であったから、 $\delta \downarrow 0$ として $\limsup_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]| > \varepsilon) = 0$ を得る。 $(X_n)_{n=1}^\infty$ の同分布性より $E[\bar{X}_n] = \mu$ であるから、示すべき主張が得られた。□

5.2 大数の強法則

大数の弱法則よりも強い仮定をおくことで、標本平均が期待値に概収束することが示せる。

定理 5.3 (大数の強法則). $(X_n)_{n=1}^\infty$ を独立な確率変数列で $\sup_{n \in \mathbb{N}} E[X_n^4] < \infty$ を満たすものとする、

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E[X_i]) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{a.s.}$$

が成り立つ。

証明. $Y_i := X_i - E[X_i]$ ($i = 1, 2, \dots$) とおく。Minkowski の不等式と Lyapunov の不等式より $\|Y_i\|_4 \leq \|X_i\|_4 + |E[X_i]| \leq 2\|X_i\|_4$ が成り立つから、 $\sup_{i \in \mathbb{N}} E[Y_i^4] \leq 16 \sup_{i \in \mathbb{N}} E[|X_i|^4] < \infty$ である。次に、Schwarz の不等式より、任意の $i, j, k, l \in \mathbb{N}$ に対して $Y_i Y_j Y_k Y_l \in L^1(P)$ が成り立つことに注意すると、

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)^4 \right] = \sum_{i,j,k,l=1}^n E[Y_i Y_j Y_k Y_l]$$

を得る。ここで、 i, j, k, l が相異なる場合、定理 4.3 より

$$E[Y_i Y_j Y_k Y_l] = E[Y_i] E[Y_j] E[Y_k] E[Y_l] = 0$$

が成り立つ。また、 $i \neq j$ の場合、Lyapunov の不等式より $Y_i^3 \in L^1(P)$ であることに注意すると、定理 4.2 より

$$E[Y_i^3 Y_j] = E[Y_i^3] E[Y_j] = 0$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} E \left[\left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)^4 \right] &= \sum_{i=1}^n E[Y_i^4] + \sum_{i=1}^n \sum_{j:j \neq i} 3E[Y_i^2 Y_j^2] = \sum_{i=1}^n E[Y_i^4] + 6 \sum_{i < j} E[Y_i^2 Y_j^2] \\ &\leq \sum_{i=1}^n E[Y_i^4] + 6 \sum_{i < j} \sqrt{E[Y_i^4] E[Y_j^4]} \quad (\because \text{Schwarz の不等式}) \\ &\leq n \sup_{i \in \mathbb{N}} E[Y_i^4] + 6 \binom{n}{2} \sup_{i \in \mathbb{N}} E[Y_i^4] \leq 3n^2 \sup_{i \in \mathbb{N}} E[Y_i^4] \end{aligned}$$

となる。従って、 $\bar{Y}_n := n^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i$ とおけば、 $\sum_{n=1}^\infty E[\bar{Y}_n^4] \leq 3 \sup_{i \in \mathbb{N}} E[Y_i^4] \sum_{n=1}^\infty n^{-2} < \infty$ となるので、系 3.6 より $\bar{Y}_n^4 \rightarrow 0$ a.s. が成り立つ。従って $\bar{Y}_n \rightarrow 0$ a.s. である。□

注意 5.2. 定理 5.3 の主張は $\sup_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}[X_n] < \infty$ であれば成立することが知られている (実際には $\sum_{n=1}^\infty n^{-2} \text{Var}[X_n] < \infty$ であればよい)。[7, 定理 8.5] 参照。

定理 5.3 を特に独立同分布の場合に適用すると、以下の結果を得る。

系 5.2 (大数の強法則: 独立同分布の場合). $(X_n)_{n=1}^\infty$ を独立同分布な確率変数列で $X_1 \in L^4(P)$ を満たすものとする. このとき, $\mu := E[X_1]$ とおくと,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mu \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{a.s.}$$

が成り立つ.

注意 5.3. 系 5.2 の主張は実際には $X_1 \in L^1(P)$ であれば正しいことが知られている. [7, 定理 8.7] 参照. さらに, 条件 $X_1 \in L^1(P)$ は標本平均 $(n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i)_{n=1}^\infty$ が (何らかの確率変数に) 概収束するための必要十分条件であることも知られている. [7, 定理 8.19] 参照.

最後に概収束と確率収束の関係について述べておく.

命題 5.1. 確率変数列 $(X_n)_{n=1}^\infty$ が確率変数 X に確率収束するための必要十分条件は, $(X_n)_{n=1}^\infty$ の任意の部分列が X に概収束する部分列をもつことである.

特に, $(X_n)_{n=1}^\infty$ が X に概収束するならば確率収束もする.

証明. 必要性 $(X_n)_{n=1}^\infty$ が X に確率収束するとき, 明らかに $(X_n)_{n=1}^\infty$ の任意の部分列は X に確率収束するので, (X_n) 自身が X に概収束する部分列を持つことを示せば十分である. 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. 各 $i \in \mathbb{N}$ について $I_i := \{N \in \mathbb{N} : \sup_{n \geq N} P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq 2^{-i}\}$ とおく. (X_n) が X に測度収束することから $I_i \neq \emptyset$ なので, I_i は最小値 N_i をもつ. このとき, 正整数の増加列 $n_1 < n_2 < \dots$ を帰納的に $n_1 := N_1$, $n_i := n_{i-1} + N_i$ ($i = 2, 3, \dots$) で定めると, 任意の $i \in \mathbb{N}$ について $n_i \geq N_i$ が成り立つことから

$$P(|X_{n_i} - X| > \varepsilon) \leq 2^{-i}$$

を得る. 従って $\sum_{i=1}^\infty P(|X_{n_i} - X| > \varepsilon) \leq 1 < \infty$ である. よって, 命題 3.17 より $(X_{n_i})_{i=1}^\infty$ は X に概収束する.

十分性 ある $\varepsilon > 0$ が存在して $\delta := \limsup_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) > 0$ となると仮定して矛盾を導く. このとき, (X_n) の部分列 $(X_{n_i})_{i=1}^\infty$ で $P(|X_{n_i} - X| > \varepsilon) \rightarrow \delta$ ($i \rightarrow \infty$) となるようなものがとれる. 仮定より $(X_{n_i})_{i=1}^\infty$ は X に概収束する部分列をもつから, 部分列を取り直すことにより, はじめから $(X_{n_i})_{i=1}^\infty$ は X に概収束すると仮定して一般性を失わない. このとき,

$$\begin{aligned} 0 &= P\left(\limsup_{i \rightarrow \infty} |X_{n_i} - X| \geq \varepsilon\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\sup_{i \geq k} |X_{n_i} - X(x)| \geq \varepsilon\right) \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} P(|X_{n_k} - X| \geq \varepsilon) = \delta \end{aligned}$$

となって矛盾する. □

注意 5.4. 確率収束する確率変数列は概収束するとは限らない. 実際, 確率変数列 $(X_n)_{n=1}^\infty$ を例 4.6 のように定義して $Y_n := X_n / \log n$ ($n = 1, 2, \dots$) と定めると, $Y_n \rightarrow^p 0$ ($n \rightarrow \infty$) となることは容易に確認できるが, 例 4.6 より $\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n = 1$ a.s. であるから $(Y_n)_{n=1}^\infty$ は概収束しない.

5.3 中心極限定理

定義 5.2 (弱収束). S を $\mathbb{R}^d$ の空でない部分集合とする.

(a) S 上の有界かつ連続な実数値関数全体の集合を $C_b(S)$ で表す.

- (b) $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の確率測度の列 $(\nu_n)_{n=1}^\infty$ が $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の確率測度 ν に **弱収束する (converge weakly)** とは, 任意の $f \in C_b(S)$ に対して

$$\int_S f d\nu_n \rightarrow \int_S f d\nu \quad (n \rightarrow \infty) \quad (5.2)$$

が成り立つことをいう. このとき, $\nu_n \Rightarrow \nu$ ($n \rightarrow \infty$) と書く.

定義 5.3 (分布収束). $(X_n)_{n=1}^\infty$ を d 次元確率変数列とする.

- (a) $(X_n)_{n=1}^\infty$ が $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度 ν に (P の下で) **分布収束する (converge in distribution)** とは, $P^{X_n} \Rightarrow \nu$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つことをいう. このことを $X_n \Rightarrow \nu$ ($n \rightarrow \infty$) や $X_n \rightarrow^d \nu$ ($n \rightarrow \infty$) などと書く.
- (b) $(X_n)_{n=1}^\infty$ が d 次元確率変数 X に (P の下で) **分布収束する (converge in distribution)** とは, $P^{X_n} \Rightarrow P^X$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つことをいう. このことを $X_n \Rightarrow X$ ($n \rightarrow \infty$) や $X_n \rightarrow^d X$ ($n \rightarrow \infty$) などと書く.

注意 5.5. 分布収束の代わりに**法則収束 (convergence in law)** という用語が使われることもある. そのため, $X_n \rightarrow^d \nu$ ($n \rightarrow \infty$), $X_n \rightarrow^d X$ ($n \rightarrow \infty$) のことをそれぞれ $X_n \rightarrow^{\mathcal{L}} \nu$ ($n \rightarrow \infty$), $X_n \rightarrow^{\mathcal{L}} X$ ($n \rightarrow \infty$) と書くこともある.

この節の目的は以下の結果を証明することである.

定理 5.4 (中心極限定理). $(X_n)_{n=1}^\infty$ を独立同分布な確率変数列で $X_1 \in L^2(P)$ および $\sigma := \sqrt{\text{Var}[X_1]} > 0$ を満たすものとする. このとき, $\mu := E[X_1]$, $\bar{X}_n := n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ ($n = 1, 2, \dots$) とおくと,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \rightarrow^d N(0, 1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

中心極限定理の証明には複数の著名な方法がある. 最も代表的なものは**特性関数 (characteristic function)** を使う方法である. 特性関数を使った中心極限定理の証明は, 多くの確率論のテキストに説明があるが, 例えば [7, 9.3 節], [8, 1.4 節], [16, Section 2.3], [17, Part C]などを参照のこと. しかし, 特性関数を使った証明にはもう少し準備が必要なため, ここではより初等的な道具のみで証明を実行できる **Stein の方法 (Stein's method)** を紹介する.*¹ 特性関数による証明は 7.8.2 節で扱う.

Stein の方法による証明では, 実際には定理 5.4 より強い結果が得られる. まずはそのことを説明する.

定義 5.4 (Lipschitz 連続). $K > 0$ を定数, S を $\mathbb{R}^d$ の空でない部分集合とする. 関数 $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ が **K -Lipschitz 連続 (K -Lipschitz continuous)** であるとは, 任意の $x, y \in S$ に対して,

$$|h(x) - h(y)| \leq K \|x - y\|$$

が成り立つことをいう. ある $K > 0$ について K -Lipschitz 連続であるような関数は **Lipschitz 連続 (Lipschitz continuous)** であるといい, 定数 K を h の **Lipschitz 定数 (Lipschitz constant)** と呼ぶ.

補題 5.3. 関数 $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が Lipschitz 連続ならば, 任意の $X \in L^1(P)$ に対して $h(X) \in L^1(P)$ となる.

証明. K を h の Lipschitz 定数とすると, $|h(X)| \leq |h(0)| + |h(X) - h(0)| \leq |h(0)| + K|X|$ が成り立つ. 従って $h(X) \in L^1(P)$ である. $\square$

*¹ 初等的な道具のみで実行できる方法としては, **Lindeberg の方法 (Lindeberg's method)** も有名である. Lindeberg の方法による中心極限定理の証明については, 例えば [2, Section 1.3] または [10, Proposition 11.1.3] を参照.

定義 5.5 (Wasserstein 距離). μ, ν を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度で $\int_{\mathbb{R}} |x| \mu(dx) < \infty$ および $\int_{\mathbb{R}} |x| \nu(dx) < \infty$ を満たすものとする. このとき, μ と ν の **Wasserstein 距離 (Wasserstein distance)** を

$$\mathcal{W}(\mu, \nu) := \sup_{h \in \mathcal{H}} \left| \int_{\mathbb{R}} h d\mu - \int_{\mathbb{R}} h d\nu \right|$$

で定義する. ここに, $\mathcal{H}$ は 1-Lipschitz 連続関数 $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 全体の集合を表す (補題 5.3 より任意の $h \in \mathcal{H}$ に対して $h \in L^1(\mu) \cap L^1(\nu)$ となることに注意). また, $X, Y \in L^1(P)$ のとき,

$$\mathcal{W}(X, \nu) := \mathcal{W}(P^X, \nu) \quad \mathcal{W}(X, Y) := \mathcal{W}(P^X, P^Y)$$

と定義する.

定理 5.5 (Wasserstein CLT). 定理 5.4 の仮定の下で,

$$\mathcal{W}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}, N(0, 1)\right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

定理 5.4 は定理 5.5 の系として得られるのだが, そのことを先に示しておく.

補題 5.4. $a_n, b_n \in [0, \infty]$ ($n = 1, 2, \dots$) ならば,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

証明. $m \geq n$ ならば, $a_m + b_m \geq \inf_{k \geq n} a_k + \inf_{k \geq n} b_k$ が成り立つので,

$$\inf_{k \geq n} (a_k + b_k) \geq \inf_{k \geq n} a_k + \inf_{k \geq n} b_k$$

を得る. $n \rightarrow \infty$ として示すべき不等式を得る. □

補題 5.5. S を $\mathbb{R}^d$ の空でない部分集合とし, $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$ を $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の確率測度の列, ν を $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の確率測度とする. このとき, 次の 3 条件は互いに同値である.

- (i) $\nu_n \Rightarrow \nu$ ($n \rightarrow \infty$).
- (ii) 任意の有界な 1-Lipschitz 連続関数 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, (5.2) が成り立つ.
- (iii) S の任意の開集合 U に対して,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \nu_n(U) \geq \nu(U). \quad (5.3)$$

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) 明らか.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) S の開集合 U を任意にとる. $U = S$ の場合 (5.3) は明らかに成り立つので, $U \neq S$ の場合を考える. まず, 関数 $g : S \rightarrow [0, \infty)$ を

$$g(x) = \text{dist}(x, S \setminus U) \quad (x \in S)$$

で定める. このとき, g は 1-Lipschitz 連続関数となる. 実際, 任意に $x, x' \in S$ をとると, 任意の $y \in S \setminus U$ に対して,

$$g(x) \leq \|x - y\| \leq \|x - x'\| + \|x' - y\|$$

が成り立つので, $g(x) \leq \|x - x'\| + g(x')$ が成り立つ. x と x' の役割を入れ替えて $g(x') \leq \|x - x'\| + g(x)$ を得るので, 結局 $|g(x) - g(x')| \leq \|x - x'\|$ である. 次に, 関数 $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ を

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \leq 0, \\ 1 - t & \text{if } 0 < t \leq 1, \\ 0 & \text{if } t > 1 \end{cases}$$

で定めて、各 $k \in \mathbb{N}$ について関数 $f_k : S \rightarrow [0, 1]$ を $f_k(x) = \varphi(kg(x))/k$ ($x \in S$) で定める. φ は明らかに 1-Lipschitz 連続関数であるから、 f_k も 1-Lipschitz 連続関数であることがわかる. 従って (ii) より

$$\int_S f_k d\nu_n \rightarrow \int_S f_k d\nu \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. ここで、 $x \in S \setminus U$ であれば $g(x) = 0$ となることに注意すると、 $f_k \geq k^{-1}1_{S \setminus U}$ が成り立つことがわかる. 従って、

$$\int_S f_k d\nu_n \geq \frac{1}{k} \nu_n(S \setminus U)$$

であるから、

$$\int_S k f_k d\nu \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \nu_n(S \setminus U)$$

を得る. $\nu_n(S \setminus U) = 1 - \nu_n(U)$ に注意して、補題 3.5 と演習問題 5 を使って右辺を書き直すと、

$$\int_S k f_k d\nu \geq 1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \nu_n(U) \quad (5.4)$$

となる. ここで、 $(k f_k)_{k=1}^\infty$ は $1_{S \setminus U}$ に各点収束する. 実際、 $x \in S \setminus U$ ならば $k f_k(x) = 1 = 1_{S \setminus U}(x)$ である. 一方で $x \in U$ ならば、補題 1.15 より $g(x) > 0$ であるから、 $k \rightarrow \infty$ のとき $kg(x) \rightarrow \infty$ 、従って $k f_k(x) \rightarrow 0 = 1_{S \setminus U}(x)$ となる. $|k f_k(x)| \leq 1$ であるので、有界収束定理より

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_S k f_k d\nu = \nu(S \setminus U) = 1 - \nu(U)$$

が成り立つ. 従って (5.4) で $k \rightarrow \infty$ とすると

$$1 - \nu(U) \geq 1 - \liminf_{n \rightarrow \infty} \nu_n(U)$$

を得る. これは (5.3) を意味する.

(iii) $\Rightarrow$ (i) 任意に $f \in C_b(S)$ をとり、 $K := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty$ とおく. (5.2) を示せばよい. もし、

$$\int_S \frac{f(x) + K + 1}{2K + 2} \nu_n(dx) \rightarrow \int_S \frac{f(x) + K + 1}{2K + 2} \nu(dx) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つことを示せば、 $\nu_n(S) = \nu(S) = 1$ に注意すれば、(5.2) も成り立つことがわかる. 従って $0 < f < 1$ の場合に (5.2) を示せば十分である.

いま、 $k \in \mathbb{N}$ を固定して、各 $i = 0, 1, \dots, k$ について

$$U_i := \left\{ x \in S : f(x) < \frac{i}{k} \right\}$$

とおく. f が連続であることから U_i は開集合である. 定義より

$$\sum_{i=1}^k \int_{U_i \setminus U_{i-1}} f d\nu_n \leq \sum_{i=1}^k \frac{i}{k} \nu_n(U_i \setminus U_{i-1})$$

が成り立つ. $\emptyset = U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_k = S$ および $\nu_n(U_i \setminus U_{i-1}) = \nu_n(U_i) - \nu_n(U_{i-1})$ に注意して整理すると、

$$\int_S f d\nu_n \leq 1 - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \nu_n(U_i)$$

を得る. 従って,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_S f d\nu_n &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \nu_n(U_i) \right) \\
&= - \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \nu_n(U_i) \right) \quad (\because \text{演習問題 5}) \\
&= 1 - \frac{1}{k} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k-1} \nu_n(U_i) \quad (\because \text{補題 3.5}) \\
&\leq 1 - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \liminf_{n \rightarrow \infty} \nu_n(U_i) \quad (\because \text{補題 5.4}) \\
&\leq 1 - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \nu(U_i) \quad (\because \text{(iii)})
\end{aligned}$$

となる. 一方で,

$$\sum_{i=1}^k \frac{i-1}{k} \nu(U_i \setminus U_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^k \int_{U_i \setminus U_{i-1}} f d\nu$$

が成り立つから, 上と同様に整理すると,

$$\left(1 - \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \nu(U_i) \leq \int_S f d\nu$$

を得る. 故に,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_S f d\nu_n \leq \int_S f d\nu + \frac{1}{k}$$

が成り立つ. $k \rightarrow \infty$ として

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_S f d\nu_n \leq \int_S f d\nu$$

を得る. 上の議論は $0 < f < 1$ を満たすような連続関数 f であれば成立するから, f の代わりに $1 - f$ をとっても成立する. 従って,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_S (1 - f) d\nu_n \leq \int_S (1 - f) d\nu$$

も成り立つ. 演習問題 5 と補題 3.5 を使って上の不等式を書き直すと,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_S f d\nu_n \geq \int_S f d\nu$$

を得る. 以上より (5.2) が成り立つ. □

補題 5.5 の条件 (i) と (ii) との同値性より, 定理 5.5 から定理 5.4 が従うことがわかる.

定理 5.5 は $X_1 \in L^3(P)$ を仮定した場合に得られる次の結果 (定理 5.5 の定量化版) と刈り込みの方法によって示される.

定理 5.6 (Wasserstein 距離における Berry–Esseen の不等式). 定理 5.4 の仮定の下で, さらに $X_1 \in L^3(P)$ ならば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathcal{W} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}, N(0, 1) \right) \leq \frac{3\mu_3}{\sqrt{n}}$$

が成り立つ. ここに, $\mu_3 := E[|(X_1 - \mu)/\sigma|^3]$ である.

まずは定理 5.6 が正しいと仮定すると定理 5.5 が従うことを示しておく。以下この節では、標準正規分布を γ で表す。また、 $h \in L^1(\gamma)$ に対して $\gamma(h) := \int_{\mathbb{R}} h d\gamma$ とおく。

定理 5.6 から定理 5.5 が従うことの証明。 $\delta > 0$ を任意に 1 つ固定し、各 $n \in \mathbb{N}$ について確率変数列 $(X_i(n, \delta))_{i=1}^{\infty}$ を補題 5.2 で $p = 2$ として定める。このとき、 $\bar{X}_n(\delta) := n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i(n, \delta)$ とおくと (5.1) が成り立つから、補題 5.2 より $n \rightarrow \infty$ のとき $\sqrt{n}(\mathbb{E}[\bar{X}_n] - \mathbb{E}[\bar{X}_n(\delta)]) \rightarrow 0$ および $\sqrt{n} \mathbb{E}[|\bar{X}_n - \bar{X}_n(\delta)|] \rightarrow 0$ が成り立つ。また、Lebesgue の収束定理を用いて $\sigma_n(\delta) := \sqrt{\text{Var}[X_1(n, \delta)]} \rightarrow \sigma$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つことも示せる。特に、十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sigma_n(\delta) > 0$ が成り立つ。そのような n に対して $S_n(\delta) := \sqrt{n}(\bar{X}_n(\delta) - \mathbb{E}[\bar{X}_n(\delta)])/\sigma_n(\delta)$ とおくと、定理 5.6 より

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(S_n(\delta), \gamma) &\leq \frac{3}{\sqrt{n}} \mathbb{E} \left[\left| \frac{X_1(n, \delta) - \mathbb{E}[X_1(n, \delta)]}{\sigma_n(\delta)} \right|^3 \right] \\ &\leq 6\delta \frac{\mathbb{E}[|X_1(n, \delta) - \mathbb{E}[X_1(n, \delta)]|^2]}{\sigma_n(\delta)^3} = \frac{6\delta}{\sigma_n(\delta)} \end{aligned}$$

が成り立つ。

$S_n := \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma$ とおく。 n が十分大きいとき、任意の 1-Lipschitz 連続関数 $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、

$$\begin{aligned} &|\mathbb{E}[h(S_n)] - \gamma(h)| \\ &\leq \left| \mathbb{E}[h(S_n)] - \mathbb{E} \left[h \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma_n(\delta)} \right) \right] \right| + \left| \mathbb{E} \left[h \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma_n(\delta)} \right) \right] - \mathbb{E}[h(S_n(\delta))] \right| \\ &\quad + |\mathbb{E}[h(S_n(\delta))] - \gamma(h)| \\ &\leq \mathbb{E}[\sqrt{n}|\bar{X}_n - \mu|] \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma_n(\delta)} \right) + \frac{\mathbb{E}[|\bar{X}_n - \bar{X}_n(\delta)|] + |\mathbb{E}[\bar{X}_n] - \mathbb{E}[\bar{X}_n(\delta)]|}{\sigma_n(\delta)} + \mathcal{W}(S_n(\delta), \gamma) \end{aligned}$$

が成り立つから、

$$\mathcal{W}(S_n, \gamma) \leq \mathbb{E}[\sqrt{n}|\bar{X}_n - \mu|] \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma_n(\delta)} \right) + \frac{\mathbb{E}[|\bar{X}_n - \bar{X}_n(\delta)|] + |\mathbb{E}[\bar{X}_n] - \mathbb{E}[\bar{X}_n(\delta)]|}{\sigma_n(\delta)} + \mathcal{W}(S_n(\delta), \gamma)$$

が成り立つ。Lyapunov の不等式より $\mathbb{E}[\sqrt{n}|\bar{X}_n - \mu|] \leq \sqrt{n \text{Var}[\bar{X}_n]} = \sigma$ であることに注意すると、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{W}(S_n, \gamma) \leq \frac{6\delta}{\sigma}$$

が成り立つことがわかる。 $\delta > 0$ は任意であったから、 $\delta \downarrow 0$ として $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{W}(S_n, \gamma) = 0$ を得る。□

以下この節の残りで、Stein の方法によって定理 5.6 を証明する。

定義 5.6 (Stein 関数). $h \in L^1(\gamma)$ とする。

$$f_h(x) = e^{x^2/2} \int_{-\infty}^x \{h(y) - \gamma(h)\} e^{-y^2/2} dy \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定義される関数 $f_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を、 h に付随する **Stein 関数 (Stein function)** と呼ぶ。

補題 5.6. $h \in L^1(\gamma)$ とし、 f_h を h に付随する Stein 関数とする。 h が連続ならば、 f_h は C^1 級であり、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f'_h(x) - x f_h(x) = h(x) - \gamma(h). \quad (5.5)$$

証明. Leibniz の公式と微分積分学の基本定理より、 f_h は微分可能であり、

$$f'_h(x) = x e^{x^2/2} \int_{(-\infty, x]} \{h(y) - \gamma(h)\} \gamma(dy) + e^{x^2/2} \cdot \{h(x) - \gamma(h)\} e^{-x^2/2}$$

$$= xf_h(x) + h(x) - \gamma(h)$$

となるから, (5.5) が成り立つ. 特に, (5.5) より f_h が C^1 級であることがわかる. $\square$

注意 5.6. (5.5) を関数 f_h に関する微分方程式と見たものを h に付随する **Stein 方程式 (Stein's equation)** と呼ぶ. Stein 関数は, 境界条件 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} e^{-x^2/2} f_h(x) = 0$ の下での Stein 方程式の一意的な解となっている ([10, Proposition 3.2.2] 参照).

補題 5.6 より, 任意の確率変数 X に対して $h(X) - \gamma(h) = f'_h(X) - Xf_h(X)$ が成り立つ. 従って, $h(X) \in L^1(P)$ ならば, 両辺の期待値をとって,

$$E[h(X)] - \gamma(h) = E[f'_h(X) - Xf_h(X)]$$

を得る. 従って, 左辺の絶対値を評価するには, $|E[f'_h(X) - Xf_h(X)]|$ を評価すればよいことになる. これが Stein の方法の基本的なアイディアである. この方法が上手くいくためには Stein 関数 f_h がよい性質を持っている必要がある. あとで見るように, 定理 5.6 の証明においては f'_h の Lipschitz 連続性がキーとなる. 以下では, h が C^1 級であればそのような性質が成り立つことを見ていく.*2 以下この節では, ϕ と Φ でそれぞれ標準正規分布の密度と分布関数を表す.

補題 5.7 (Gordon の不等式). 任意の $x > 0$ に対して

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1-\Phi(x)}{\phi(x)} \leq \frac{1}{x}.$$

演習問題 17. 補題 5.7 を証明せよ.

補題 5.8. $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を C^1 級関数で $K := \sup_{x \in \mathbb{R}} |h'(x)| < \infty$ を満たすものとする. このとき, $h \in L^1(\gamma)$ である. さらに, h に付随する Stein 関数 f_h は C^2 級であり,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f''_h(x)| \leq 2K. \quad (5.6)$$

証明. まず, 平均値の定理より, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|h(x)| \leq |h(0)| + K|x| \quad (5.7)$$

が成り立つ. 従って $h \in L^1(\gamma)$ である. 次に, 補題 5.6 より f_h は明らかに C^2 級である.

最後に (5.6) をいくつかのステップに分けて証明する.

Step 1 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$h(x) - \gamma(h) = \int_{-\infty}^x h'(y)\Phi(y)dy - \int_x^{\infty} h'(y)\{1-\Phi(y)\}dy \quad (5.8)$$

が成り立つ. 実際, 部分積分法により,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^x h'(y)\Phi(y)dy - \int_x^{\infty} h'(y)\{1-\Phi(y)\}dy \\ &= h(x)\Phi(x) - \int_{-\infty}^x h(y)\phi(y)dy + h(x)\{1-\Phi(x)\} - \int_x^{\infty} h(y)\phi(y)dy = h(x) - \gamma(h) \end{aligned}$$

となる.

*2 実際には h が Lipschitz 連続であれば十分であるが, 技術的理由によりここでは h が C^1 級の場合を考える. 注意 5.7 参照.

Step 2 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f_h(x) = -\phi(x)^{-1}\{1 - \Phi(x)\} \int_{-\infty}^x h'(y)\Phi(y)dy - \phi(x)^{-1}\Phi(x) \int_x^{\infty} h'(y)\{1 - \Phi(y)\}dy \quad (5.9)$$

が成り立つ. 実際, 部分積分法により,

$$f_h(x) = \sqrt{2\pi}e^{x^2/2} \left\{ (h(x) - \gamma(h))\Phi(x) - \int_{-\infty}^x h'(y)\Phi(y)dy \right\}$$

が成り立つから, (5.8) を代入すると,

$$\begin{aligned} f_h(x) &= \sqrt{2\pi}e^{x^2/2} \left\{ \left(\int_{-\infty}^x h'(y)\Phi(y)dy - \int_x^{\infty} h'(y)\{1 - \Phi(y)\}dy \right) \Phi(x) - \int_{-\infty}^x h'(y)\Phi(y)dy \right\} \\ &= \phi(x)^{-1} \left\{ (\Phi(x) - 1) \int_{-\infty}^x h'(y)\Phi(y)dy - \Phi(x) \int_x^{\infty} h'(y)\{1 - \Phi(y)\}dy \right\} \end{aligned}$$

となって (5.9) を得る.

Step 3 補題 5.6 より,

$$f_h''(x) = f_h(x) + xf_h'(x) + h'(x) = (1 + x^2)f_h(x) + x\{h(x) - \gamma(h)\} + h'(x) \quad (5.10)$$

が成り立つ. ここで, (5.8)–(5.9) より,

$$\begin{aligned} &(1 + x^2)f_h(x) + x\{h(x) - \gamma(h)\} \\ &= \{-(1 + x^2)\phi(x)^{-1}(1 - \Phi(x)) + x\} \int_{-\infty}^x h'(y)\Phi(y)dy \\ &\quad + \{-(1 + x^2)\phi(x)^{-1}\Phi(x) - x\} \int_x^{\infty} h'(y)\{1 - \Phi(y)\}dy \end{aligned}$$

と書ける. いま, Gordon の不等式より, 任意の $y > 0$ に対して,

$$-(1 + y^2)\phi(y)^{-1}(1 - \Phi(y)) + y \leq 0$$

が成り立つ. 上の不等式は明らかに $y \leq 0$ の場合にも成り立つから, 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ. さらに, $\Phi(y) = 1 - \Phi(-y)$ に注意すると, 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して,

$$-(1 + y^2)\phi(y)^{-1}\Phi(y) - y \leq 0$$

も成り立つ. 以上より,

$$\begin{aligned} &|(1 + x^2)f_h(x) + x\{h(x) - \gamma(h)\}| \\ &\leq K \left\{ (1 + x^2)\phi(x)^{-1}(1 - \Phi(x)) - x \right\} \int_{-\infty}^x \Phi(y)dy \\ &\quad + K \left\{ (1 + x^2)\phi(x)^{-1}\Phi(x) + x \right\} \int_x^{\infty} \{1 - \Phi(y)\}dy \end{aligned} \quad (5.11)$$

を得る. ここで, 部分積分法により,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x \Phi(y)dy &= x\Phi(x) - \int_{-\infty}^x y\phi(y)dy = x\Phi(x) + \phi(x), \\ \int_x^{\infty} \{1 - \Phi(y)\}dy &= -x\{1 - \Phi(x)\} + \int_x^{\infty} y\phi(y)dy = -x\{1 - \Phi(x)\} + \phi(x) \end{aligned}$$

が成り立つから, (5.11) に代入して整理すると,

$$|(1 + x^2)f_h(x) + x\{h(x) - \gamma(h)\}| \leq K(-x^2 + 1 + x^2) = K$$

を得る. この不等式と (5.10) より, $|f_h''(x)| \leq K + |h'(x)| \leq 2K$ となる. □

以下で示すように, Lipschitz 連続関数は同じ Lipschitz 定数をもつ C^1 級関数で一様に近似できる.

補題 5.9. $K > 0$ とし, 関数 $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は K -Lipschitz 連続であるとする. 各 $m \in \mathbb{N}$ について関数 $h_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$h_m(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x + z/\sqrt{m}) \gamma(dz) \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定めると, 次が成り立つ.

- (a) $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h_m(x) - h(x)| \rightarrow 0 \ (m \rightarrow \infty)$.
- (b) h_m は C^1 級であり, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h'_m(x)| \leq K$.

証明. (a) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$|h_m(x) - h(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \{h(x + z/\sqrt{m}) - h(x)\} \gamma(dz) \right| \leq \frac{K}{\sqrt{m}} \int_{\mathbb{R}} |z| \gamma(dz) = \frac{K}{\sqrt{m}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

が成り立つため, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h_m(x) - h(x)| \rightarrow 0 \ (m \rightarrow \infty)$ である.

(b) まず, 変数変換によって,

$$h_m(x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} h(u) e^{-m(u-x)^2/2} du$$

と書き直せることに注意する. いま, 関数 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(u, x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi}} h(u) e^{-m(u-x)^2/2} \quad (u, x \in \mathbb{R})$$

で定めると,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u, x) = \sqrt{\frac{m^3}{2\pi}} (u - x) h(u) e^{-m(u-x)^2/2}$$

となるから, 任意の $A > 0$ に対して,

$$\sup_{x \in (-A, A)} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(u, x) \right| \leq \sqrt{\frac{m^3}{2\pi}} (|u| + A) (|h(0)| + K|u|) e^{-m(u^2 - 2A|u|)/2}$$

が成り立つ.

$$\int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{m^3}{2\pi}} (|u| + A) (|h(0)| + K|u|) e^{-m(u^2 - 2A|u|)/2} du < \infty$$

であるから, 定理 3.8 より関数 $(-A, A) \ni u \mapsto h_m(u) \in \mathbb{R}$ は微分可能である. $A > 0$ は任意であったから, これは h_m が微分可能であることを意味する. さらに,

$$h'_m(x) = \sqrt{\frac{m^3}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (u - x) h(u) e^{-m(u-x)^2/2} du = \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} zh(x + z/\sqrt{m}) e^{-z^2/2} dz$$

が成り立つ. ここで, 任意の $A > 0$ に対して,

$$\sup_{x \in (-A, A)} \left| zh(x + z/\sqrt{m}) e^{-z^2/2} \right| \leq |z| (|h(0)| + KA + K|z|/\sqrt{m}) e^{-z^2/2}$$

が成り立つことに注意すると, Lebesgue の収束定理より, 関数 $(-A, A) \ni x \mapsto h'_m(x) \in \mathbb{R}$ は連続であることがわかる. $A > 0$ は任意であったから, これは h_m が C^1 級であることを意味する.

最後に, 任意の $x, v \in \mathbb{R}$ に対して,

$$|h_m(x+v) - h_m(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |h(x+v+z/\sqrt{m}) - h(x+z/\sqrt{m})| \gamma(dz) \leq K|v| \gamma(\mathbb{R}) = K|v|$$

が成り立つから, $v \neq 0$ ならば,

$$\left| \frac{h_m(x+v) - h_m(x)}{v} \right| \leq K$$

を得る. 従って, $v \rightarrow 0$ とすれば $|h'_m(x)| \leq K$ を得る. $\square$

定理 5.6 の証明. $S_n := \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma$ とおく. $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が 1-Lipschitz 連続関数ならば,

$$|E[h(S_n)] - \gamma(h)| \leq \frac{3\mu_3}{\sqrt{n}}. \quad (5.12)$$

が成り立つことを示せばよい.

まずは h が C^1 級で $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h'(x)| \leq 1$ を満たす場合に (5.12) が成り立つことを示す. 証明は **Stein の leave-one-out 法 (Stein's leave-one-out method)** による. f を h に付随する Stein 関数とする. 補題 5.6 と微分積分学の基本定理より, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $|f'(x)| \leq |f'(0)| + 2K|x|$ および $|f(x)| \leq |f(0)| + |f'(0)x| + Kx^2$ が成り立つから, 任意の $Y \in L^2(P)$ について $f(Y) \in L^1(P)$, $f'(Y) \in L^2(P)$ となることに注意する. 次に, 各 $i = 1, \dots, n$ について, $\xi_i := (X_i - \mu)/\sigma\sqrt{n}$, $S_n^{(i)} := S_n - \xi_i$ とおく. μ, σ の定義より $E[\xi_i] = 0$ かつ $E[\xi_i^2] = 1/n$ となることに注意する. いま, 系 4.4 より $S_n^{(i)}, \xi_i$ は独立だから, 定理 4.2 より $E[\xi_i f(S_n^{(i)})] = E[\xi_i]E[f(S_n^{(i)})] = 0$ が成り立つ. 従って,

$$\begin{aligned} E[S_n f(S_n)] &= \sum_{i=1}^n E[\xi_i f(S_n)] = \sum_{i=1}^n E[\xi_i f(S_n^{(i)} + \xi_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n E \left[\xi_i \left(f(S_n^{(i)}) + \int_0^1 \xi_i f'(S_n^{(i)} + u\xi_i) du \right) \right] \quad (\because \text{微分積分学の基本定理}) \\ &= \sum_{i=1}^n E \left[\xi_i^2 \int_0^1 f'(S_n^{(i)} + u\xi_i) du \right] \end{aligned}$$

を得る. 一方で, 再び定理 4.2 より

$$E[\xi_i^2 f'(S_n^{(i)})] = E[\xi_i^2]E[f'(S_n^{(i)})] = \frac{1}{n}E[f'(S_n^{(i)})]$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned} E[f'(S_n)] &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} E[f'(S_n)] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} E[f'(S_n^{(i)})] + \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \{E[f'(S_n)] - E[f'(S_n^{(i)})]\} \\ &= \sum_{i=1}^n E[\xi_i^2 f'(S_n^{(i)})] + \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} E[f'(S_n) - f'(S_n^{(i)})] \end{aligned}$$

を得る. 以上より,

$$\begin{aligned} E[f'(S_n) - S_n f(S_n)] &= \sum_{i=1}^n E \left[\xi_i^2 \int_0^1 \{f'(S_n^{(i)}) - f'(S_n^{(i)} + u\xi_i)\} du \right] + \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} E[f'(S_n) - f'(S_n^{(i)})] \end{aligned}$$

を得る. ここで, 補題 5.8 と平均値の定理より,

$$\left| \int_0^1 \{f'(S_n^{(i)}) - f'(S_n^{(i)} + u\xi_i)\} du \right| \leq 2|\xi_i| \int_0^1 u du = |\xi_i|$$

および

$$|f'(S_n) - f'(S_n^{(i)})| \leq 2|\xi_i|$$

が成り立つから, Lyapunov の不等式より $E[|\sqrt{n}\xi_i|] \leq 1 \leq E[|\sqrt{n}\xi_i|^3] = \mu_3$ となることに注意すれば,

$$|E[f'(S_n) - S_n f(S_n)]| \leq \sum_{i=1}^n E[|\xi_i|^3] + 2 \sum_{i=1}^n \frac{E[|\xi_i|]}{n} \leq \frac{3\mu_3}{\sqrt{n}}$$

を得る. この不等式と補題 5.6 より,

$$|E[h(S_n)] - \gamma(h)| = |E[f'(S_n) - S_n f(S_n)]| \leq \frac{3\mu_3}{\sqrt{n}}$$

となって (5.12) が従う.

次に, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が 1-Lipschitz 連続関数の場合に (5.12) が成り立つことを示す. 補題 5.9 より, C^1 級関数の列 $h_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($m = 1, 2, \dots$) で $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h_m(x) - h(x)| \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) かつ $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h'_m(x)| < \infty$ を満たすものが存在する. このとき, 上で示した結果より, 各 $m \in \mathbb{N}$ について

$$|E[h_m(S_n)] - \gamma(h_m)| \leq \frac{3\mu_3}{\sqrt{n}}$$

が成り立つ. 従って,

$$\begin{aligned} |E[h(S_n)] - \gamma(h)| &\leq |E[h_m(S_n)] - E[h(S_n)]| + |E[h_m(S_n)] - \gamma(h_m)| + |\gamma(h_m) - \gamma(h)| \\ &\leq \frac{3\mu_3}{\sqrt{n}} + 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |h_m(x) - h(x)| \end{aligned}$$

を得る. $m \rightarrow \infty$ として (5.12) を得る. □

注意 5.7. (a) 補題 5.8 の主張は実際には h が絶対連続 (absolutely continuous) であれば成立することが知られている ([2, Lemma 2.4] 参照. 絶対連続関数の定義は [12, Definition 7.17] を参照). Lipschitz 連続関数は絶対連続であるから, 上の証明の前半部分の議論は, 実際には一般の Lipschitz 連続関数 h に対して直接適用できる (従って, 補題 5.9 によって Lipschitz 連続関数を C^1 級関数で近似する後半の議論は本質的には不要である).

(b) 上の証明において, 実際には f, f' はともに有界であることが示せる ([2, Lemma 2.4] 参照).

最後に確率収束と分布収束の関係について述べておく.

命題 5.2. d 次元確率変数の列 $(X_n)_{n=1}^\infty$ が d 次元確率変数 X に確率収束するならば, $(X_n)_{n=1}^\infty$ は X に分布収束する.

証明. 補題 5.5 の条件 (i) と (ii) の同値性から, 任意の有界な 1-Lipschitz 関数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $E[f(X_n)] \rightarrow E[f(X)]$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つことを示せばよい. $K := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$ とおく. また, 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. このとき, f の 1-Lipschitz 連続性に注意すると,

$$\begin{aligned} |E[f(X_n)] - E[f(X)]| &\leq E[|f(X_n) - f(X)|; \|X_n - X\| \leq \varepsilon] + E[|f(X_n) - f(X)|; \|X_n - X\| > \varepsilon] \\ &\leq \varepsilon + 2KP(\|X_n - X\| > \varepsilon) \end{aligned}$$

が成り立つ. 仮定より $X_n \xrightarrow{p} X$ ($n \rightarrow \infty$) であるから,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |E[f(X_n)] - E[f(X)]| \leq \varepsilon$$

を得る. $\varepsilon \downarrow 0$ として示すべき主張を得る. □

5.4 区間推定への応用

本節では, 前節までに得た結果を平均パラメータの信頼区間を構成する問題へと応用する. $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ を独立同分布な確率変数列で平均 μ をもつものとする (すなわち, $X_1 \in L^1(P)$ かつ $\mu = E[X_1]$). $n \in \mathbb{N}$ に対して, $X_1, \dots, X_n$ は平均 μ をもつような母集団から n 個独立にデータを観測した際の観測データの数学的モデルだとみなされる. ここでの目的は $X_1, \dots, X_n$ から μ を推定することである. μ の自然な推定量として, 標本平均

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

が考えられる. 実際, $E[\bar{X}_n] = \mu$ だから $\bar{X}_n$ は μ の不偏推定量であり, また適当な条件下で $n \rightarrow \infty$ のとき $\bar{X}_n$ は μ に近づいていくことが大数の法則によって保証されている. より正確に述べると, $X_1 \in L^1(P)$ であれば $\bar{X}_n$ は μ に確率収束し, $X_1 \in L^4(P)$ であれば概収束する (前述したように, 実際には $X_1 \in L^1(P)$ であれば $\bar{X}_n$ は μ に概収束することが知られている). 一般に, $n \rightarrow \infty$ のとき μ に確率収束するような推定量は**弱一貫性 (weak consistency)** をもつといい, 概収束するような推定量は**強一貫性 (strong consistency)** をもつという. 通常, 単に**一貫性 (consistency)** をもつという場合は弱一貫性をさす.

上述の性質は μ の点推定に関する性質であった. ここでの主目的は中心極限定理を用いて μ の区間推定を行うことである. まず次の補題を用意する.

補題 5.10. $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列, ν を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度とし, ν の分布関数を F とする: $F(x) = \nu((-\infty, x])$ ($x \in \mathbb{R}$). $\xi_n \xrightarrow{d} \nu$ ($n \rightarrow \infty$) ならば, F の任意の連続点 x に対して $P(\xi_n \leq x) \rightarrow F(x)$ および $P(\xi_n < x) \rightarrow F(x)$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ.

証明. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $(-\infty, x), (x, \infty)$ はともに $\mathbb{R}$ の開集合なので, 補題 5.5 より

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n < x) \geq \nu((-\infty, x)), \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n > x) \geq \nu((x, \infty))$$

が成り立つ. $P(\xi_n > x) = 1 - P(\xi_n \leq x)$ および $\nu((x, \infty)) = 1 - F(x)$ に注意すると, 第 2 式は

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n \leq x) \leq F(x)$$

と書き直せる. 一方で, x が F の連続点であれば, $\nu((-\infty, x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x - 1/k) = F(x)$ となることに注意すると, 第 1 式は

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n < x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n \leq x)$$

と書き直せる. 従って $P(\xi_n \leq x) \rightarrow F(x)$ ($n \rightarrow \infty$) である. □

注意 5.8. 補題 5.10 は逆も成立することが知られている. 証明は例えば [8, 定理 1.4.2] を参照.

補題 5.10 と中心極限定理より次の結果を得る.

命題 5.3. $X_1 \in L^2(P)$ とし, $\sigma := \sqrt{\text{Var}[X_1]} > 0$ であるとする. このとき, 任意の $-\infty < a < b < \infty$ に対して

$$P\left(a \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq b\right) \rightarrow \Phi(b) - \Phi(a) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (5.13)$$

が成り立つ. ここに, Φ は標準正規分布の分布関数を表す:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

データの標準偏差 σ が既知であれば, 命題 5.3 の仮定の下で, $\alpha \in (0, 1)$ に対して μ の (漸近) $100(1 - \alpha)\%$ 信頼区間を構成できる. 実際, $z_{\alpha/2} := \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$ とおけば,

$$P(\bar{X}_n - z_{\alpha/2} \cdot \sigma / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{\alpha/2} \cdot \sigma / \sqrt{n}) \rightarrow 1 - \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つから,

$$[\bar{X}_n - z_{\alpha/2} \cdot \sigma / \sqrt{n}, \bar{X}_n + z_{\alpha/2} \cdot \sigma / \sqrt{n}]$$

が μ の近似的な $100(1 - \alpha)\%$ 信頼区間を与える.

もちろん, σ が既知であることは現実には稀であるから, 実際には σ もデータから推定する必要がある. σ の推定量としては以下の標本標準偏差を考えるのが一般的である:

$$\hat{\sigma}_n := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}.$$

$\hat{\sigma}_n$ の一致性を示すためにいくつか補題を準備する.

補題 5.11 (連続写像定理). $(\xi_n)_{n=1}^\infty$ を d 次元確率変数列, ξ を d 次元確率変数とする. また, $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ を連続関数とする. このとき次のことが成り立つ.

- (a) $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ ($n \rightarrow \infty$) ならば, $g(\xi_n) \xrightarrow{p} g(\xi)$ ($n \rightarrow \infty$).
- (b) $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ ($n \rightarrow \infty$) ならば, $g(\xi_n) \xrightarrow{d} g(\xi)$ ($n \rightarrow \infty$).

証明. (a) 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. 各 $k \in \mathbb{N}$ について

$$B_k := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| \leq k^{-1} \text{ and } \|g(x) - g(y)\| > \varepsilon \text{ for some } y \in \mathbb{R}^d\}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} & P(\|g(\xi_n) - g(\xi)\| > \varepsilon) \\ & \leq P(\{\|g(\xi_n) - g(\xi)\| > \varepsilon\} \cap \{\xi \in B_k\}) + P(\{\|g(\xi_n) - g(\xi)\| > \varepsilon\} \cap \{\xi \notin B_k\}) \\ & \leq P(\xi \in B_k) + P(\|\xi_n - \xi\| > k^{-1}) \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P(\|g(\xi_n) - g(\xi)\| > \varepsilon) \leq P(\xi \in B_k)$$

である. ここで, $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ であり, かつ g の連続性より $\bigcap_{k=1}^\infty B_k = \emptyset$ であることに注意すれば, 命題 1.6 より $P(\xi \in B_k) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) である. 従って上の式で $k \rightarrow \infty$ とすれば $\limsup_{n \rightarrow \infty} P(\|g(\xi_n) - g(\xi)\| > \varepsilon) = 0$ を得る. これは $g(\xi_n) \xrightarrow{p} g(\xi)$ ($n \rightarrow \infty$) を意味する.

(b) $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ を有界連続関数とする. このとき, $f \circ g$ も有界連続関数となるから, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ ($n \rightarrow \infty$) より $E[f(g(\xi_n))] \rightarrow E[f(g(\xi))]$ ($n \rightarrow \infty$) を得る. 従って $g(\xi_n) \xrightarrow{d} g(\xi)$ ($n \rightarrow \infty$) である. $\square$

補題 5.12. $(\xi_n)_{n=1}^\infty, (\eta_n)_{n=1}^\infty$ を 2 つの確率変数列, ξ, η を 2 つの確率変数とし, $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ ($n \rightarrow \infty$), $\eta_n \xrightarrow{p} \eta$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つと仮定する. このとき次が成り立つ.

- (a) $(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow{p} (\xi, \eta)$ ($n \rightarrow \infty$).
- (b) $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{p} \xi + \eta$ ($n \rightarrow \infty$).
- (c) $\xi_n \eta_n \xrightarrow{p} \xi \eta$ ($n \rightarrow \infty$).

証明. (a) 不等式 $\|(\xi_n, \eta_n) - (\xi, \eta)\| \leq |\xi_n - \xi| + |\eta_n - \eta|$ に注意すると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$P(\|(\xi_n, \eta_n) - (\xi, \eta)\| > \varepsilon) \leq P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon/2) + P(|\eta_n - \eta| > \varepsilon/2)$$

が成り立つ. 従って示すべき主張が成り立つ.

(b) 関数 $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}$ が連続であることに注意すれば, (a) と連続写像定理から示すべき主張を得る.

(c) 関数 $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto xy \in \mathbb{R}$ が連続であることに注意すれば, (a) と連続写像定理から示すべき主張を得る. $\square$

命題 5.4. $X_1 \in L^2(P)$ ならば, $\hat{\sigma}_n \xrightarrow{p} \sigma$ ($n \rightarrow \infty$).

証明. まず,

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2 \right)$$

と書き直せることに注意する. $(X_i^2)_{i=1}^\infty$ は独立同分布で $X_1^2 \in L^1(P)$ を満たすから, 大数の弱法則より

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{p} E[X_1^2] \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. 一方で, 再び大数の弱法則より $\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu$ であるから, 連続写像定理より $\bar{X}_n^2 \xrightarrow{p} \mu^2$ である. 従って, $n/(n-1) \rightarrow 1$ に注意すれば, 補題 5.12 より $\hat{\sigma}_n^2 \xrightarrow{p} E[X_1^2] - \mu^2 = \sigma^2$ を得る. 関数 $x \mapsto \sqrt{|x|}$ について再び連続写像定理を適用して示すべき結論を得る. $\square$

以下において, (5.13) において σ を $\hat{\sigma}_n$ に置き換えてよいことを正当化する.

補題 5.13. $(\xi_n)_{n=1}^\infty, (\eta_n)_{n=1}^\infty$ を 2 つの確率変数列, ξ を確率変数, $c \in \mathbb{R}$ とし, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ ($n \rightarrow \infty$), $\eta_n \xrightarrow{p} c$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つと仮定する. このとき次が成り立つ.

- (a) $(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow{d} (\xi, c)$ ($n \rightarrow \infty$).
- (b) $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} \xi + c$ ($n \rightarrow \infty$).
- (c) $\xi_n \eta_n \xrightarrow{d} c\xi$ ($n \rightarrow \infty$).

証明. (a) 補題 5.5 より任意の有界な 1-Lipschitz 連続関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $E[f(\xi_n, \eta_n)] \rightarrow E[f(\xi, c)]$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つことを示せばよい. まず, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} & |E[f(\xi_n, \eta_n)] - E[f(\xi_n, c)]| \\ & \leq E[|f(\xi_n, \eta_n) - f(\xi_n, c)|; |\eta_n - c| > \varepsilon] + E[|f(\xi_n, \eta_n) - f(\xi_n, c)|; |\eta_n - c| \leq \varepsilon] \\ & \leq KP(|\eta_n - c| > \varepsilon) + \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ. ここに, $K := \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |f(x)| < \infty$ である. 従って, $\eta_n \xrightarrow{p} c$ ($n \rightarrow \infty$) より

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |E[f(\xi_n, \eta_n)] - E[f(\xi_n, c)]| \leq \varepsilon$$

である. $\varepsilon \rightarrow 0$ として $E[f(\xi_n, \eta_n)] - E[f(\xi_n, c)] \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を得る. 次に, $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x, c) \in \mathbb{R}$ が有界連続関数であることに注意すると, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ ($n \rightarrow \infty$) より $E[f(\xi_n, c)] \rightarrow E[f(\xi, c)]$ ($n \rightarrow \infty$) を得る. 以上より $E[f(\xi_n, \eta_n)] \rightarrow E[f(\xi, c)]$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ.

(b) 関数 $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}$ が連続であることに注意すれば, (a) と連続写像定理から示すべき主張を得る.

(c) 関数 $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto xy \in \mathbb{R}$ が連続であることに注意すれば, (a) と連続写像定理から示すべき主張を得る. $\square$

注意 5.9. 補題 5.13 の主張は c が確率変数の場合は一般には成立しない. 例えば [19] の注 1.5 参照.

補題 5.14. $X_1 \in L^2(P)$ かつ $\sigma > 0$ ならば, $\hat{\sigma}_n^{-1} \rightarrow^p \sigma^{-1}$ ($n \rightarrow \infty$).

証明. 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. 各 $\delta > 0$ に対して, 関数 $g_\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g_\delta(x) = \begin{cases} |x|^{-1} & \text{if } |x| \geq \delta, \\ \delta^{-1} & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定めれば, g_δ は明らかに連続であるから, 命題 5.4 と連続写像定理より $g_\delta(\hat{\sigma}_n) \rightarrow^p g_\delta(\sigma)$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ. ここで,

$$P(|\hat{\sigma}_n^{-1} - \sigma^{-1}| > \varepsilon) \leq P(|\hat{\sigma}_n| < \delta) + P(|g_\delta(\hat{\sigma}_n) - \sigma^{-1}| > \varepsilon)$$

が成り立つから, $\delta = \sigma/2$ ととると,

$$P(|\hat{\sigma}_n^{-1} - \sigma^{-1}| > \varepsilon) \leq P(|\hat{\sigma}_n - \sigma| > \sigma/2) + P(|g_\delta(\hat{\sigma}_n) - g_\delta(\sigma)| > \varepsilon)$$

を得る. 従って, 命題 5.4 と $g_\delta(\hat{\sigma}_n) \rightarrow^p g_\delta(\sigma)$ より $P(|\hat{\sigma}_n^{-1} - \sigma^{-1}| > \varepsilon) \rightarrow 0$ を得る. これは $\hat{\sigma}_n^{-1} \rightarrow^p \sigma^{-1}$ を意味する. $\square$

命題 5.5. $X_1 \in L^2(P)$ かつ $\sigma > 0$ ならば, 任意の $-\infty < a < b < \infty$ に対して

$$P\left(a \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\hat{\sigma}_n} \leq b\right) \rightarrow \Phi(b) - \Phi(a) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ.

証明. 補題 5.12 と 5.14 より $\sigma/\hat{\sigma}_n \rightarrow^p 1$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つから, 中心極限定理と補題 5.13 より

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\hat{\sigma}_n} = \frac{\sigma}{\hat{\sigma}_n} \cdot \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \rightarrow^d N(0, 1)$$

が成り立つ. 従って, 補題 5.10 より示すべき主張が従う. $\square$

命題 5.5 の仮定の下で, $\alpha \in (0, 1)$ に対して

$$P(\bar{X}_n - z_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_n/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_n/\sqrt{n}) \rightarrow 1 - \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つから,

$$[\bar{X}_n - z_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_n/\sqrt{n}, \bar{X}_n + z_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_n/\sqrt{n}]$$

が μ の近似的な $100(1 - \alpha)\%$ 信頼区間を与える.

6 直積測度

6.1 単調族定理

定理 6.1 (単調族定理). S を空でない集合とし, $\mathcal{H}$ を S 上の有界な実数値関数からなる集合で以下の 3 条件を満たすものとする:

- (i) $f, g \in \mathcal{H}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ならば $\alpha f + \beta g \in \mathcal{H}$.
- (ii) $\mathcal{H}$ は 1 に値をとる定数関数を含む.
- (iii) $f_n \in \mathcal{H} (n = 1, 2, \dots)$ と有界関数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ が $f_n \uparrow f (n \rightarrow \infty)$ を満たすならば, $f \in \mathcal{H}$.

このとき, S 上の π -系 $\mathcal{I}$ が $\{1_I : I \in \mathcal{I}\} \subset \mathcal{H}$ を満たすならば, すべての $\sigma(\mathcal{I})$ -可測な有界実数値関数は $\mathcal{H}$ に含まれる.

証明. 3 ステップに分けて証明する.

Step 1. $\mathcal{D} := \{F \subset S : 1_F \in \mathcal{H}\}$ とおくと, $\mathcal{D}$ は S 上の Dynkin 系となる. 実際, 公理 (i) は条件 (ii), 公理 (ii) は条件 (i), 公理 (iii) は条件 (iii) からそれぞれ従う. 仮定より $\mathcal{I} \subset \mathcal{D}$ であるから, Dynkin の補題とあわせて $\sigma(\mathcal{I}) \subset \mathcal{D}$ を得る.

Step 2. $f: S \rightarrow [0, \infty)$ は $\sigma(\mathcal{I})$ -可測かつ有界であるとする. このとき, 単関数近似定理よりあるある $f_n, g_n \in \text{SF}(\sigma(\mathcal{I}))^+ (n = 1, 2, \dots)$ が存在して $f_n \uparrow f$ が成り立つ. Step 1, (3.1) および条件 (i) より $\text{SF}(\sigma(\mathcal{I}))^+ \subset \mathcal{H}$ が成り立つことに注意すると, 条件 (iii) より $f \in \mathcal{H}$ となる.

Step 3. $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ が $\sigma(\mathcal{I})$ -可測かつ有界ならば, Step 2 より $f^+, f^- \in \mathcal{H}$ であるから, 条件 (i) より $f = f^+ - f^- \in \mathcal{H}$ となる. $\square$

6.2 直積 σ -加法族

この節では $(S_1, \Sigma_1), (S_2, \Sigma_2)$ を 2 つの可測空間とし, $S := S_1 \times S_2$ とおく. また, 各 $i \in \{1, 2\}$ について関数 $\rho_i: S \rightarrow S_i$ を $\rho_i(x_1, x_2) = x_i (x_1 \in S_1, x_2 \in S_2)$ で定める.

定義 6.1 (直積 σ -加法族). Σ_1 と Σ_2 の直積 σ -加法族 (product σ -algebra) を

$$\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 := \sigma(\rho_1^{-1}(\Sigma_1) \cup \rho_2^{-1}(\Sigma_2))$$

で定義する.

命題 6.1. $\mathcal{I} := \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \Sigma_1, B_2 \in \Sigma_2\}$ とおくと, $\mathcal{I}$ は S 上の π -系であり, かつ $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 = \sigma(\mathcal{I})$ が成り立つ.

証明. $\mathcal{I}$ が S 上の π -系であることは明らか. また, 任意の $B_1 \in \Sigma_1, B_2 \in \Sigma_2$ に対して, $\rho_1^{-1}(B_1) = B_1 \times S_2 \in \mathcal{I}, \rho_2^{-1}(B_2) = S_1 \times B_2 \in \mathcal{I}$ が成り立つから, $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \subset \sigma(\mathcal{I})$ である. さらに, $B_1 \times B_2 = \rho_1^{-1}(B_1) \cap \rho_2^{-1}(B_2) \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ であるから, $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \supset \sigma(\mathcal{I})$ も成り立つ. $\square$

定義 6.2. S 上の関数 f と $x_1 \in S_1, x_2 \in S_2$ に対して, S_2 上の関数 $_{x_1}f$ および S_1 上の関数 ^{x_2}f を

$$(_{x_1}f)(y_2) = f(x_1, y_2) (y_2 \in S_2), \quad (^{x_2}f)(y_1) = f(y_1, x_2) (y_1 \in S_1)$$

で定める.

補題 6.1. $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ を有界な $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ -可測関数とする. このとき, 任意の $x_1 \in S_1, x_2 \in S_2$ に対して, $_{x_1}f, ^{x_2}f$ はそれぞれ Σ_2 -可測, Σ_1 -可測となる.

証明. 有界関数 $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ で $x_1 g, x_2 g$ がそれぞれ Σ_2 -可測, Σ_1 -可測となるようなものの全体の集合を $\mathcal{H}$ とする. 任意の $B_1 \in \Sigma_1, B_2 \in \Sigma_2$ に対して, $x_1 1_{B_1 \times B_2} = 1_{B_1}(x_1)1_{B_2}$ は Σ_2 -可測であり, $x_2 1_{B_1 \times B_2} = 1_{B_1}1_{B_2}(x_2)$ は Σ_1 -可測であるから, $1_{B_1 \times B_2} \in \mathcal{H}$ である. 従って, 単調族定理と命題 6.1 より, $\mathcal{H}$ が単調族定理の条件 (i)–(iii) を満たすことを示せば証明は完成する.

$\mathcal{H}$ が (ii) を満たすことは明らか. (i) を満たすことは命題 2.4 から従う. (iii) を満たすことは系 2.3 から従う. $\square$

系 6.1. $f : S \rightarrow [0, \infty]$ または $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ とする. f が $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ -可測ならば, 任意の $x_1 \in S_1, x_2 \in S_2$ に対して $x_1 f, x_2 f$ はそれぞれ Σ_2 -可測, Σ_1 -可測となる.

証明. まず $f : S \rightarrow [0, \infty]$ の場合を考える. 単関数近似定理より, ある $f_n \in \text{SF}(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)^+ (n = 1, 2, \dots)$ が存在して $f_n \uparrow f (n \rightarrow \infty)$ となる. 補題 6.1 より各 n について $x_1 f_n, x_2 f_n$ はそれぞれ Σ_2 -可測, Σ_1 -可測であり, また明らかに $x_1 f_n \uparrow x_1 f, x_2 f_n \uparrow x_2 f (n \rightarrow \infty)$ が成り立つから, 系 2.3 より $x_1 f, x_2 f$ はそれぞれ Σ_2 -可測, Σ_1 -可測である.

次に $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ の場合を考える. この場合, f^+, f^- に前半の結果を適用すると, $x_1(f^+), x_1(f^-)$ は Σ_2 -可測, $x_2(f^+), x_2(f^-)$ は Σ_1 -可測であることがわかる. 明らかに $x_1 f = x_1(f^+) - x_1(f^-), x_2 f = x_2(f^+) - x_2(f^-)$ が成り立つから, 命題 2.4 より示すべき主張を得る. $\square$

6.3 直積測度: 有限測度の場合

この節では $(S_1, \Sigma_1, \mu_1), (S_2, \Sigma_2, \mu_2)$ を 2 つの測度空間とし, $S := S_1 \times S_2, \Sigma := \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ とおく. また, μ_1, μ_2 はともに有限であると仮定する.

定義 6.3. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ を有界な Σ -可測関数とする. $x_1 \in S_1, x_2 \in S_2$ に対して, 系 6.1 より $x_1 f, x_2 f$ はそれぞれ Σ_2 -可測, Σ_1 -可測である. また, f が有界であることから $x_1 f, x_2 f$ もともに有界であるから, μ_1, μ_2 がともに有限であることより $x_1 f \in L^1(\mu_2), x_2 f \in L^1(\mu_1)$ となる. そこで, 関数 $I_1^f : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ および $I_2^f : S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$I_1^f(x_1) = \int_{S_2} x_1 f d\mu_2 \quad (x_1 \in S_1), \quad I_2^f(x_2) = \int_{S_1} x_2 f d\mu_1 \quad (x_2 \in S_2)$$

で定義する.

$$I_1^f(x_1) = \int_{S_2} f(x_1, y) \mu_2(dy), \quad I_2^f(x_2) = \int_{S_1} f(y, x_2) \mu_1(dy)$$

と書き直せることに注意する.

補題 6.2. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ を有界な Σ -可測関数とする. このとき, I_1^f, I_2^f はともに有界となり, かつそれぞれ Σ_1 -可測, Σ_2 -可測となる. さらに,

$$\int_{S_1} I_1^f d\mu_1 = \int_{S_2} I_2^f d\mu_2 \quad (6.1)$$

が成り立つ.

証明. I_1^f, I_2^f がともに有界であることは明らか. いま, 有界な Σ -可測関数 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ で, I_1^f, I_2^f がそれぞれ Σ_1 -可測, Σ_2 -可測となり, かつ (6.1) を満たすようなものの全体の集合を $\mathcal{H}$ とする. このとき, 任意に $B_1 \in \Sigma_1, B_2 \in \Sigma_2$ に対して, $I_1^{1_{B_1 \times B_2}} = \mu_2(B_2)1_{B_1}, I_2^{1_{B_1 \times B_2}} = \mu_1(B_1)1_{B_2}$ となることから, $1_{B_1 \times B_2} \in \mathcal{H}$ が成り立つ. 従って, 単調族定理と命題 6.1 より, $\mathcal{H}$ が単調族定理の条件 (i)–(iii) を満たすことを示せば証明は完成する.

まず, $f: S \rightarrow \mathbb{R}, g: S \rightarrow \mathbb{R}$ を有界な Σ -可測関数, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とすると, 明らかに $I_j^{\alpha f + \beta g} = \alpha I_j^f + \beta I_j^g$ ($j = 1, 2$) が成り立つ. このことから $\mathcal{H}$ が (i) を満たすことがわかる. 次に, $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ を 1 に値をとる定数関数とすると, I_1^f, I_2^f はそれぞれ $\mu_2(S_2), \mu_1(S_1)$ に値をとる定数関数となるから, 明らかに $f \in \mathcal{H}$ となる. 従って $\mathcal{H}$ は (ii) を満たす. 最後に $\mathcal{H}$ が (iii) を満たすことを示す. $f_n \in \mathcal{H}$ ($n = 1, 2, \dots$) と有界関数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ が $f_n \uparrow f$ ($n \rightarrow \infty$) を満たすとする. 系 2.3 より f は Σ -可測となるから, 特に I_1^f, I_2^f が定義できる. さらに, $f_n \uparrow f$ ($n \rightarrow \infty$) より任意の n について $f_1 \leq f_n \leq f$ が成り立つから, f_1, f の有界性よりある定数 $K > 0$ が存在して $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in S} |f_n(x)| \leq K$ が成り立つ. 従って, 有界収束定理より $(I_1^{f_n})_{n=1}^\infty, (I_2^{f_n})_{n=1}^\infty$ はそれぞれ I_1^f, I_2^f に各点収束する. 特に, 系 2.3 より I_1^f, I_2^f はそれぞれ Σ_1 -可測, Σ_2 -可測である. さらに, 明らかに $|I_1^{f_n}| \leq K, |I_2^{f_n}| \leq K$ が成り立つから, 再び有界収束定理を適用して $\int_{S_1} I_1^{f_n} d\mu_1 \rightarrow \int_{S_1} I_1^f d\mu_1$ および $\int_{S_2} I_2^{f_n} d\mu_2 \rightarrow \int_{S_2} I_2^f d\mu_2$ ($n \rightarrow \infty$) を得る. 従って (6.1) も成り立つから, $f \in \mathcal{H}$ である. $\square$

注意 6.1. (6.1) 式は

$$\int_{S_1} \left(\int_{S_2} f(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) = \int_{S_2} \left(\int_{S_1} f(x_1, x_2) \mu_1(dx_1) \right) \mu_2(dx_2)$$

と書き直せる.

定理 6.2. (S, Σ) 上の有限測度 μ で, 任意の $B_1 \in \Sigma_1, B_2 \in \Sigma_2$ に対して

$$\mu(B_1 \times B_2) = \mu_1(B_1) \mu_2(B_2) \quad (6.2)$$

を満たすものがただ一つ存在する. この測度 μ を μ_1 と μ_2 の**直積測度 (product measure)** と呼び, 記号 $\mu_1 \times \mu_2$ で表す.

証明. 一意性は命題 6.1 と一意性の補題から従うから, 存在を示す. 関数 $\mu: \Sigma \rightarrow [0, \infty)$ を

$$\mu(F) = \int_{S_1} I_1^{1_F} d\mu_1 \quad (F \in \Sigma)$$

で定義する (補題 6.2 よりこの関数 μ は定義可能である). この μ は明らかに (6.2) を満たす. 特に, $\mu(S) = \mu_1(S_1) \mu_2(S_2) < \infty$ である. 従って, μ が (S, Σ) 上の測度であることを示せば証明は完成する. まず, $\mu(\emptyset) = 0$ は明らか. 次に, $F_i \in \Sigma$ ($i = 1, 2, \dots$) が $i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \emptyset$ を満たすとする,

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) &= \int_{S_1} \left(\int_{S_2} \sum_{i=1}^{\infty} 1_{F_i}(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{S_1} \left(\int_{S_2} 1_{F_i}(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) \quad (\because \text{項別積分定理}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) \end{aligned}$$

となる. 以上より μ は (S, Σ) 上の測度である. $\square$

系 6.2. 任意の $F \in \Sigma$ に対して

$$(\mu_1 \times \mu_2)(F) = \int_{S_1} I_1^{1_F} d\mu_1 = \int_{S_2} I_2^{1_F} d\mu_2$$

が成り立つ.

証明. 定理 6.2 の証明と補題 6.2 から従う. $\square$

6.4 直積測度: σ -有限測度への拡張

この節では $(S_1, \Sigma_1, \mu_1), (S_2, \Sigma_2, \mu_2)$ を 2 つの測度空間とし, $S := S_1 \times S_2, \Sigma := \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ とおく. また, μ_1, μ_2 はともに σ -有限であると仮定する.

定理 6.3. (S, Σ) 上の測度 μ で, 任意の $B_1 \in \Sigma_1, B_2 \in \Sigma_2$ に対して (6.2) を満たすものがただ一つ存在する. この測度 μ を μ_1 と μ_2 の**直積測度 (product measure)** と呼び, 記号 $\mu_1 \times \mu_2$ で表す.

証明. まず存在を示す. 仮定より各 $j = 1, 2$ について μ_j は σ -有限だから, ある $A_{j,n} \in \Sigma_j$ ($n = 1, 2, \dots$) が存在して $A_{j,1} \subset A_{j,2} \subset \dots, S_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{j,n}$ かつ $\mu_j(A_{j,n}) < \infty$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たす. ここで, 各 $n \in \mathbb{N}$ について $\mu_{j,n} := 1_{A_{j,n}} \mu_j$, すなわち $\mu_{j,n}(F) = \mu_j(F \cap A_{j,n})$ ($F \in \Sigma_j$) とおくと, $\mu_{j,n}$ は明らかに (S_j, Σ_j) 上の有限測度となる. 従って, 定理 6.2 より $\mu_{1,n}$ と $\mu_{2,n}$ の直積測度 $\lambda_n = \mu_{1,n} \times \mu_{2,n}$ が定義できる. このとき $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ が成り立つ. 実際, 任意の $F \in \Sigma$ に対して

$$\begin{aligned} \lambda_n(F) &= \int_{S_1} \left(\int_{S_2} 1_F(x_1, x_2) \mu_{2,n}(dx_2) \right) \mu_{1,n}(dx_1) \quad (\because \text{系 6.2}) \\ &= \int_{A_{1,n}} \left(\int_{A_{2,n}} 1_F(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) \quad (\because \text{定理 3.5}) \\ &\leq \int_{A_{1,n+1}} \left(\int_{A_{2,n+1}} 1_F(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) \\ &= \int_{S_1} \left(\int_{S_2} 1_F(x_1, x_2) \mu_{2,n+1}(dx_2) \right) \mu_{1,n+1}(dx_1) \quad (\because \text{定理 3.5}) \\ &= \lambda_{n+1}(F) \quad (\because \text{系 6.2}) \end{aligned}$$

となる. 従って, 関数 $\mu: \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ を

$$\mu(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(F) \quad (F \in \Sigma)$$

で定義することができる. この μ が求めるべきものであることを示す. まず, 明らかに $\mu(\emptyset) = 0$ であり, また $F_i \in \Sigma$ ($i = 1, 2, \dots$) が $i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \emptyset$ を満たすとする, と

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n(F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i)$$

となる (最後の等式は補題 1.9 から従う). 従って μ は (S, Σ) 上の測度である. 次に, 任意の $B_1 \in \Sigma_1, B_2 \in \Sigma_2$ に対して,

$$\mu(B_1 \times B_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(B_1 \times B_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1(B_1 \cap A_{1,n}) \mu_2(B_2 \cap A_{2,n}) = \mu_1(B_1) \mu_2(B_2)$$

となる (最後の等式は命題 1.6 および補題 1.6 から従う). 故に, μ は (6.2) を満たす.

次に一意性を示す. μ' を (S, Σ) 上の σ -有限測度で任意の $B_1 \in \Sigma_1, B_2 \in \Sigma_2$ に対して $\mu'(B_1 \times B_2) = \mu_1(B_1) \mu_2(B_2)$ を満たすものとする. このとき, 各 $n \in \mathbb{N}$ について関数 $\mu'_n: \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ を $\mu'_n(F) = \mu'(F \cap (A_{1,n} \times A_{2,n}))$ ($F \in \Sigma$) で定めると, 任意の $B_1 \in \Sigma_1, B_2 \in \Sigma_2$ に対して $\mu'_n(B_1 \times B_2) = \mu'((B_1 \cap A_{1,n}) \times (B_2 \cap A_{2,n})) = \mu_{1,n}(B_1) \mu_{2,n}(B_2)$ が成り立つから, 定理 6.2 の一意性の部分より $\mu'_n = \lambda_n$ が成り立つ. 命題 1.6 より $\mu'_n \uparrow \mu'$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つから, これは $\mu' = \mu$ を意味する. $\square$

6.5 Fubini の定理

この節では $(S_1, \Sigma_1, \mu_1), (S_2, \Sigma_2, \mu_2)$ を 2 つの測度空間とし, $S := S_1 \times S_2, \Sigma := \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ とおく. また, μ_1, μ_2 はともに σ -有限であると仮定し, $\mu := \mu_1 \times \mu_2$ とおく.

定理 6.4 (非負関数に対する Fubini の定理). $f : S \rightarrow [0, \infty]$ を Σ -可測関数とする. このとき, 関数 $S_1 \ni x_1 \mapsto \int_{S_2} f(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \in [0, \infty]$ および $S_2 \ni x_2 \mapsto \int_{S_1} f(x_1, x_2) \mu_1(dx_1) \in [0, \infty]$ はそれぞれ Σ_1 -可測, Σ_2 -可測であり, 以下の等式が成り立つ:

$$\int_S f d\mu = \int_{S_1} \left(\int_{S_2} f(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) = \int_{S_2} \left(\int_{S_1} f(x_1, x_2) \mu_1(dx_1) \right) \mu_2(dx_2). \quad (6.3)$$

証明. まず, ある $F \in \Sigma$ によって $f = 1_F$ とかける場合に定理の主張は成り立つことを示す. $A_{j,n}, \mu_{j,n}, \lambda_n$ を定理 6.3 と同様に定める. 任意の $x_1 \in S_1$ について, 定理 3.5 と単調収束定理より

$$\int_{S_2} f(x_1, x_2) \mu_{2,n}(dx_2) = \int_{S_2} f(x_1, x_2) 1_{A_{2,n}}(x_2) \mu_2(dx_2) \rightarrow \int_{S_2} f(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つから, 補題 6.2 と系 2.3 より関数 $S_1 \ni x_1 \mapsto \int_{S_2} f(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \in [0, \infty]$ は Σ_1 -可測である. 同様にして関数 $S_2 \ni x_2 \mapsto \int_{S_1} f(x_1, x_2) \mu_1(dx_1) \in [0, \infty]$ が Σ_2 -可測であることが示せる. さらに, 系 6.2 より

$$\lambda_n(F) = \int_{S_1} \left(\int_{S_2} 1_F(x_1, x_2) \mu_{2,n}(dx_2) \right) \mu_{1,n}(dx_1) = \int_{S_2} \left(\int_{S_1} 1_F(x_1, x_2) \mu_{1,n}(dx_1) \right) \mu_{2,n}(dx_2)$$

が成り立つ. この式は

$$\lambda_n(F) = \int_{A_{1,n}} \left(\int_{A_{2,n}} 1_F(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) = \int_{A_{2,n}} \left(\int_{A_{1,n}} 1_F(x_1, x_2) \mu_1(dx_1) \right) \mu_2(dx_2)$$

と書き直せるから, $n \rightarrow \infty$ とすれば, 単調収束定理より (6.3) を得る.

上の結果と積分の線形性から, $f \in \text{SF}(\Sigma)^+$ の場合も定理の主張は成り立つことがわかる. 一般の場合は単関数近似定理と単調収束定理から従う. $\square$

定義 6.4. $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \nu)$ を測度空間とする. $\mathcal{X}_0 \in \mathcal{A}$ を定義域とする関数 f が $(\nu$ に関して) $\mathcal{X}$ 上ほとんどいたるところ定義されている (defined almost everywhere) とは, $\nu(\mathcal{X}_0^c) = 0$ であることをいう.

いま, $f : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathcal{X}$ 上ほとんどいたるところ定義された関数とする. f が $\mathcal{A}$ -可測であるとは,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in \mathcal{X}_0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定まる関数 $\tilde{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ が $\mathcal{A}$ -可測であることをいう. このとき, $E \in \mathcal{A}$ に対して $\int_E |f| d\nu := \int_E |\tilde{f}| d\nu$ と定め, $\int_{\mathcal{X}} |f| d\nu < \infty$ のとき f は ν -可積であるといい, $\int_E f d\nu := \int_E \tilde{f} d\nu$ と定める.

定理 6.5 (実関数に対する Fubini の定理). $f \in L^1(\mu)$ とする. このとき, $\int_{S_2} |f(x_1, x_2)| \mu_2(dx_2) < \infty$ μ_1 -a.e. および $\int_{S_1} |f(x_1, x_2)| \mu_1(dx_1) < \infty$ μ_2 -a.e. が成り立つ. 従って関数 $x_1 \mapsto \int_{S_2} f(x_1, x_2) \mu_2(dx_2)$ および $x_2 \mapsto \int_{S_1} f(x_1, x_2) \mu_1(dx_1)$ はそれぞれ μ_1, μ_2 に関して S_1, S_2 上ほとんどいたるところ定義されている, さらに, これらの関数はそれぞれ μ_1 -可積, μ_2 -可積であり, (6.3) が成り立つ.

証明. 最初の主張は命題 3.6 と非負関数に対する Fubini の定理から従う. 関数 $x_1 \mapsto \int_{S_2} f(x_1, x_2) \mu_2(dx_2)$ および $x_2 \mapsto \int_{S_1} f(x_1, x_2) \mu_1(dx_1)$ がそれぞれ μ_1 -可積, μ_2 -可積であることは命題 3.7 と非負関数に対する Fubini の定理から従う. 最後に, (6.3) が成り立つことは積分の線形性と非負関数に対する Fubini の定理から従う. $\square$

注意 6.2. (6.3) の中辺および最右辺はそれぞれ

$$\int_{S_1} \mu_1(dx_1) \int_{S_2} f(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \quad \int_{S_2} \mu_2(dx_2) \int_{S_1} f(x_1, x_2) \mu_1(dx_1)$$

などという記号で表されることがある.

注意 6.3. μ_1, μ_2 のうち (少なくとも) 一方が σ -有限でなかったとしても, 関数 $f: S \rightarrow [0, \infty]$ が Σ -可測であれば, 定理 6.4 の証明と同様の議論から, 二重積分

$$\int_{S_1} \left(\int_{S_2} f(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) \quad \text{および} \quad \int_{S_2} \left(\int_{S_1} f(x_1, x_2) \mu_1(dx_1) \right) \mu_2(dx_2) \quad (6.4)$$

は定義することができる. しかし, μ_1, μ_2 のうち一方が σ -有限でない場合, 両者が一致するとは限らない. 実際, $(S_1, \Sigma_1) = (S_2, \Sigma_2) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ とし, μ_1 を (S_1, Σ_1) 上の Lebesgue 測度, μ_2 を (S_2, Σ_2) 上の計数測度として, $F := \{(x, y) \in S_1 \times S_2 : x = y\}$, $f := 1_F$ とおくと, $F \in \Sigma$ となるから (演習問題), f は Σ -可測である. しかし,

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \left(\int_{S_2} f(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) &= \int_{S_1} \mu_2(\{x_1\}) \mu_1(dx_1) = 1, \\ \int_{S_2} \left(\int_{S_1} f(x_1, x_2) \mu_1(dx_1) \right) \mu_2(dx_2) &= \int_{S_2} \mu_1(\{x_2\}) \mu_2(dx_2) = 0 \end{aligned}$$

となる.

演習問題 18. 注意 6.3 で定義した集合 F が $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に属することを示せ.

注意 6.4. 関数 $f: S \rightarrow [0, \infty]$ が Σ -可測でなかったとしても, 任意の $x_1 \in S_1, x_2 \in S_2$ について $x_1 f, x_2 f$ がそれぞれ Σ_2 -可測, Σ_1 -可測で, かつ関数 $S_1 \ni x_1 \mapsto \int_{S_2} f(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \in [0, \infty]$ および $S_2 \ni x_2 \mapsto \int_{S_1} f(x_1, x_2) \mu_1(dx_1) \in [0, \infty]$ がそれぞれ Σ_1 -可測, Σ_2 -可測であれば, (6.4) 式に現れる 2 つの二重積分は定義される. この場合に (f と μ_1, μ_2 に対する適当な仮定の下で) 両者が一致するか, という問題は「強い形の Fubini の定理」と呼ばれており, この主張が一般に成立するかというのは微妙な問題である. 実際, 強い形の Fubini の定理は数学で通常採用される公理系 (Zermelo–Fraenkel 公理系 + 選択公理, ZFC) においては決定不能 (ZFC が無矛盾であるという仮定の下で, ZFC においては証明も反証も不可能) であることが知られている: 連続体仮説を仮定すると反例が構成できる ([12], page 167), 一方で ZFC のモデルで強い形の Fubini の定理を証明できるものが構成できる ([6]).

6.6 直積 σ -加法族: 一般の場合

この節では可測空間の族 $((S_\lambda, \Sigma_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ が与えられているとする.

定義 6.5 (集合族の直積). 関数 $f: \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ が任意の $\lambda \in \Lambda$ について $f(\lambda) \in S_\lambda$ を満たすとき, f を集合族 $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の**選択関数 (choice function)** と呼ぶ. $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の選択関数全体の集合を $\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ で表し, 集合族 $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の**直積 (direct product)** と呼ぶ.

注意 6.5. 「すべての $\lambda \in \Lambda$ について $S_\lambda \neq \emptyset$ ならば, $\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \neq \emptyset$ である」という命題は**選択公理 (axiom of choice, AC)** と呼ばれており, Zermelo–Fraenkel 公理系 (ZF) においては決定不能であることが知られている. 通常, 選択公理は真であると仮定されるので, 以下でも選択公理は真であると仮定して議論を進める (具体的には定理 6.9 の証明において選択公理を用いる).

注意 6.6. (a) $f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ のことを記号 $(f(\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ で表すことがある.

(b) ある集合 S が存在してすべての $\lambda \in \Lambda$ について $S_\lambda = S$ となるとき, $\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ のことを S^Λ と書く. 従って, S^Λ は Λ から S への関数全体の集合である. 特に, $S^\mathbb{N}$ は S の元の列全体の集合である.

(c) $\Lambda = \{1, \dots, n\}$ のとき, $f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ は順序対 $(f(1), \dots, f(n))$ と同一視される. 従って $\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ は順序対 $(x_1, \dots, x_n)$ で各 $i = 1, \dots, n$ について $x_i \in S_i$ となるようなものの全体の集合となる.

この場合, $\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ のことを $\prod_{i=1}^n S_i$ あるいは $S_1 \times \cdots \times S_n$ などとも書く. $r \in \{1, \dots, n-1\}$ について, $(S_1 \times \cdots \times S_r) \times (S_{r+1} \times \cdots \times S_n)$ は自然に $S_1 \times \cdots \times S_n$ と同一視される ($((x_1, \dots, x_r), (x_{r+1}, \dots, x_n)) \in (S_1 \times \cdots \times S_r) \times (S_{r+1} \times \cdots \times S_n)$ と $(x_1, \dots, x_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ を同一視すればよい).

特に $S_1 = \cdots = S_n =: S$ の場合, $S_1 \times \cdots \times S_n$ は S^n と表される (この記法は $S = \mathbb{R}$ の場合の $\mathbb{R}^n$ の定義と整合的であることに注意).

(d) $\Lambda = \mathbb{N}$ のとき, $\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ のことを $\prod_{i=1}^\infty S_i$ あるいは $S_1 \times S_2 \times \cdots$ などとも書く.

以下この節では $S := \prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ とおく.

定義 6.6 (射影). $\lambda \in \Lambda$ に対して, $\rho_\lambda(f) = f(\lambda)$ ($f \in S$) で定まる関数 $\rho_\lambda : S \rightarrow S_\lambda$ を S 上の λ -射影 (λ -projection) と呼ぶ.

定義 6.7 (直積 σ -加法族). 各 $\lambda \in \Lambda$ について S 上の λ -射影を ρ_λ と書くことにする. σ -加法族の族 $(\Sigma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の直積 σ -加法族を

$$\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \Sigma_\lambda := \sigma \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda^{-1}(\Sigma_\lambda) \right)$$

と定義する.

注意 6.7. (a) ある可測空間 (S, Σ) が存在してすべての $\lambda \in \Lambda$ について $(S_\lambda, \Sigma_\lambda) = (S, \Sigma)$ となるとき, $\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \Sigma_\lambda$ のことを $\Sigma^{\otimes \Lambda}$ と書く.

(b) $\Lambda = \{1, \dots, n\}$ のとき, $\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \Sigma_\lambda$ のことを $\bigotimes_{i=1}^n \Sigma_i$ あるいは $\Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_n$ などとも書く (この記法は定義 6.1 と整合的であることに注意). 特に $\Sigma_1 = \cdots = \Sigma_n =: \Sigma$ の場合, $\Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_n$ は $\Sigma^{\otimes n}$ と表される.

(c) $\Lambda = \mathbb{N}$ のとき, $\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \Sigma_\lambda$ のことを $\bigotimes_{i=1}^\infty \Sigma_i$ あるいは $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \cdots$ などとも書く.

補題 6.3. $\Lambda = \{1, \dots, n\}$ とし, $\Sigma := \Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_n$ とおく.

(a) 各 $i = 1, \dots, n$ について, Σ_i はある $\mathcal{C}_i \subset \Sigma_i$ によって生成されているとする: $\Sigma_i = \sigma(\mathcal{C}_i)$. このとき, $S_i \in \mathcal{C}_i$ ($i = 1, \dots, n$) ならば,

$$\mathcal{C} := \{C_1 \times \cdots \times C_n : C_i \in \mathcal{C}_i \ (i = 1, \dots, n)\}$$

とおくと, $\Sigma = \sigma(\mathcal{C})$ が成り立つ.

(b) 任意の $r \in \{1, \dots, n-1\}$ に対して

$$\Sigma = (\Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_r) \otimes (\Sigma_{r+1} \otimes \cdots \otimes \Sigma_n)$$

が成り立つ.

証明. (a) 各 $i = 1, \dots, n$ について, S 上の i -射影を ρ_i とする. まず, 任意の $C_i \in \Sigma_i$ ($i = 1, \dots, n$) に対して,

$$C_1 \times \cdots \times C_n = \rho_1^{-1}(C_1) \cap \cdots \cap \rho_n^{-1}(C_n) \in \Sigma$$

が成り立つ. 従って $\sigma(\mathcal{C}) \subset \Sigma$ である. 次に, $S_i \in \mathcal{C}_i$ ($i = 1, \dots, n$) に注意すると, 各 $i = 1, \dots, n$ について $\rho_i^{-1}(C_i) \subset \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$ が成り立つ. これは $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}'_i := \{C \subset S_i : \rho_i^{-1}(C) \in \sigma(\mathcal{C})\}$ を意味する. 補題 1.1 より $\mathcal{C}'_i$ は S_i 上の σ -加法族であるから, これは $\Sigma_i = \sigma(\mathcal{C}_i) \subset \mathcal{C}'_i$, すなわち $\rho_i^{-1}(\Sigma_i) \subset \sigma(\mathcal{C})$ を意味する. 以上より $\bigcup_{i=1}^n \rho_i^{-1}(\Sigma_i) \subset \sigma(\mathcal{C})$ であるから, $\Sigma \subset \sigma(\mathcal{C})$ である.

(b) $\mathcal{A}_1 := \{B_1 \times \cdots \times B_n : B_i \in \Sigma_i (i = 1, \dots, n)\}$, $\mathcal{A}_2 := \{B_1 \times \cdots \times B_r : B_i \in \Sigma_i (i = 1, \dots, r)\}$, $\mathcal{A}_3 := \{B_{r+1} \times \cdots \times B_n : B_i \in \Sigma_i (i = r+1, \dots, n)\}$ とおく. (a) より $\Sigma = \sigma(\mathcal{A}_1), \Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_r = \sigma(\mathcal{A}_2), \Sigma_{r+1} \otimes \cdots \otimes \Sigma_n = \sigma(\mathcal{A}_3)$ が成り立つ. 従って $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2) \otimes \sigma(\mathcal{A}_3)$ を示せばよい. $\mathcal{A}_1 = \{A_2 \times A_3 : A_2 \in \mathcal{A}_2, A_3 \in \mathcal{A}_3\}$ が成り立つことに注意すれば, これは (a) から従う. $\square$

命題 6.2. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ.

証明. 各 $i = 1, \dots, n$ について, $\mathbb{R}^n$ 上の i -射影を ρ_i と書くことにする. ρ_i は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への連続関数だから, 命題 2.2 より Borel 可測である. すなわち, $\rho_i^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ. 故に, $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n} = \sigma(\bigcup_{i=1}^n \rho_i^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ である. 一方で, 補題 6.3 より任意の $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ に対して $U_1 \times \cdots \times U_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n}$ が成り立つ. 補題 2.5 より $\mathbb{R}^n$ の任意の開集合は $U_1 \times \cdots \times U_n$ という形の集合の可算和で表すことができるから, これは $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n}$ を意味する. 従って $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n}$ である. $\square$

6.7 直積測度: n 重への拡張

この節では $(S_1, \Sigma_1, \mu_1), \dots, (S_n, \Sigma_n, \mu_n)$ を n 個の測度空間とし, $S := S_1 \times \cdots \times S_n, \Sigma := \Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_n$ とする. また, $\mu_1, \dots, \mu_n$ はすべて σ -有限であると仮定する.

定理 6.6. (S, Σ) 上の測度 μ で, 任意の $B_i \in \Sigma_i (i = 1, \dots, n)$ に対して

$$\mu(B_1 \times \cdots \times B_n) = \mu_1(B_1) \cdots \mu_n(B_n)$$

を満たすものがただ一つ存在する. この測度 μ を $\mu_1, \dots, \mu_n$ の**直積測度 (product measure)** と呼び, 記号 $\prod_{i=1}^n \mu_i$ または $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ で表す.

証明. n に関する帰納法による. $n = 1$ のときは明らかに成り立つから, $n \geq 2$ として, $n-1$ については成り立つと仮定する. いま, 帰納法の仮定より, $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ については定理の条件を満たす $(\prod_{i=1}^{n-1} S_i, \bigotimes_{i=1}^{n-1} \Sigma_i)$ 上の測度 λ がただ一つ存在する. このとき $\mu := \lambda \times \mu_n$ とおくと, μ は明らかに $\mu_1, \dots, \mu_n$ について定理の条件を満たす. これで存在は示された. 次に, μ' を $\mu_1, \dots, \mu_n$ について定理の条件を満たす別の測度とする. このとき, 任意の $E \in \bigotimes_{i=1}^{n-1} \Sigma_i$ と $B \in \Sigma_n$ に対して $\mu'(E \times B) = \lambda(E)\mu_n(B)$ が成り立つことを示せば, 定理 6.3 より $\mu' = \lambda \times \mu_n = \mu$ となって一意性も示される. いまもし $\mu_n(B) = 0$ であれば, $\mu'(S_1 \times \cdots \times S_{n-1} \times B) = 0$ となるから, $\mu(E \times B) = 0 = \lambda(E)\mu_n(B)$ となる. 一方で $\mu_n(B) > 0$ ならば, 関数 $\lambda' : \bigotimes_{i=1}^{n-1} \Sigma_i \rightarrow [0, \infty]$ を $\lambda'(F) = \mu'(F \times B)/\mu_n(B)$ で定めると, λ' は明らかに $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ については定理の条件を満たすから, 帰納法の仮定より $\lambda' = \lambda$ である. 従って $\mu'(E \times B) = \lambda(E)\mu_n(B)$ である. $\square$

系 6.3. 任意の $r \in \{1, \dots, n-1\}$ に対して, $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n = (\mu_1 \times \cdots \times \mu_r) \times (\mu_{r+1} \times \cdots \times \mu_n)$.

証明. 定理 6.6 の一意性の部分から従う. $\square$

注意 6.8. $\mu_1 = \cdots = \mu_n =: \mu$ の場合, $\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ のことを μ^n とも書く.

定義 6.8 (n 次元 Lebesgue 測度). λ を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の Lebesgue 測度とする. 命題 6.2 より λ^n は $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上の測度であり, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ **上の Lebesgue 測度** と呼ばれる. また, $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して, $\mu(F) = \lambda^n(F)$ ($F \in \mathcal{B}(E)$) と定めて $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の測度 μ を定めることができるが, この μ を $(E, \mathcal{B}(E))$ **上の Lebesgue 測度** と呼ぶ.

注意 6.9. $f : S \rightarrow [-\infty, \infty]$ を Σ -可測関数とし, $f \geq 0$ または $f \in L^1(\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)$ であるとする. このと

き, $E \in \Sigma$ に対して,

$$\int_E f d(\mu_1 \times \cdots \times \mu_n)$$

のことを,

$$\int_E f d\mu_1 \cdots d\mu_n \quad \text{あるいは} \quad \int_E f(x_1, \dots, x_n) \mu_1(dx_1) \cdots \mu_n(dx_n)$$

などという記号で表すことがある. 特に $\mu_1, \dots, \mu_n$ がすべて Lebesgue 測度の場合, $\mu_i(dx_i)$ という記号は単に dx_i と書かれる. すなわち, 上の積分は

$$\int_E f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

などという記号で表されることがある.

6.8 直積測度と独立性

この節では $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする.

定理 6.7. 各 $i = 1, \dots, n$ について $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の d_i 次元確率変数 X_i が与えられているとする. $d := d_1 + \cdots + d_n$ とし, d 次元確率変数 $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ を $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ で定める. このとき, 次の 2 条件は互いに同値である:

- (i) $X_1, \dots, X_n$ は独立である.
- (ii) $P^X = P^{X_1} \times \cdots \times P^{X_n}$.

証明. $X_1, \dots, X_n$ が独立であることは, 任意の $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_i})$ ($i = 1, \dots, n$) に対して

$$P^X(B_1 \times \cdots \times B_n) = P^{X_1}(B_1) \cdots P^{X_n}(B_n)$$

が成り立つことと同値である. 従って (ii) $\Rightarrow$ (i) が成り立つ. (i) $\Rightarrow$ (ii) は定理 6.6 の一意性の部分から従う. $\square$

6.9 Carathéodory の拡張定理

次節で可算無限個の確率測度の直積を構成するために次の結果を用いる.

定理 6.8 (Carathéodory の拡張定理). S を集合, Σ_0 を S 上の加法族として, $\Sigma := \sigma(\Sigma_0)$ とおく. このとき, 関数 $\mu_0 : \Sigma_0 \rightarrow [0, \infty]$ が可算加法的ならば, (S, Σ) 上の測度 μ で

$$\mu(F) = \mu_0(F) \quad \text{for all } F \in \Sigma_0 \tag{6.5}$$

を満たすものが存在する. 特に, $\mu_0(S) < \infty$ ならば, (6.5) を満たす (S, Σ) 上の測度 μ は一意的に定まる.

証明. 一意性は加法族が π -系であることと補題 1.11 から従う. 存在を示すために, 補題 1.14 を $\mathcal{G} = \mathcal{P}(S), \mathcal{G}_0 = \Sigma_0, \lambda_0 = \mu_0$ として適用して S 上の外測度 λ を定める. λ -可測集合の全体を $\mathcal{L}$ とすると, Carathéodory の補題より λ の $\mathcal{L}$ への制限は可算加法的となる. 従って,

- (A) λ の Σ_0 への制限は μ_0 で, かつ
- (B) $\Sigma \subset \mathcal{L}$

であることを示せば, μ を λ の Σ への制限として定めることで存在性の主張が従う.

(A) の証明. 任意に $F \in \Sigma_0$ に対して $\lambda(F) = \mu_0(F)$ が成り立つことを示す. 補題 1.14 より $\lambda(F) \leq \mu_0(F)$ だから, 逆向きの不等式を示せばよい. $F_j \in \Sigma_0$ ($j = 1, 2, \dots$) が $F \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ を満たすとする. このとき, 集合列 $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ を帰納的に $E_1 := F_1, E_j := F_j \setminus F_{j-1}$ ($j = 2, 3, \dots$) で定めれば, 明らかに $j \neq k \Rightarrow E_j \cap E_k = \emptyset$ が成り立つ. また, Σ_0 が加法族であることから $E_j \cap F \in \Sigma_0$ ($j = 1, 2, \dots$) であり, かつ $\bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j \cap F) = F \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = F \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = F \in \Sigma_0$ が成り立つ. よって, μ_0 が可算加法的であることから,

$$\mu_0(F) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j \cap F) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(F_j)$$

を得る. ただし, 最後の不等式を得るのに補題 1.10 を用いた. (F_j) に関する下限をとって $\mu_0(F) \leq \lambda(F)$ を得る.

(B) の証明. Carathéodory の補題より $\mathcal{L}$ は S 上の σ -加法族だから, $\Sigma_0 \subset \mathcal{L}$ を示せば十分である. すなわち, 任意の $E \in \Sigma_0$ と $G \subset S$ に対して

$$\lambda(G) = \lambda(E \cap G) + \lambda(E^c \cap G)$$

を示せばよい. λ の劣加法性より $\lambda(G) \leq \lambda(E \cap G) + \lambda(E^c \cap G)$ は成り立つから,

$$\lambda(G) \geq \lambda(E \cap G) + \lambda(E^c \cap G)$$

を示せばよい. $\lambda(G) = \infty$ のときは明らかだから, そうでない場合を考える.

任意に $\varepsilon > 0$ をとる. $\lambda(G) < \lambda(G) + \varepsilon$ であるから, λ の定義よりある $F_j \in \Sigma_0$ ($j = 1, 2, \dots$) が存在して $G \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ かつ $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(F_j) < \lambda(G) + \varepsilon$ が成り立つ. ここで, μ_0 の加法性と λ の定義より

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(F_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E \cap F_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E^c \cap F_j) \geq \lambda(E \cap G) + \lambda(E^c \cap G)$$

が成り立つから, $\lambda(E \cap G) + \lambda(E^c \cap G) < \lambda(G) + \varepsilon$ を得る. $\varepsilon \downarrow 0$ として示すべき不等式を得る. $\square$

加法的集合関数の可算加法性を確認するにはしばしば次の結果が有用である.

補題 6.4. S を集合, Σ_0 を S 上の加法族とする. また, 関数 $\mu_0 : \Sigma_0 \rightarrow [0, \infty]$ は加法的であり, かつ $\mu_0(S) < \infty$ を満たすとする. このとき, 次の 2 条件は互いに同値である:

- (i) μ_0 は可算加法的である.
- (ii) $F_n \in \Sigma_0$ ($n = 1, 2, \dots$) が $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_0(F_n) > 0$ を満たすならば, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ である.

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Sigma := \sigma(\Sigma_0)$ とおく. Carathéodory の拡張定理より, 可測空間 (S, Σ) 上の測度 μ で (6.5) を満たすものが (ただ一つ) 存在する. このとき, $\mu(F_1) = \mu_0(F_1) \leq \mu_0(S) < \infty$ に注意すれば, 命題 1.6(b) と (i) の仮定より $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_0(F_n) > 0$ が成り立つ. 従って $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ となる.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $F_n \in \Sigma_0$ ($n = 1, 2, \dots$) が $F := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \Sigma_0$ かつ $i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j = \emptyset$ を満たすとする. このとき $\mu_0(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(F_n)$ となることを示せばよい. まず, $G_n := \bigcup_{i=1}^n F_i$ とおくと, μ_0 の加法性より

$$\mu_0(G_n) = \sum_{i=1}^n \mu_0(F_i)$$

が成り立つ. ここで, $H_n := F \setminus G_n$ ($n = 1, 2, \dots$) とおくと, 明らかに $H_1 \supset H_2 \supset \dots$ かつ $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = \emptyset$ となるから, 条件 (ii) より $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_0(H_n) = 0$ とならなければならない. $F = G_n \cup H_n$ かつ $G_n \cap H_n = \emptyset$ であることに注意すれば, μ_0 の加法的性より

$$\mu_0(F) = \mu_0(G_n) + \mu_0(H_n) = \sum_{i=1}^n \mu_0(F_i) + \mu_0(H_n)$$

を得る. $n \rightarrow \infty$ として求めるべき等式を得る. □

6.10 可算無限個の確率空間の直積

この節では, 確率空間の列 $((\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i))_{i=1}^{\infty}$ が与えられているとして, $\Omega := \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, $\mathcal{F} := \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$ とする. 本節の目的は次の定理を証明することである:

定理 6.9. $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 P で, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $F_i \in \mathcal{F}_i$ ($i = 1, \dots, n$) に対して

$$P(F_1 \times \dots \times F_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \dots) = P_1(F_1) \cdots P_n(F_n)$$

を満たすようなものがただ一つ存在する. この確率測度 P を $(P_i)_{i=1}^{\infty}$ の直積 (測度) と呼び, 記号 $\prod_{i=1}^{\infty} P_i$ や $P_1 \times P_2 \times \dots$ などで表す.

証明には選択公理を以下の形で用いる:

定義 6.9 (選択関数). S を集合とする. 関数 $f: \mathcal{P}(S) \rightarrow S$ が S 上の**選択関数**であるとは, $A \neq \emptyset$ なる任意の $A \in \mathcal{P}(S)$ に対して $f(A) \in A$ が成り立つことをいう.

補題 6.5. $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を集合族とする. 任意の $\lambda \in \Lambda$ について $S_\lambda \neq \emptyset$ ならば, 関数族 $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ で任意の $\lambda \in \Lambda$ について f_λ が S_λ 上の選択関数となっているものが存在する.

証明. 各 $\lambda \in \Lambda$ について, S_λ 上の選択関数全体の集合を Φ_λ と書くことにする. $\prod_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda \neq \emptyset$ を示せばよい. そのためには, 選択公理より任意の $\lambda \in \Lambda$ について $\Phi_\lambda \neq \emptyset$ となることを示せば十分である. いま, S_λ の空でない部分集合全体の集合を $\mathcal{A}_\lambda$ と書くことにすると, 選択公理より $\prod_{A \in \mathcal{A}_\lambda} A \neq \emptyset$ が成り立つ. 従ってある $g_\lambda \in \prod_{A \in \mathcal{A}_\lambda} A$ がとれる. 一方で $S_\lambda \neq \emptyset$ であるから, ある $x_\lambda \in S_\lambda$ がとれる. このとき関数 $f_\lambda: \mathcal{P}(S_\lambda) \rightarrow S_\lambda$ を

$$f_\lambda(A) = \begin{cases} g_\lambda(A) & \text{if } A \neq \emptyset, \\ x_\lambda & \text{if } A = \emptyset \end{cases}$$

で定めれば, 明らかに $f_\lambda \in \Phi_\lambda$ となる. □

定理 6.9 の証明. Step 1 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{F_1 \times \dots \times F_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \dots : F_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}_n\}$ は明らかに $\mathcal{F}$ を生成する Ω 上の π -系である. 従って, P の一意性は一意性の補題から従う.

Step 2 $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし, $\Omega^{(j)} := \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_{j+i}$ とおく. また, 各 $n \in \mathbb{N}$ について関数 $X_{n,j}: \Omega^{(j)} \rightarrow \prod_{i=1}^n \Omega_{j+i}$ を

$$X_{n,j}(\omega) = (\omega(1), \dots, \omega(n)) \quad (\omega \in \Omega^{(j)})$$

で定めて, $\mathcal{A}^{(j)} := \bigcup_{n=1}^{\infty} X_{n,j}^{-1}(\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_{j+i})$ とおく. $\mathcal{A}^{(j)}$ は明らかに $\Omega^{(j)}$ 上の加法族である.

Step 3 $m, n \in \mathbb{N}$ と $B_m \in \bigotimes_{i=1}^m \mathcal{F}_{j+i}$, $B_n \in \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_{j+i}$ が $m \leq n$ かつ $X_{m,j}^{-1}(B_m) = X_{n,j}^{-1}(B_n)$ を満たすとする. このとき $B_n = B_m \times \Omega_{j+m+1} \times \Omega_{j+m+2} \times \dots$ とならなければならないから, 系 6.3 より $(\prod_{i=1}^m P_{j+i})(B_i) = (\prod_{i=1}^n P_{j+i})(B_i)$ が成り立つ. このことに注意すると, 関数 $Q^{(j)}: \mathcal{A}^{(j)} \rightarrow [0, 1]$ を, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と $B \in \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_{j+i}$ に対して

$$Q^{(j)}(X_{n,j}^{-1}(B)) = (P_{j+1} \times \dots \times P_{j+n})(B)$$

を満たすように定義することができる.

Step 4 $\mathcal{A} := \mathcal{A}^{(0)}$, $Q := Q^{(0)}$ とおく. 明らかに $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$ であるから, Q が可算加法的であることを示せば, Carathéodory の拡張定理より, $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度 P で, 任意の $F \in \mathcal{A}$ について $P(F) = Q(F)$ を満たすようなものを構成できる. この P が存在を示すべき確率測度であることは容易に確認できるため証明は完成する.

Step 5 Q は明らかに加法的であり, かつ $Q(\Omega) = 1 < \infty$ を満たす. 従って, Q が可算加法的であることを示すには, 補題 6.4 より次の主張を示せばよい:

(*) $F_p \in \mathcal{A}$ ($p = 1, 2, \dots$) が $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ かつ $\varepsilon := \lim_{p \rightarrow \infty} Q(F_p) > 0$ を満たすならば, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_p \neq \emptyset$ である.

Step 6 一般に, $E \subset \Omega$, $j \in \mathbb{N}$ と $\omega_i \in \Omega_i$ ($i = 1, \dots, j$) に対して

$$E(\omega_1, \dots, \omega_j) := \{\omega^* \in \Omega^{(j)} : (\omega_1, \dots, \omega_j, \omega^*(1), \omega^*(2), \dots) \in E\}$$

とおく.

Step 7 (*) を示すために, まず各 $p \in \mathbb{N}$ について $G_p := \{\omega_1 \in \Omega_1 : Q^{(1)}(F_p(\omega_1)) \geq \varepsilon/2\}$ とおくと, $G_p \in \mathcal{F}_1$ かつ $P_1(G_p) \geq \varepsilon/2$ が成り立つことを示す. $F_p \in \mathcal{A}$ よりある $n > 1$ と $B \in \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ が存在して $F_p = X_{n,0}^{-1}(B)$ となるから, 任意の $\omega_1 \in \Omega_1$ に対して

$$F_p(\omega_1) = \{\omega^* \in \Omega^{(1)} : (\omega_1, \omega^*(1), \dots, \omega^*(n-1)) \in B\}$$

が成り立つ. 従って, $B' := \{\omega^* \in \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n : (\omega_1, \omega^*) \in B\}$ とおくと, $F_p(\omega_1) = X_{n-1,1}^{-1}(B')$ と書ける. ここで, $1_{B'} = \omega_1 1_B$ であることに注意すると, 補題 6.1 と 6.3(b) より $B' \in \bigotimes_{i=2}^n \mathcal{F}_i$ であることがわかる. 従って $F_p(\omega_1) \in \mathcal{A}^{(1)}$ であり,

$$Q^{(1)}(F_p(\omega_1)) = (P_2 \times \dots \times P_n)(B') = \int_{\Omega_2 \times \dots \times \Omega_n} 1_B(\omega_1, \omega^*) (P_2 \times \dots \times P_n)(d\omega^*)$$

が成り立つ. 故に, 補題 6.2 より $\Omega_1 \ni \omega_1 \mapsto Q^{(1)}(F_p(\omega_1)) \in [0, 1]$ は $\mathcal{F}_1$ -可測であり, 特に $G_p \in \mathcal{F}_1$ となる. さらに, Q の定義と Fubini の定理より,

$$\begin{aligned} Q(F_p) &= (P_1 \times \dots \times P_n)(B) = \int_{\Omega_1} Q^{(1)}(F_p(\omega_1)) P_1(d\omega_1) \\ &= \int_{G_p} Q^{(1)}(F_p(\omega_1)) P_1(d\omega_1) + \int_{G_p^c} Q^{(1)}(F_p(\omega_1)) P_1(d\omega_1) \\ &\leq P_1(G_p) + \varepsilon/2 \end{aligned}$$

を得る. ε の定義より $Q(F_p) \geq \varepsilon$ であったから, これは $P_1(G_p) \geq \varepsilon/2$ を意味する.

Step 8 Step 7 より $\inf_{p \in \mathbb{N}} P_1(G_p) \geq \varepsilon/2$ が成り立つが, ここで $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ より $G_1 \supset G_2 \supset \dots$ であるから, 命題 1.6 より $P_1(\bigcap_{p=1}^{\infty} G_p) \geq \varepsilon/2 > 0$ を得る. 特に $\bigcap_{p=1}^{\infty} G_p \neq \emptyset$ であるから, ある $\bar{\omega}_1 \in \Omega_1$ が存在して $\inf_{p \in \mathbb{N}} Q^{(1)}(F_p(\bar{\omega}_1)) \geq \varepsilon/2$ となる.

Step 9 $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ より $F_1(\bar{\omega}_1) \supset F_2(\bar{\omega}_1) \supset \dots$ が成り立つから, Step 7-8 の議論は $(F_p)_{p \in \mathbb{N}}$, Q, ε をそれぞれ $(F_p(\bar{\omega}_1))_{p \in \mathbb{N}}$, $Q^{(1)}, \varepsilon/2$ に置き換えても適用できる. よって, ある $\bar{\omega}_2 \in \Omega_2$ が存在して $\inf_{p \in \mathbb{N}} Q^{(2)}(F_p(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)) \geq \varepsilon/4$ となる. 同様の議論によって, ある $\bar{\omega}_i \in \Omega_i$ ($i = 1, \dots, j$) が存在して $\inf_{p \in \mathbb{N}} Q^{(j)}(F_p(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_j)) \geq \varepsilon/2^j$ を満たすならば, $\inf_{p \in \mathbb{N}} Q^{(j+1)}(F_p(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_{j+1})) \geq \varepsilon/2^{j+1}$ を満たすような $\bar{\omega}_{j+1} \in \Omega_{j+1}$ が存在することが示せる.

Step 10 Step 8–9 の結果と選択公理を組み合わせることで, Ω の元 $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_i)_{i=1}^\infty$ で

$$\inf_{p \in \mathbb{N}} Q^{(j)}(F_p(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_j)) \geq \varepsilon/2^j \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (6.6)$$

を満たすものを帰納的に定義することができる. 厳密には次のように行う. まず, 補題 6.5 より関数族 $(f_i)_{i=1}^\infty$ で各 f_i が Ω_i 上の選択関数となっているようなものがとれる ($P(\Omega_i) = 1$ より $\Omega_i \neq \emptyset$ に注意). 次に, $\inf_{p \in \mathbb{N}} Q^{(1)}(F_p(\bar{\omega}_1)) \geq \varepsilon/2$ なる $\bar{\omega}_1 \in \Omega_1$ を 1 つとる (これは Step 8 によって可能である). さらに, 各 $j = 1, 2, \dots$ と $\omega_i \in \Omega_i$ ($i = 1, \dots, j$) について, $\inf_{p \in \mathbb{N}} Q^{(j+1)}(F_p(\omega_1, \dots, \omega_j, \omega)) \geq \varepsilon/2^{j+1}$ を満たすような $\omega \in \Omega_{j+1}$ 全体の集合を $A_{j+1}[\omega_1, \dots, \omega_j]$ と書くことにする. このとき, 列 $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_i)_{i=1}^\infty$ を帰納的に $\bar{\omega}_{i+1} := f_{i+1}(A_{i+1}[\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_i])$ ($i = 1, 2, \dots$) で定めれば, Step 9 より (6.6) が成り立つことがわかる.

Step 11 $\bar{\omega} \in \cap_{p=1}^\infty F_p$ となる. 実際, 任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して, $F_p \in \mathcal{A}$ よりある $n \in \mathbb{N}$ と $B \in \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i$ が存在して $F_p = X_{n,0}^{-1}(B)$ となる. このとき,

$$F_p(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n) = \{\omega^* \in \Omega^{(j)} : (\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n) \in B\}$$

となるが, (6.6) より $F_p(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n) \neq \emptyset$ でなければならないから, 上の式より $(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n) \in B$ を得る. これは $X_{n,0}(\bar{\omega}) \in B$ を意味するから, $\bar{\omega} \in X_{n,0}^{-1}(B) = F_p$ である. 以上より $\cap_{p=1}^\infty F_p \neq \emptyset$ であることが示されたから, (*) は成り立つ. これで証明は完成した. $\square$

注意 6.10. $P_1 = P_2 = \dots =: P$ のとき, $\prod_{i=1}^\infty P_i$ のことを $P^\mathbb{N}$ や P^∞ とも書く.

定理 6.9 を用いると, 注意 4.5 で述べた問いに肯定的な解答を与えることができる:

定理 6.10. $(\nu_n)_{n=1}^\infty$ を $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度の列とする. このとき, ある確率空間 $(\Omega_*, \mathcal{F}_*, P_*)$ とその上で定義された d 次元確率変数列 $(X_n)_{n=1}^\infty$ で次の 2 条件を満たすものが存在する:

- (i) $(X_n)_{n=1}^\infty$ は P_* の下で独立である.
- (ii) $P_*^{X_n} = \nu_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

証明. $\Omega_* := (\mathbb{R}^d)^\mathbb{N}$, $\mathcal{F}_* := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)^\mathbb{N}$, $P_* := \prod_{n=1}^\infty \nu_n$ とおく. また, 各 $n \in \mathbb{N}$ について X_n を Ω_* 上の n -射影とする: $X_n((\omega_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \omega_n$ ($\omega_1, \omega_2, \dots \in \mathbb{R}^d$). このとき, $(\Omega_*, \mathcal{F}_*, P_*)$ と $(X_n)_{n=1}^\infty$ が上の条件 (i)–(ii) を満たす. 実際, (ii) を満たすことは P_* と $(X_n)_{n=1}^\infty$ の構成から明らかであり, (i) を満たすことは定理 6.7 から従う. $\square$

6.11 多次元 Lebesgue 測度の性質

この節では λ_n を $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上の Lebesgue 測度とする.

命題 6.3 (平行移動不変性). 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ と任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して, $A + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ であり,

$$\lambda_n(A + x) = \lambda_n(A). \quad (6.7)$$

証明. 関数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ を $f(y) = y - x$ ($y \in \mathbb{R}^d$) で定めると, $A + x = f^{-1}(A)$ であり, かつ f は連続であるから, 命題 2.2 より $A + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ である.

次に, x の第 j 成分を x_j と書くことにすると, 任意の $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned} \lambda_n^f(A_1 \times \dots \times A_n) &= \lambda_n((A_1 + x_1) \times \dots \times (A_n + x_n)) \\ &= \lambda_1(A_1 + x_1) \times \dots \times \lambda_1(A_n + x_n) \\ &= \lambda_1(A_1) \cdots \lambda_1(A_n) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、最後の等式は命題 1.9(c) から従う。故に、定理 6.6 の一意性の部分から $\lambda_n^f = \lambda_n$ を得る。これは (6.7) を意味する。 $\square$

系 6.4. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ を Borel 関数とすると、任意の $a \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+a)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

証明. 命題 6.3 より、任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} 1_A(x+a)dx = \lambda_n(A+(-a)) = \lambda_n(A) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A(x)dx$$

が成り立つ。この式と積分の線形性より f が単関数の場合には主張が成り立つことが従う。一般の場合は単関数近似定理と単調収束定理から従う。 $\square$

命題 6.3 の性質は本質的に Lebesgue 測度を特徴づけている。このことを示すために次の補題を用意する。

補題 6.6. $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ とし、 μ_1, μ_2 をそれぞれ $(S, \mathcal{B}(S))$ 上の測度とする。任意の $x, y \in \mathbb{R}^d, r > 0$ と $i = 1, 2$ に対して

$$0 < \mu_i(U(x; r) \cap S) = \mu_i(U(y; r) \cap S) < \infty \quad (6.8)$$

が成り立つならば、ある定数 $c \in (0, \infty)$ が存在して $\mu_1 = c\mu_2$ が成り立つ。

証明. $a \in S$ を 1 つ固定し、各 $i = 1, 2$ について関数 $g_i : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ を

$$g_i(r) = \mu_i(U(a; r) \cap S) \quad (r > 0)$$

で定める。いま、 U を S の開集合とすると、任意の $x \in U$ に対して $\mu_2(U \cap U(x; r))/g_2(r) \rightarrow 1$ ($r \downarrow 0$) が成り立つ。実際、 U は開集合だから、ある $\delta > 0$ が存在して $U(x; \delta) \cap S \subset U$ が成り立つ。このとき、任意の $r \in (0, \delta)$ に対して、 $\mu_2(U \cap U(x; r)) = \mu_2(U(x; r) \cap S) = g_2(r)$ となる。ただし、最後の等式は (6.8) より従う。よって、

$$\begin{aligned} \mu_1(U) &= \int_U 1d\mu_1 = \int_U \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mu_2(U \cap U(x; r))}{g_2(r)} \mu_1(dx) \\ &\leq \liminf_{r \downarrow 0} g_2(r)^{-1} \int_U \mu_2(U \cap U(x; r)) \mu_1(dx) \quad (\because \text{Fatou の補題}) \\ &= \liminf_{r \downarrow 0} g_2(r)^{-1} \int_U \left(\int_U 1_{U(x; r) \cap S}(y) \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) \\ &= \liminf_{r \downarrow 0} g_2(r)^{-1} \int_U \left(\int_U 1_{U(y; r) \cap S}(x) \mu_1(dx) \right) \mu_2(dy) \quad (\because \text{Fubini の定理}) \\ &= \liminf_{r \downarrow 0} g_2(r)^{-1} \int_U \mu_1(U(y; r) \cap S) \mu_2(dy) = \left(\liminf_{r \downarrow 0} \frac{g_1(r)}{g_2(r)} \right) \mu_2(U) \end{aligned}$$

を得る。ただし、最後の等式は (6.8) から従う。同様の議論によって、

$$\mu_2(U) \leq \left(\liminf_{r \downarrow 0} \frac{g_2(r)}{g_1(r)} \right) \mu_1(U)$$

が示される。特に $U = U(x; 1) \cap S$ の場合を考えると $\mu_1(U), \mu_2(U) > 0$ であることから、

$$\liminf_{r \downarrow 0} \frac{g_1(r)}{g_2(r)} > 0, \quad \liminf_{r \downarrow 0} \frac{g_2(r)}{g_1(r)} > 0$$

でなければならない. これらの式からさらに

$$0 < \limsup_{r \downarrow 0} \frac{g_1(r)}{g_2(r)} < \infty, \quad \liminf_{r \downarrow 0} \frac{g_2(r)}{g_1(r)} = \left(\limsup_{r \downarrow 0} \frac{g_1(r)}{g_2(r)} \right)^{-1}$$

が成り立つことが従う. 故に,

$$\left(\limsup_{r \downarrow 0} \frac{g_1(r)}{g_2(r)} \right) \leq \frac{\mu_1(U(x; 1) \cap S)}{\mu_2(U(x; 1) \cap S)} \leq \left(\liminf_{r \downarrow 0} \frac{g_1(r)}{g_2(r)} \right)$$

となるので, 補題 2.7 より極限

$$c := \lim_{r \downarrow 0} \frac{g_1(r)}{g_2(r)} \in (0, \infty)$$

が存在し, $\mu_1(U) = c\mu_2(U)$ が成り立つことがわかる. 特に任意の $U \in \mathcal{O}(S)$ と任意の $r > 0$ に対して $\mu_1(U \cap U(x; r)) = c\mu_2(U \cap U(x; r))$ が成り立ち, $\mu_1(U(x; r)) = c\mu_2(U(x; r)) < \infty$ であるから, 一意性の補題より任意の $E \in \mathcal{B}(S)$ に対して $\mu_1(E \cap U(x; r)) = c\mu_2(E \cap U(x; r))$ が成り立つ. $r \rightarrow \infty$ として $\mu_1(E) = c\mu_2(E)$ を得るから, $\mu_1 = c\mu_2$ である. $\square$

定理 6.11. μ を $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上の測度で $\mu([0, 1]^n) < \infty$ を満たすものとする. 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ と任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $\mu(A + x) = \mu(A)$ が成り立つならば, ある定数 $c \in [0, \infty)$ が存在して $\mu = c\lambda_n$ となる.

証明. まず任意の $x \in \mathbb{R}^d$ と $r > 0$ に対して $\mu(U(x; r)) < \infty$ が成り立つことを示す. 仮定より $x = 0$ の場合に示せば十分である. いま, 仮定より任意の整数 $k_1, \dots, k_n$ に対して $\mu([k_1, k_1 + 1] \times \dots \times [k_n, k_n + 1]) < \infty$ が成り立つから, 任意の正整数 $N \in \mathbb{N}$ に対して $\mu([-N, N]^n) \leq \sum_{k_1, \dots, k_n = -N}^{N-1} \mu([k_1, k_1 + 1] \times \dots \times [k_n, k_n + 1]) < \infty$ が成り立つ. N を r より大きい整数とすれば $U(0; r) \subset [-N, N]^n$ となるので, $\mu(U(0; r)) < \infty$ である.

次に, もしある $\varepsilon > 0$ に対して $\mu(U(0; \varepsilon)) = 0$ となるならば $\mu = 0$ となることを示す. 実際, この場合仮定より任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mu(U(x; \varepsilon)) = 0$ が成り立つから, $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i_1, \dots, i_n = -\infty}^{\infty} U((i_1\varepsilon/\sqrt{n}, \dots, i_n\varepsilon/\sqrt{n}); \varepsilon)$ と書けることに注意すれば, μ の可算劣加法性より $\mu(\mathbb{R}^n) = 0$ を得る. これは $\mu = 0$ を意味する. 従ってこの場合は $c = 0$ として定理の結論が成り立つ.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\mu(U(0; \varepsilon)) > 0$ となる場合を考える. この場合, 仮定より μ は条件 (6.8) を満たす. 一方で, 任意の $r > 0$ に対して $(-r/\sqrt{n}, r/\sqrt{n})^n \subset U(0; r) \subset (-r, r)^n$ が成り立つことから $0 < \lambda_n(U(0; r)) < \infty$ となることに注意すると, 命題 6.3 より λ_n も条件 (6.8) を満たす. 従って補題 6.6 より示すべき結論を得る. $\square$

演習問題 19. 定理 6.11 において仮定 $\mu([0, 1]^n) < \infty$ を外した場合に定理の結論が成立しないような μ の例を与えよ.

次に, 線形変換と Lebesgue 測度の関係を調べる. このために行列の特異値分解を考えるのが便利なので, そこから始める. 以下で用いる (あまり標準的でない) 線形代数関連の記号をまとめておく. 以下特に断らない限り, 行列は実行列の意味で用いる.

- $d \times n$ 行列全体の集合を $\mathbb{R}^{d \times n}$ で表す.
- d 次対称行列 A に対して, A の固有値を重複度を込めて降順に並べたものを $\lambda_1(A) \geq \dots \geq \lambda_d(A)$ で表す.
- $p, q \in \mathbb{N}$ に対して, $p \times q$ 零行列を $O_{p,q}$ で表す. $p = q$ の場合は $O_p = O_{p,p}$ と書く. また, 文脈から明らかな場合は添字は省略する.

- $A_j \in \mathbb{R}^{p_j \times q_j}$ ($j = 1, \dots, k$) に対して,

$$\text{diag}(A_1, \dots, A_k) := \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & A_k \end{pmatrix}$$

と定める. 特に, 実数 $a_1, \dots, a_k$ に対して $\text{diag}(a_1, \dots, a_k)$ は $a_1, \dots, a_k$ を対角成分に持つ k 次対角行列を表す.

補題 6.7. $A \in \mathbb{R}^{d \times n}$ とする. 各 $j = 1, \dots, d \wedge n$ に対して, $\lambda_j(A^\top A) = \lambda_j(AA^\top)$ が成り立つ.

証明. $A^\top A$ と $AA^\top$ はともに半正定値対称であるから, 両者の正の固有値が重複度も込めて一致することを示せばよい. $\lambda > 0$ を $A^\top A$ の重複度 m の固有値とする. 定義より, 1 次独立な $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d$ で $A^\top A x_j = \lambda x_j$ ($j = 1, \dots, m$) となるものを取りことができる. このとき, $A x_1, \dots, A x_m$ は 1 次独立となる. 実際, $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ が $\sum_{j=1}^m c_j A x_j = 0$ を満たすとする, 両辺に $A^\top$ を乗じて $\lambda \sum_{j=1}^m c_j x_j = 0$ を得るから, $\lambda \neq 0$ と $x_1, \dots, x_m$ の 1 次独立性より $c_1 = \dots = c_m = 0$ を得る. さらに, 各 $j = 1, \dots, m$ に対して $AA^\top(A x_j) = A(\lambda x_j) = \lambda(A x_j)$ が成り立つから, $A x_j (\neq 0)$ は λ に対する $AA^\top$ の固有ベクトルである. 従って λ は $AA^\top$ の固有値で, その重複度は m 以上である. 同様にして, $\lambda > 0$ が $AA^\top$ の重複度 m の固有値ならば, λ は $A^\top A$ の重複度 m 以上の固有値となることが示せる. 以上より $A^\top A$ と $AA^\top$ の正の固有値は重複度も込めて一致する. $\square$

定義 6.10 (特異値). $A \in \mathbb{R}^{d \times n}$ の特異値 $s_1(A), \dots, s_{d \wedge n}(A)$ を,

$$s_j(A) = \sqrt{\lambda_j(A^\top A)} = \sqrt{\lambda_j(AA^\top)} \quad (j = 1, \dots, d \wedge n)$$

で定義する.

定理 6.12 (特異値分解). $A \in \mathbb{R}^{d \times n}$ とし, $D_0 := \text{diag}(s_1(A), \dots, s_{d \wedge n}(A))$ とする. さらに, $d < n$ のときは $D := \begin{pmatrix} D_0 & O_{d, n-d} \end{pmatrix}$, $d = n$ のときは $D := D_0$, $d > n$ のときは $D := \begin{pmatrix} D_0 \\ O_{d-n, n} \end{pmatrix}$ として $D \in \mathbb{R}^{d \times n}$ を定める. このとき, ある直交行列 $U \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在して $A = UDV^\top$ と分解できる. この分解を A の特異値分解と呼ぶ.

証明. $AA^\top$ は直交行列によって対角化可能だから, ある d 次直交行列 U が存在して $U^\top(AA^\top)U = \text{diag}(D_0^2, O)$ と書ける. $A^\top U$ の列ベクトルを $b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}^n$ とすると, $U^\top(AA^\top)U = (A^\top U)^\top(A^\top U) = (b_i \cdot b_j)_{1 \leq i, j \leq d}$ と書き直せるので, $r := \text{rank } A$, $v_j := s_j(A)^{-1} b_j$ ($j = 1, \dots, r$) とおくと, $v_1, \dots, v_r$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交系をなし, かつ $b_j = 0$ ($j = r+1, \dots, d$) が成り立つ. $v_1, \dots, v_n$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となるように $v_{r+1}, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ をとり, $V := (v_1, \dots, v_n)$ と定める. 定義より V は n 次直交行列である. また,

$$U^\top A V = (b_i \cdot v_j)_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} \text{diag}(s_1(A), \dots, s_r(A)) & O_{r, n-r} \\ O_{d-r, r} & O_{d-r, n-r} \end{pmatrix} = D$$

となるから, $A = UDV^\top$ である. $\square$

定理 6.13. $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を全単射な線形写像, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ とすると, $T(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ であり,

$$\lambda_n(T(A)) = |\det T| \lambda_n(A). \quad (6.9)$$

証明. $\mathbb{R}^n$ の標準基底に関する T の表現行列を記号を流用して T で表す.

Step 1. まず, $T(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ を示す. T が全単射であることから T は逆写像 T^{-1} をもつので, $T(A) = (T^{-1})^{-1}(A)$ と書き直せる. T^{-1} は線形なので (Lipschitz) 連続, 従って命題 2.2 より $T(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ である.

Step 2. 次に, T が直交行列ならば (6.9) が成り立つことを示す. この場合, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対して $T(U(x; r)) = Tx + T(U(0; r)) = Tx + U(0; r)$ が成り立つから, 命題 6.3 より $\lambda_n(T(U(x; r))) = \lambda_n(U(0; r))$ が成り立つ. 従って補題 6.6 より $\lambda_n^{T^{-1}} = \lambda_n$ となる. $|\det T| = 1$ だからこれは (6.9) を意味する.

Step 3. 次に, T が対角行列ならば (6.9) が成り立つことを示す. T の対角成分を $t_1, \dots, t_n$ とすると, 任意の $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned}\lambda_n(T(A_1 \times \cdots \times A_n)) &= \lambda_n((t_1 A_1) \times \cdots \times (t_n A_n)) = \lambda_1(t_1 A_1) \cdots \lambda_n(t_n A_n) \\ &= |t_1| \cdots |t_n| \lambda_1(A_1) \cdots \lambda_n(A_n) = |\det T| \lambda_1(A_1) \cdots \lambda_n(A_n)\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, 3 番目の等式は命題 1.9(d) から従う. 故に, 定理 6.6 の一意性の部分から $|\det T|^{-1} \lambda_n^{T^{-1}} = \lambda_n$ を得る. これは (6.9) を意味する.

Step 4. 一般の場合に (6.9) が成り立つことを示す. $T = UDV^T$ を特異値分解とすると, Step 2-3 より $\lambda_n(T(A)) = |\det U| |\det D| |\det V^T| \lambda_n(A)$ が成り立つ. $\det T = \det U \det D \det V^T$ であることから結論が従う. $\square$

注意 6.11. 定理 6.13 において T の全単射性を外した場合, $T(A) \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ となる例が存在することが知られている. 実際, $n = 2, T(x, y) = (0, y)$ の場合にそのような例を構成できる. これは, 次の事実が成り立つことによる ([3, Proposition 13.2.5] もしくは [18, 定理 13.3] 参照): ある Borel 関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $f(\mathbb{R}) \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ となる. このとき, $A := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ とおくと, $g(x, y) = f(x) - y$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) で定まる Borel 関数 $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $A = g^{-1}(\{0\})$ と書けることから $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ であるが, $T(A) = \{0\} \times f(\mathbb{R}) \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ である. 実際, そうでなかったとすると, 補題 6.1 より $f(\mathbb{R}) = \{y : 1_{T(A)}(0, y) = 1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ となって矛盾するからである.

系 6.5 (線形変換に対する変数変換公式). $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ を Borel 関数とする. 定理 6.13 の仮定の下で

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} f(T(x)) dx.$$

証明. 定理 6.13 より, 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} 1_A(x) dx = \lambda_n(A) = |\det T| \lambda_n(T^{-1}(A)) = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} 1_{T^{-1}(A)}(x) dx = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} 1_A(T(x)) dx$$

が成り立つ. この式と積分の線形性より f が単関数の場合には主張が成り立つことが従う. 一般の場合は単関数近似定理と単調収束定理から従う. $\square$

注意 6.12. 系 6.5 はより一般的な変数変換の場合に拡張できる. [12, Theorem 7.26] 参照.

6.12 多次元正規分布

以下このノートでは, 特に断らない限り, $\mathbb{R}^d$ の元は列ベクトルとみなす.

定義 6.11 (多次元連続分布). $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度 ν が**連続分布** (continuous distribution) であるとは, ν が $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の Lebesgue 測度に関する密度 f を持つことをいう. このとき, 関数 f を ν の**確率密度関数** (probability density function, PDF) あるいは単に**密度** (density) と呼ぶ.

命題 6.4. 関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ が Borel 可測で $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = 1$ ならば, f を密度にもつような連続分布がただ一つ存在する.

証明. 一意性は明らか. また, 関数 $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, 1]$ を $\nu(A) = \int_A f(x)dx$ ($A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$) で定めることで存在も示せる. $\square$

補題 6.8. $\mu \in \mathbb{R}^d$ とし, Σ を d 次正定値対称行列とする. このとき,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^\top \Sigma^{-1}(x - \mu)\right) dx = (2\pi)^{d/2} \sqrt{|\det \Sigma|}.$$

証明. まず, 系 6.4 より,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^\top \Sigma^{-1}(x - \mu)\right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{2}x^\top \Sigma^{-1}x\right) dx.$$

次に, Σ は正定値対称だから, $\Sigma = A^2$ を満たす d 次正定値対称行列 A が存在する. このとき, $\Sigma^{-1} = A^{-2}$ となるから,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{2}x^\top \Sigma^{-1}x\right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{2}\|A^{-1}x\|^2\right) dx$$

と書ける. 従って, 系 6.5 を線形写像 $Tx = Ax$ に適用して,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{2}x^\top \Sigma^{-1}x\right) dx = \det A \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|^2\right) dx$$

を得る. ここで, $\det \Sigma = (\det A)^2$ より $\det A = \sqrt{\det \Sigma}$ である. また, Fubini の定理より

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|^2\right) dx = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx\right)^d = (2\pi)^{d/2}$$

が成り立つ. 以上で示すべき等式が得られた. $\square$

定義 6.12 (多次元正規分布). $\mu \in \mathbb{R}^d, \Sigma$ を d 次正定値対称行列とする. 関数 $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ を

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det \Sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)^\top \Sigma^{-1}(x - \mu)\right\} \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

で定めると, 命題 6.4 と補題 6.8 より, f を密度にもつ連続分布が存在するが, これを平均 μ , 共分散行列 Σ の **d 次元正規分布 (d -dimensional normal distribution)** または **d 変量正規分布 (d -variate normal distribution)** と呼び, 記号 $N(\mu, \Sigma)$ で表す. 特に, $N(0, I_d)$ を **d 次元標準正規分布 (d -dimensional standard normal distribution)** または **d 変量標準正規分布 (d -variate standard normal distribution)** と呼ぶ. ここに, I_d は d 次単位行列を表す.

多次元正規分布 $N(\mu, \Sigma)$ において μ, Σ をそれぞれ「平均」, 「共分散行列」と呼ぶのは, $N(\mu, \Sigma)$ に従う d 次元確率変数の平均と共分散行列がそれぞれ μ, Σ で与えられることに由来する.

定義 6.13 (多次元確率変数の期待値と共分散行列). X を d 次元確率変数とし, その第 j 成分を X_j と書くことにする.

(a) X が $X_j \in L^1(P)$ ($j = 1, \dots, d$) を満たすとき, X の (P に関する) **期待値**を

$$E[X] := (E[X_1], \dots, E[X_d])^\top \in \mathbb{R}^d$$

で定義する. $E[X]$ は X の (P に関する) **平均 (ベクトル)** とも呼ばれる.

(b) X が $X_j \in L^2(P)$ ($j = 1, \dots, d$) を満たすとき, X の (P に関する) **共分散行列 (covariance matrix)** を

$$\text{Cov}[X] := (\text{Cov}[X_i, X_j])_{1 \leq i, j \leq d}$$

で定義する.

命題 6.5. $\mu \in \mathbb{R}^d$, Σ を d 次正定値対称行列とする. X が $N(\mu, \Sigma)$ に従う d 次元確率変数ならば,

$$E[X] = \mu, \quad \text{Cov}[X] = \Sigma.$$

演習問題 20. 命題 6.5 を示せ.

7 特性関数とその応用

本節の目的は、特性関数を用いた (多次元版の) 中心極限定理の証明について、できる限り最小限の知識で理解できるよう説明することである。ただし、以下では複素数の基礎事項については既知であることを仮定する (複素変数の指数関数の定義と基本的性質に関する知識があれば十分である)。

以下で用いる複素数関連の記号をまとめておく。

- 複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す。
- 虚数単位を $\sqrt{-1}$ で表す。
- $z \in \mathbb{C}$ に対して、 z の実部と虚部をそれぞれ $\operatorname{Re} z$ と $\operatorname{Im} z$ で表す。また、 z の絶対値を $|z|$ で表す。
- 集合 S 上の複素関数 f が与えられたとき、関数 $S \ni x \mapsto \operatorname{Re} f(x) \in \mathbb{R}$ および $S \ni x \mapsto \operatorname{Im} f(x) \in \mathbb{R}$ をそれぞれ $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ で表す。

以下、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を設定して議論を進める。

7.1 複素関数の積分

複素関数の可測性や積分は実部と虚部に分けて定義する：

定義 7.1 (複素関数の可測性と積分). (S, Σ, μ) を測度空間、 $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ とする。

- (a) f が Σ -可測であるとは、 $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ がともに Σ -可測であることをいう。
- (b) f が μ -可積であるとは、 $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ がともに μ -可積であることをいう。このとき、 $E \in \Sigma$ に対して、 μ に関する f の E 上の Lebesgue 積分を

$$\int_E f d\mu := \int_E \operatorname{Re} f d\mu + \sqrt{-1} \int_E \operatorname{Im} f d\mu$$

で定義する。 $\int_E f d\mu$ のことを $\int_E f(x) d\mu(x)$ や $\int_E f(x) \mu(dx)$ などとも書く。

実関数の積分に対する結果のほとんどは自然に複素関数の場合にも拡張できるので、以下ではそれらの結果は複素関数の場合に改めて証明することなく用いることにする。詳細は [12] を参照するとよい。

複素数に値をとる確率変数についても同様の扱いである：

定義 7.2 (複素確率変数). Ω から $\mathbb{C}$ への $\mathcal{F}$ -可測関数のことを $((\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の) **複素確率変数 (complex random variable)** と呼ぶ。 X が複素確率変数で $\operatorname{Re} X, \operatorname{Im} X \in L^1(P)$ を満たすとき、 X の期待値を

$$\mathbb{E}[X] := \int_{\Omega} X dP = \mathbb{E}[\operatorname{Re} X] + \sqrt{-1} \mathbb{E}[\operatorname{Im} X]$$

で定義する。

7.2 特性関数の定義と初等的性質

$x = (x_1, \dots, x_d)^{\top} \in \mathbb{R}^d$ と $y = (y_1, \dots, y_d)^{\top} \in \mathbb{R}^d$ に対して、

$$x \cdot y := x^{\top} y = \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

と定める。 $x \cdot y$ は x と y の (標準) 内積 ((standard) inner product) と呼ばれる。

定義 7.3 (特性関数). ν を $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度とする.

$$\varphi_\nu(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\sqrt{-1}u \cdot x} \nu(dx) \quad (u \in \mathbb{R}^d)$$

で定義される関数 $\varphi_\nu : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ を, ν の**特性関数 (characteristic function)** と呼ぶ.

例 7.1 (二項分布). 試行回数 $n \in \mathbb{N}$, 成功確率 $p \in (0, 1)$ の二項分布 ν の特性関数は

$$\varphi_\nu(u) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{\sqrt{-1}uk} p^k (1-p)^{n-k} = \left(e^{\sqrt{-1}u} p + 1 - p \right)^n$$

で与えられる.

例 7.2 (一様分布). 一様分布 $U(a, b)$ の特性関数は

$$\varphi_{U(a,b)}(u) = \begin{cases} \frac{e^{\sqrt{-1}ub} - e^{\sqrt{-1}ua}}{(b-a)\sqrt{-1}u} & \text{if } u \neq 0, \\ 1 & \text{if } u = 0 \end{cases}$$

で与えられる. 実際, $u = 0$ のときは明らかであり, $u \neq 0$ の場合は

$$\varphi_{U(a,b)}(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{\sqrt{-1}ux} dx = \frac{e^{\sqrt{-1}ub} - e^{\sqrt{-1}ua}}{(b-a)\sqrt{-1}u}$$

となる.

定義 7.4 (確率変数の特性関数). d 次元確率変数 X の**特性関数** $\varphi_X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}[\exp(\sqrt{-1}u \cdot X)] \quad (u \in \mathbb{R}^d)$$

で定義する. 命題 4.4 より

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\sqrt{-1}u \cdot x} P^X(dx) = \varphi_{P^X}(u)$$

が成り立つから, φ_X は X の分布の特性関数に他ならない.

命題 7.1. X を d 次元確率変数, $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$ とする. 任意の $u \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\varphi_{AX+b}(u) = e^{\sqrt{-1}u \cdot b} \varphi_X(A^\top u)$$

が成り立つ.

演習問題 21. 命題 7.1 を示せ.

命題 7.2. d 次元確率変数 X が $\mathbb{E}[||X||] < \infty$ を満たすならば, φ_X は C^1 級であり, 任意の $j = 1, \dots, d$ と $u \in \mathbb{R}^d$ について $\partial_j \varphi_X(u) = \sqrt{-1} \mathbb{E}[X_j e^{\sqrt{-1}u \cdot X}]$ となる. ただし, X_j は X の第 j 成分を表す.

証明. 定理 3.8 を適用すればよい. □

7.3 正規分布の特性関数

命題 7.3 (標準正規分布のモーメント). Z を標準正規分布に従う確率変数とすると, 任意の整数 $r \geq 0$ に対して

$$\mathbb{E}[Z^{2r}] = \frac{(2r)!}{2^r r!}, \quad \mathbb{E}[Z^{2r+1}] = 0$$

が成り立つ.

証明. $E[Z^{2r+1}] = 0$ は関数 $z \mapsto z^{2r+1}e^{-z^2/2}$ が奇関数であることから従う. 次に,

$$\begin{aligned} E[Z^{2r}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^{2r} e^{-z^2/2} dz \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} z^{2r} e^{-z^2/2} dz (\because \text{偶関数の性質}) \\ &= \frac{2^r}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^{r-\frac{1}{2}} e^{-x} dx (\because x = z^2/2 \text{ と変数変換}) \\ &= \frac{2^r \Gamma(r + 1/2)}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

と書き直せる. ただし, Γ はガンマ関数を表す. ここで, 任意の $x > 0$ に対して成り立つ等式 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ と公式 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ を用いて*3

$$\Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right) = \left(r - \frac{1}{2}\right) \left(r - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2r)!}{2^{2r} r!} \sqrt{\pi}$$

を得る. この式を先ほどの等式に代入して示すべき等式を得る. □

定理 7.1 (正規分布の特性関数). 平均 $\mu \in \mathbb{R}$, 分散 $\sigma^2 > 0$ の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の特性関数は

$$\varphi_{N(\mu, \sigma^2)}(u) = \exp\left(\sqrt{-1}\mu u - \frac{\sigma^2}{2}u^2\right) \quad (u \in \mathbb{R})$$

で与えられる.

証明. $z = (x - \mu)/\sigma$ という変数変換によって,

$$\varphi_{N(\mu, \sigma^2)}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}ux} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{e^{\sqrt{-1}\mu u}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\sigma u z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{\sqrt{-1}\mu u} \varphi_{N(0,1)}(\sigma u)$$

と書き直せることに注意すると, $\mu = 0, \sigma = 1$ の場合に定理を示せば十分である.

Euler の公式より

$$\varphi_{N(0,1)}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}} \cos(uz) e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \sqrt{-1} \int_{\mathbb{R}} \sin(uz) e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)$$

と書き直せる. 関数 $z \mapsto \sin(uz)e^{-\frac{z^2}{2}}$ が奇関数であることから右辺第 2 項は 0 なので,

$$\varphi_{N(0,1)}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(uz) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = E[\cos(uZ)]$$

を得る. ただし, Z は $N(0, 1)$ に従う確率変数である. ここで, 命題 7.3 より

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{E[|uZ|^{2r}]}{(2r)!} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{u^{2r}}{2^r r!} = e^{u^2/2} < \infty$$

が成り立つので, 余弦関数の Taylor 展開と Lebesgue の収束定理, および命題 7.3 より,

$$E[\cos(uZ)] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r E[|uZ|^{2r}]}{(2r)!} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r u^{2r}}{2^r r!} = e^{-u^2/2}$$

となる. □

*3 例えば, 前者は [1] の (2.2) 式を, 後者は [1] の (2.14) 式をそれぞれ参照.

系 7.1 (多次元正規分布の特性関数). $\mu \in \mathbb{R}^d, \Sigma$ を d 次正定値対称行列とする. d 次元正規分布 $N(\mu, \Sigma)$ の特性関数は

$$\varphi_{N(\mu, \Sigma)}(u) = \exp \left(\sqrt{-1} \mu \cdot u - \frac{u^\top \Sigma u}{2} \right) \quad (u \in \mathbb{R}^d) \quad (7.1)$$

で与えられる.

証明. まず, 系 6.4 より,

$$\begin{aligned} \varphi_{N(\mu, \Sigma)}(u) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det \Sigma}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\sqrt{-1} u \cdot (x + \mu)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x^\top \Sigma^{-1} x \right\} dx \\ &= \frac{e^{\sqrt{-1} u \cdot \mu}}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det \Sigma}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\sqrt{-1} u \cdot x} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x^\top \Sigma^{-1} x \right\} dx \end{aligned}$$

と書き直せる. 次に, Σ は正定値対称なので, $\Sigma = A^2$ を満たす d 次正定値対称行列 A が存在する. 線形変換 $x \mapsto Ax$ に対して変数変換公式を適用して,

$$\begin{aligned} \varphi_{N(\mu, \Sigma)}(u) &= \frac{e^{\sqrt{-1} u \cdot \mu} \det A}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det \Sigma}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\sqrt{-1} u \cdot Ax} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|x\|^2 \right\} dx \\ &= \frac{e^{\sqrt{-1} u \cdot \mu}}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\sqrt{-1} Au \cdot x} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|x\|^2 \right\} dx \end{aligned}$$

を得る. ここで, $v = (v_1, \dots, v_d)^\top := Au$ と定めると, Fubini の定理と定理 7.1 より

$$\begin{aligned} \varphi_{N(\mu, \Sigma)}(u) &= \frac{e^{\sqrt{-1} u \cdot \mu}}{(2\pi)^{d/2}} \prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1} v_j x} e^{-x^2/2} dx = e^{\sqrt{-1} u \cdot \mu} \prod_{j=1}^d \varphi_{N(0,1)}(v_j) \\ &= e^{\sqrt{-1} u \cdot \mu} \prod_{j=1}^d e^{-v_j^2/2} = e^{\sqrt{-1} u \cdot \mu - \|v\|^2/2} \end{aligned}$$

を得る. $\|v\|^2 = v^\top v = u^\top \Sigma u$ より示すべき等式を得る. □

7.4 畳み込み

定義 7.5 (畳み込み). $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度 μ と ν の**畳み込み (convolution)** $\mu * \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, 1]$ を

$$\mu * \nu(B) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} 1_B(x + y) \mu(dx) \nu(dy) \quad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

で定義する. $\mu * \nu$ は $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度であることが容易に示せる (演習問題).

演習問題 22. $\mu * \nu$ が $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度であることを示せ.

命題 7.4. X, Y を 2 つの d 次元確率変数とする. X, Y が独立ならば, $X + Y$ の分布は $P^X * P^Y$ で与えられる.

証明. 任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して,

$$P(X + Y \in B) = E[1_B(X + Y)] = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} 1_B(x + y) P^{(X, Y)}(d(x, y))$$

と書き直せるから, 定理 6.7 より

$$P(X + Y \in B) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} 1_B(x + y) P^X(dx) P^Y(dy) = P^X * P^Y(B)$$

を得る. □

命題 7.5. μ, ν をそれぞれ $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度とすると, $\varphi_{\mu * \nu} = \varphi_\mu \cdot \varphi_\nu$ が成り立つ.

証明. 任意の $u \in \mathbb{R}^d$ に対して,

$$\varphi_{\mu * \nu}(u) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{\sqrt{-1}u \cdot (x+y)} \mu(dx) \nu(dy) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{\sqrt{-1}u \cdot x} e^{\sqrt{-1}u \cdot y} \mu(dx) \nu(dy) = \varphi_\mu(u) \varphi_\nu(u)$$

が成り立つことから従う. ただし, 最後の等式は Fubini の定理から従う. $\square$

系 7.2. X, Y を 2 つの d 次元確率変数とする. X, Y が独立ならば, 任意の $u \in \mathbb{R}^d$ に対して $\varphi_{X+Y}(u) = \varphi_X(u) \varphi_Y(u)$ が成り立つ.

証明. 命題 7.4 と 7.5 から従う. $\square$

命題 7.6. μ, ν を $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の 2 つの確率測度とし, μ は確率密度関数 f を持つとする. このとき, $\mu * \nu$ は

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \nu(dy) \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

で定義される関数 g を密度に持つ.

証明. 任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して, Fubini の定理より

$$\begin{aligned} \mu * \nu(B) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} 1_B(x+y) f(x) dx \nu(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(x+y) f(x) dx \right\} \nu(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(x) f(x-y) dx \right\} \nu(dy) = \int_B g(x) dx \end{aligned}$$

が成り立つことから従う. $\square$

7.5 特性関数の一意性

特性関数は分布を一意的に決定する.

定理 7.2. $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度 μ, ν が $\varphi_\mu = \varphi_\nu$ を満たすならば, $\mu = \nu$ である.

定理 7.2 の証明のために補題を 2 つ準備する.

補題 7.1. ν を $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度, $\sigma > 0$ として, $\nu_\sigma := \nu * N(0, \sigma^2 I_d)$ とおく. このとき,

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\nu(u) \exp(-\sqrt{-1}x \cdot u - \sigma^2 \|u\|^2/2) du \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

で定義される $\mathbb{R}^d$ 上の関数 f_σ は ν_σ の密度となる. さらに, $\nu_\sigma \Rightarrow \nu$ ($\sigma \downarrow 0$) が成り立つ.

証明. 命題 7.6 より, ν_σ は

$$g_\sigma(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|y-x\|^2/(2\sigma^2)} \nu(dy) \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

で与えられる関数 g_σ を密度に持つ. 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して, 系 7.1 より

$$e^{-\|y-x\|^2/2\sigma^2} = \varphi_{N(0, \sigma^{-1}I_d)}(y-x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^{-1})^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\sqrt{-1}(y-x) \cdot u - \sigma^2 \|u\|^2/2} du$$

が成り立つことに注意すると,

$$\begin{aligned} g_\sigma(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{\sqrt{-1}(y-x) \cdot u - \sigma^2 \|u\|^2/2} du \right) \nu(dy) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-\sqrt{-1}x \cdot u - \sigma^2 \|u\|^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\sqrt{-1}y \cdot u} \nu(dy) \right) du \quad (\because \text{Fubini の定理}) \\ &= f_\sigma(x) \end{aligned}$$

となって前半の主張を得る.

後半の主張を示すために, 任意に $h \in C_b(\mathbb{R}^d)$ をとる.

$$\int_{\mathbb{R}^d} h d\nu_\sigma = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h(x+y) e^{-\|y\|^2/(2\sigma^2)} dy \right) \nu(dx)$$

と書けるから, 線形変換 $y \mapsto \sigma y$ に対して変数変換公式を適用して,

$$\int_{\mathbb{R}^d} h d\nu_\sigma = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h(x+\sigma y) e^{-\|y\|^2/2} dy \right) \nu(dx)$$

を得る. 従って, 有界収束定理より,

$$\lim_{\sigma \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} h d\nu_\sigma = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h(x) e^{-\|y\|^2/2} dy \right) \nu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \nu(dx)$$

となるので, 後半の主張が示された. $\square$

補題 7.2. $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度 μ, ν が任意の $h \in C_b(\mathbb{R}^d)$ に対して $\int_{\mathbb{R}^d} h d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} h d\nu$ を満たすならば, $\mu = \nu$ である.

証明. $\mathbb{R}^d$ の閉集合の全体は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ を生成する π -系だから, 一意性の補題より, 任意の $\mathbb{R}^d$ の閉集合 F に対して $\mu(F) = \nu(F)$ となることを示せばよい. $F = \emptyset$ の場合は明らかに成り立つから, $F \neq \emptyset$ の場合を考える. まず, 関数 $g: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ を

$$g(x) = \text{dist}(x, F) \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

で定める. g は (Lipschitz) 連続であることが容易に示せる. 次に, 関数 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ を

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \leq 0, \\ 1-t & \text{if } 0 < t \leq 1, \\ 0 & \text{if } t > 1 \end{cases}$$

で定めて, 各 $\varepsilon > 0$ について関数 $h_\varepsilon: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ を $h_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon^{-1}g(x))$ ($x \in \mathbb{R}^d$) で定める. φ は明らかに (Lipschitz) 連続であるから, h_ε も連続である. 定義より h_ε は有界だから, 仮定より

$$\int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon d\nu$$

が成り立つ. ここで, 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $h_\varepsilon(x) \rightarrow 1_F(x)$ ($\varepsilon \downarrow 0$) が成り立つ. 実際, $x \in F$ ならば $h_\varepsilon(x) = \varphi(0) = 1 = 1_F(x)$ である. 一方で $x \in F^c$ ならば, 補題 1.15 より $g(x) > 0$ なので, $\varepsilon \downarrow 0$ のとき $\varepsilon^{-1}g(x) \rightarrow \infty$, 従って $h_\varepsilon(x) \rightarrow 0 = 1_F(x)$ となる. 以上より, 有界収束定理より, $\varepsilon \downarrow 0$ のとき,

$$\int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon d\mu \rightarrow \mu(F), \quad \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon d\nu \rightarrow \nu(F)$$

が成り立つ. 故に $\mu(F) = \nu(F)$ である. $\square$

定理 7.2 の証明. $\sigma > 0$ に対して $\mu_\sigma := \mu * N_d(0, \sigma^2 I_d)$, $\nu_\sigma := \nu * N_d(0, \sigma^2 I_d)$ とおく. 仮定 $\varphi_\mu = \varphi_\nu$ および補題 7.1 より $\mu_\sigma = \nu_\sigma$ が成り立つ. 補題 7.1 より $\mu_\sigma \Rightarrow \mu, \nu_\sigma \Rightarrow \nu$ ($\sigma \downarrow 0$) も成り立つから, 任意の $h \in C_b(\mathbb{R}^d)$ に対して $\int_{\mathbb{R}^d} h d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} h d\nu$ が成り立つ. 故に, 補題 7.2 より $\mu = \nu$ である. $\square$

7.6 共分散行列の退化を許す場合への多次元正規分布の一般化

定義 7.6 (多次元正規分布: 一般の場合). $\mu \in \mathbb{R}^d$, Σ を d 次半正定値対称行列とする. このとき, d 次正方行列 A で $\Sigma = AA^\top$ を満たすものが存在する. 関数 $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto Ax + \mu \in \mathbb{R}^d$ による $N(0, I_d)$ の像測度を ν と書くことにすると, 命題 7.1 より ν の特性関数は

$$\varphi_\nu(u) = \exp(\sqrt{-1}\mu \cdot u - u^\top \Sigma u/2) \quad (u \in \mathbb{R}^d)$$

で与えられることがわかる. 特に, Σ が正定値の場合, これは $N(\mu, \Sigma)$ の特性関数と一致するから, $\nu = N(\mu, \Sigma)$ となることがわかる. ν 自身は Σ が正定値でなくても定義できるから, Σ が正定値でない場合にも引き続き ν をもって $N(\mu, \Sigma)$ を自然に定義でき, この分布を引き続き平均 μ , 共分散行列 Σ の d 次元正規分布もしくは d 変量正規分布と呼ぶ (特性関数が分布を一意的に決定することから, ν は A の選び方によらないことに注意). 上の議論から, (7.1) 式は引き続き成立することがわかる.

以下, この節では, $\mu \in \mathbb{R}^d$, Σ を d 次半正定値対称行列とする.

命題 7.7. $X \sim N(\mu, \Sigma)$ ならば,

$$E[X] = \mu, \quad \text{Cov}[X] = \Sigma$$

が成り立つ.

演習問題 23. 命題 7.7 を示せ.

命題 7.8. $X \sim N(\mu, \Sigma)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $b \in \mathbb{R}^n$ ならば, $AX + b \sim N(A\mu + b, A\Sigma A^\top)$.

証明. 各 $u \in \mathbb{R}^n$ に対して, 命題 7.1 より,

$$\begin{aligned} \varphi_{AX+b}(u) &= e^{\sqrt{-1}u \cdot b} \exp(\sqrt{-1}\mu \cdot A^\top u - (A^\top u)^\top \Sigma (A^\top u)/2) \\ &= \exp(\sqrt{-1}(A\mu + b) \cdot u - u^\top (A\Sigma A^\top)u/2) \end{aligned}$$

となる. これは $N(A\mu + b, A\Sigma A^\top)$ の特性関数と一致するから, 定理 7.2 より結論が従う. $\square$

7.7 Glivenko の定理

次の結果は特性関数の極限定理における有用性を明らかにしている.

定理 7.3 (Glivenko の定理). $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度の列 $(\nu_n)_{n=1}^\infty$ が $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度 ν に収束するための必要十分条件は, 任意の $u \in \mathbb{R}^d$ に対して $\varphi_{\nu_n}(u) \rightarrow \varphi_\nu(u)$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つことである.

Glivenko の定理を証明するために, 補題 7.1 を次の一般的結果と組み合わせて用いる.

補題 7.3 (Scheffé の補題). (S, Σ, μ) を測度空間とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ について $f_n \in L^1(\mu)$ は $f_n \geq 0$ を満たすとする. また, $f \in L^1(\mu)$ も $f \geq 0$ を満たすとする. さらに, $(f_n)_{n=1}^\infty$ は f に概収束すると仮定する. このとき, 次の 2 条件は互いに同値である:

- (i) $\int_S |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).
- (ii) $\int_S f_n d\mu \rightarrow \int_S f d\mu$ ($n \rightarrow \infty$).

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii). 命題 3.7 から直ちに従う.

(ii) $\Rightarrow$ (i). まず, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $-(f_n - f) = f - f_n \leq f$ が成り立つから, $(f_n - f)^- \leq f$ であ

る. 従って, Lebesgue の収束定理より,

$$\int_S (f_n - f)^- d\mu \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. 次に, $f_n - f = (f_n - f)^+ - (f_n - f)^-$ に注意すると,

$$\int_S (f_n - f)^+ d\mu = \int_S f_n d\mu - \int_S f d\mu + \int_S (f_n - f)^- d\mu$$

が成り立つ. 従って, 上の結果と仮定 (ii) から,

$$\int_S (f_n - f)^+ d\mu \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を得る. 以上より,

$$\int_S |f_n - f| d\mu = \int_S (f_n - f)^+ d\mu + \int_S (f_n - f)^- d\mu \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる. □

定理 7.3 の証明. 必要性は任意の $u \in \mathbb{R}^d$ に対して関数 $x \mapsto e^{\sqrt{-1}u \cdot x}$ が (実部・虚部ともに) 有界かつ連続であることから従う.

十分性を示す. 補題 5.5 より, 任意の有界な 1-Lipschitz 連続関数 $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d} h d\nu_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} h d\nu \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つことを示せばよい. 各 $\sigma > 0$ に対して, $\nu_n^{(\sigma)} := \nu_n * N(0, \sigma^2 I_d)$ ($n = 1, 2, \dots$), $\nu^{(\sigma)} := \nu * N(0, \sigma^2 I_d)$ とおく. 命題 7.6 より $\nu_n^{(\sigma)}, \nu^{(\sigma)}$ はそれぞれ密度 $f_n^{(\sigma)}, f^{(\sigma)}$ をもつ. さらに, 補題 7.1 と仮定, および Lebesgue の収束定理より, 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $f_n^{(\sigma)}(x) \rightarrow f^{(\sigma)}(x)$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ. 従って, Scheffé の補題より

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_n^{(\sigma)}(x) - f^{(\sigma)}(x)| dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. 故に,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} h d\nu_n^{(\sigma)} - \int_{\mathbb{R}^d} h d\nu^{(\sigma)} \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \{f_n^{(\sigma)}(x) - f^{(\sigma)}(x)\} dx \right| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |h(x)| \int_{\mathbb{R}^d} |f_n^{(\sigma)}(x) - f^{(\sigma)}(x)| dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

を得る. 一方で, ϕ_d を $N(0, I_d)$ の密度とすると,

$$\int_{\mathbb{R}^d} h d\nu_n^{(\sigma)} = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} h(x + \sigma z) \phi_d(z) dz \nu_n(dx)$$

が成り立つから, $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_d(z) dz = \nu_n(\mathbb{R}^d) = 1$ と h の 1-Lipschitz 連続性に注意すると,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} h d\nu_n - \int_{\mathbb{R}^d} h d\nu_n^{(\sigma)} \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \{h(x) - h(x + \sigma z)\} \phi_d(z) dz \nu_n(dx) \right| \\ &\leq \sigma \int_{\mathbb{R}^d} |z| \phi_d(z) dz \nu_n(\mathbb{R}^d) = \sigma \int_{\mathbb{R}^d} |z| \phi_d(z) dz \leq \sigma \sqrt{d} \end{aligned}$$

を得る. ただし, 最後の不等式は Schwarz の不等式から従う. 同様の議論によって

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} h d\nu - \int_{\mathbb{R}^d} h d\nu^{(\sigma)} \right| \leq \sigma \sqrt{d}$$

も得られる. 以上より

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} h d\nu_n - \int_{\mathbb{R}^d} h d\nu \right| \leq 2\sigma\sqrt{d} + \left| \int_{\mathbb{R}^d} h d\nu_n^{(\sigma)} - \int_{\mathbb{R}^d} h d\nu^{(\sigma)} \right|$$

が成り立つから,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^d} h d\nu_n - \int_{\mathbb{R}^d} h d\nu \right| \leq 2\sigma\sqrt{d}$$

が成り立つ. $\sigma \downarrow 0$ として示すべき主張を得る. □

7.8 極限定理への応用

7.8.1 大数の弱法則

独立同分布確率変数列の標本平均に対しては, 母平均の存在を仮定しなくても, 次の形の大数の弱法則が成立する:

定理 7.4. $(X_n)_{n=1}^\infty$ を独立同分布な d 次元確率変数列とする. このとき, $\varphi := \varphi_{X_1}$ が点 0 で偏微分可能ならば, $\mu := -\sqrt{-1}\nabla\varphi(0) \in \mathbb{R}^d$ であり,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p} \mu \quad (n \rightarrow \infty). \quad (7.2)$$

注意 7.1. 定理 7.4 は逆も成り立つことが知られている. [11, Theorem 2.5.5] 参照. また, $E[\|X_1\|] = \infty$ であっても定理 7.4 の仮定を満たす例が存在する. [3] の 275 ページ参照.

命題 7.2 より定理 7.4 の仮定は $E[\|X_1\|] < \infty$ であれば成立し, このとき $\mu = E[X_1]$ となるから, 次の系を得る:

系 7.3. $(X_n)_{n=1}^\infty$ を独立同分布な d 次元確率変数列とする. $E[\|X_1\|] < \infty$ ならば, $\mu := E[X_1]$ として,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p} \mu \quad (n \rightarrow \infty). \quad (7.3)$$

注意 5.3 ですでに述べた通り, 実際には系 7.3 の仮定の下では概収束が成り立つ.

定理 7.4 の証明のために 2 つ補題を用意する.

補題 7.4. $(\xi_n)_{n=1}^\infty$ を d 次元確率変数列, $a \in \mathbb{R}^d$ とする. 次の 2 条件は互いに同値である.

- (i) $\xi_n \xrightarrow{p} a \ (n \rightarrow \infty)$.
- (ii) $\xi_n \xrightarrow{d} a \ (n \rightarrow \infty)$.

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii). 命題 5.2 から従う.

(ii) $\Rightarrow$ (i). 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. 補題 5.5 より

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n \in U(a; \varepsilon)) \geq P(a \in U(a; \varepsilon)) = 1$$

が成り立つ. 一方で定義から明らかに $\limsup_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n \in U(a; \varepsilon)) \leq 1$ であるから, これは

$$P(\xi_n \in U(a; \varepsilon)) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を意味する. $P(\|\xi_n - a\| \geq \varepsilon) = 1 - P(\xi_n \in U(a; \varepsilon))$ であるから, $P(\|\xi_n - a\| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ を得る. □

補題 7.5. 複素数列 $(a_n)_{n=1}^\infty$ が $na_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を満たすならば, 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$(1 + z/n + a_n)^n \rightarrow e^z \quad (n \rightarrow \infty).$$

証明. $(1 + z/n)^n \rightarrow e^z$ ($n \rightarrow \infty$) だから, $(1 + z/n + a_n)^n - (1 + z/n)^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を示せばよい.

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \frac{z}{n} + a_n\right)^n - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a_n^k \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n-k} \right| \leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} |a_n|^k \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^{n-k} \\ &\leq \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n \sum_{k=1}^n \frac{n^k}{2^{k-1}} |a_n|^k \leq \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n \frac{n|a_n|}{1 - n|a_n|/2} \end{aligned}$$

であり, $n \rightarrow \infty$ のとき $(1 + |z|/n)^n \rightarrow e^{|z|}$, $n|a_n|/(1 - n|a_n|/2) \rightarrow 0$ であるから, 示すべき主張を得る. $\square$

定理 7.4 の証明. 成分ごとに示せばよいので, $d = 1$ と仮定して一般性を失わない.

まず $\mu \in \mathbb{R}$ を示す. このためには $\operatorname{Re} \varphi'(0) = 0$ を示せばよいが, $\operatorname{Re} \varphi' = (\operatorname{Re} \varphi)'$ だから, $(\operatorname{Re} \varphi)'(0) = 0$ を示せばよい. これは, $\operatorname{Re} \varphi(u) = E[\cos(uX_1)]$ より $\operatorname{Re} \varphi$ が偶関数であることから従う.

次に (7.2) を示す. 補題 7.4 と Glivenko の定理より, 任意の $u \in \mathbb{R}$ に対して $\varphi_n(u) := \varphi_{n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i}(u) \rightarrow e^{\sqrt{-1}\mu u}$ ($n \rightarrow \infty$) となることを示せばよい. $u = 0$ の場合は明らかだから $u \neq 0$ とする. 系 7.2 より $\varphi_n(u) = \varphi(u/n)^n$ が成り立つ. $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$n\{\varphi(u/n) - (1 + \sqrt{-1}\mu u/n)\} = u\{(\varphi(u/n) - \varphi(0))/(u/n) - \varphi'(0)\} \rightarrow 0$$

であるから, 補題 7.5 より $\varphi(u/n)^n \rightarrow e^{\sqrt{-1}\mu u}$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ. $\square$

7.8.2 中心極限定理

定理 7.5 (中心極限定理). $(X_n)_{n=1}^\infty$ を独立同分布な d 次元確率変数数列で X_1 のすべての成分が $L^2(P)$ に属するようなものとする. このとき, $\mu := E[X_1]$, $\Sigma := \operatorname{Cov}[X_1]$ および $\bar{X}_n := n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ ($n = 1, 2, \dots$) とおくと,

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \rightarrow^d N(0, \Sigma) \quad (n \rightarrow \infty).$$

証明. Glivenko の定理より, 任意の $u \in \mathbb{R}^d$ に対して $\varphi_n(u) := \varphi_{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}(u) \rightarrow \exp(-u^\top \Sigma u/2)$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つことを示せばよい. $Y_i := X_i - \mu$ ($i = 1, 2, \dots$) とおくと, $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n Y_i$ と書き直せるので, 系 7.2 より $\varphi_n(u) = \varphi_{Y_1}(u/\sqrt{n})^n$ が成り立つ. ここで, 各 $t \in \mathbb{R}$ について,

$$\rho(t) := e^{\sqrt{-1}t} - \left(1 + \sqrt{-1}t - \frac{t^2}{2}\right) = \int_0^t \{\sqrt{-1}(e^{\sqrt{-1}s} - 1) + s\} ds = \int_0^t \left(\int_0^s (1 - e^{\sqrt{-1}r}) dr\right) ds \quad (7.4)$$

より

$$|\rho(t)| \leq \left| \int_0^t \left| \int_0^s |1 - e^{\sqrt{-1}r}| dr \right| ds \right| \leq 2 \left| \int_0^t |s| ds \right| = t^2 \quad (7.5)$$

が成り立つから, $E[|\rho(u \cdot Y_1)|] \leq E[(u \cdot Y_1)^2] < \infty$ である. 従って,

$$\varphi_{Y_1}(u/\sqrt{n}) = E \left[1 + \sqrt{-1} \frac{u \cdot Y_1}{\sqrt{n}} - \frac{(u \cdot Y_1)^2}{2n} \right] + E[\rho(u \cdot Y_1)] = 1 - \frac{u^\top \Sigma u}{2n} + E[\rho(u \cdot Y_1/\sqrt{n})]$$

と書き直せる. ここで, 任意の $r \in \mathbb{R}$ に対して $|1 - e^{\sqrt{-1}r}| = \left| \int_0^r e^{\sqrt{-1}q} dq \right| \leq |r|$ となることに注意すると, (7.4) より任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $|\rho(t)| \leq |t|^3/6$ が成り立つ. 従って $n|\rho(u \cdot Y_1/\sqrt{n})| \leq |u \cdot Y_1|^3/(6\sqrt{n}) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) である. 一方で (7.5) より $n|\rho(u \cdot Y_1/\sqrt{n})| \leq |u \cdot Y_1|^2$ も成り立つ. よって, $E[|u \cdot Y_1|^2] < \infty$ に注意すると, Lebesgue の収束定理より $nE[\rho(u \cdot Y_1/\sqrt{n})] \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つ. 従って補題 7.5 より $\varphi_{Y_1}(u/\sqrt{n})^n \rightarrow \exp(-u^\top \Sigma u/2)$ ($n \rightarrow \infty$) となって示すべき主張を得る. $\square$

参考文献

- [1] E. アルティン 2002.『ガンマ関数入門』, 日本評論社, 上野 健爾 訳.
- [2] Chen, L. H., Goldstein, L., Shao, Q.-M. 2011. Normal Approximation by Stein's Method. Springer.
- [3] Dudley, R. M. 2002. Real Analysis and Probability. Cambridge University Press.
- [4] Erdős, P., Stone, A. H. 1970. On the sum of two Borel sets. Proc. Amer. Math. Soc. 25 (2), 304–306.
- [5] Evans, L. C., Gariepy, R. F. 2015. Measure Theory and Fine Properties of Functions, Revised Edition. CRC Press.
- [6] Friedman, H. 1980. A consistent Fubini-Tonelli theorem for nonmeasurable functions. Illinois J. Math. 24 (3), 390–395.
- [7] 小谷眞一 2005.『測度と確率』, 岩波書店.
- [8] 熊谷隆 2003.『確率論』, 共立出版.
- [9] Mattila, P. 1995. Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Cambridge University Press.
- [10] Nourdin, I., Peccati, G. 2012. Normal Approximations with Malliavin Calculus: From Stein's Method to Universality. Cambridge University Press.
- [11] Révész, P. 1968. The Laws of Large Numbers. Academic Press.
- [12] Rudin, W. 1987. Real and complex analysis. McGraw-Hill, 3rd edition.
- [13] M. スピヴァック 2007.『スピヴァック 多変数の解析学』, 東京図書, 齋藤 正彦 訳.
- [14] 吹田信之・新保経彦 1987.『理工系の微分積分学』, 学術図書出版社.
- [15] 内田伏一 1986.『集合と位相』, 裳華房.
- [16] van der Vaart, A. W. 1998. Asymptotic statistics. Cambridge University Press.
- [17] Williams, D. 1991. Probability with martingales. Cambridge University Press.
- [18] 山崎泰郎 1978.『無限次元空間の測度 (上)』, 紀伊國屋書店.
- [19] 吉田朋広 2006.『数理統計学』, 朝倉書店.