

微分同相群と族のゲージ理論

今野 北斗 (東京大学)*

1 背景

まずは、特段の予備知識を仮定せず、我々がやりたいことの位置づけを述べる。

1.1 4次元トポロジーとゲージ理論

多様体の分類理論において、4次元は特別な次元である— 今ではよく知られたこの認識の確立は、前世紀のトポロジーの研究における重要な達成の一つに数えられるであろう。

例えば、コンパクトな4次元位相多様体であって、無限個の異なる可微分構造を持つものが数多く知られている。ここに二つの比較の観点がある：

- (1) 一つは4次元と他の次元との比較である。4次元以外では、コンパクト位相多様体上の可微分構造は高々有限個しかないと知られている。
- (2) もう一つは、位相的カテゴリーと可微分カテゴリーとの比較である。上の事実は、4次元においては、両カテゴリーに著しい差異があることを示している。

これら二つの比較が4次元トポロジーで基本的である。比較するためには、4次元多様体の可微分構造を精密に捉える道具が必要となる。

1980年代のDonaldsonの仕事以降、ゲージ理論がそのような道具を提供することはよく知られている。その典型的な議論のひとつは次のようなもので、非線形解析を本質的に使うところに特徴がある。まず、(物理学におけるゲージ理論由来の)ある非線形偏微分方程式を滑らかな4次元多様体上で考える。その解空間(のゲージ対称性による商であるモジュライ空間)を適当な意味で「数える」ことで、4次元多様体の数値的な不変量を得る。それを使って、互いに同相だが微分同相ではない4次元多様体を見分ける。

1.2 高次元多様体の微分同相群—高次元トポロジーの再来

ゲージ理論の登場以前に遡ると、高次元(5次元以上)の多様体の分類理論は、Kirby-Siebenmannの仕事により、1960年代終盤に一つの区切りを迎えた。例えば、上で挙げた4次元以外での可微分構造の有限性は(高次元においては)その帰結である。

他方、多様体のトポロジーにおいて、その自己同型群である微分同相群は基本的な興味の対象であり続けてきた。例えば2次元多様体に対しては、写像類群の研究として、低次元トポロジーの大きな割合を長年占めている。一方今世紀に入ってから、Galatius, Randal-Williamsらのスクールにより、高次元多様体の微分同相群の研究が驚くべき進歩を遂げた。その結果の一部には後に触れることになる。その手法は代数トポロジーと

*〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: konno@ms.u-tokyo.ac.jp

微分トポロジーの高度な組み合わせで、1960 年代のトポロジーの黄金時代の再来を思わせるものがある。

1.3 我々の興味の対象—4 次元多様体の微分同相群

再び話を 4 次元に戻そう。華々しく発展する他次元に比べ、4 次元多様体の微分同相群に対する知見は、最近までは極めて限られていた。これは、4 次元多様体の分類理論が困難である理由と同様に、一種の手術の技法 (Whitney trick) の欠如に由来する。

しかし、4 次元多様体の分類理論では、単に分類が困難であるということを超えて、他次元と真に異なる現象が存在していたのであった。ここから次の問いに導かれる：

問 1：4 次元多様体の微分同相群が他の次元とは異なる興味深い性質を持つことを示せ。

4 次元トポロジーにおけるもう一つの基本的な観点であった位相カテゴリーと可微分カテゴリーの比較を、自己同型群に対して行うのも妥当であろう：

問 2：4 次元多様体の同相群と微分同相群の差を調べよ。

1.4 我々の手法—族のゲージ理論

このような問題に取り組むには、4 次元多様体の連続族に対してゲージ理論を展開する「族のゲージ理論」が有効である。その典型的な議論は次のようなものである。4 次元多様体の連続族、すなわち 4 次元多様体をファイバーとする滑らかなファイバー束が与えられたとする。各ファイバーにはゲージ理論的偏微分方程式が乗っている。その解空間（の商であるモジュライ空間）を底空間上で束ねたものを考える。この束ねた空間を「数える」ことで、4 次元多様体の族の不変量を得る。これを用いて、（典型的には位相的には同型な）ファイバー束を可微分の範疇で見分けると、ファイバー束を統制している群（構造群）であるファイバーの微分同相群の複雑さを下から評価できる。

このようなアイデアを 4 次元多様体の微分同相群に初めて応用したのは Ruberman [44] である。彼は 1998 年の先駆的な仕事で、族の底空間が 1 次元の場合にこのアイデアを実行し、問 2 への答えをひとつ与えている（4 節参照）。その後 10 年ほどの間に Ruberman 自身の続編 [45, 46] と中村信裕の関連する仕事 [41, 42] があったが、族のゲージ理論の微分同相群への応用は散発的な状況だった。

講演者は修士課程以来、族のゲージ理論の組織的な研究を試みてきた。最近この分野には様々な研究者が参入し、多くの成果が生まれ、講演者の研究開始時とは状況が一変した。その結果として、上で述べた問いへの答えが、新しい視点から徐々に得られつつある。本稿ではその一部をご紹介します。以下論文には主に出版年を併記するが、最近の文献については時系列をはっきりさせるため arXiv に現れた年を記す。

2 ホモロジー的非安定性

滑らかな多様体 X に対し, $\text{Diff}(X)$ を X の微分同相群とする. $\text{Diff}(X)$ には自然な位相 (C^∞ -位相) が入り, 位相群となる. その分類空間 $B\text{Diff}(X)$ は, 直感的には X と微分同相な多様体全てをパラメトライズしている空間であり, (X と微分同相な) 多様体のモジュライ空間と呼ばれる. フォーマルには, $B\text{Diff}(X)$ は, X をファイバーとする滑らかなファイバー束を分類しているのであった: 任意の (良い) 位相空間 B に対し,

$$[B, B\text{Diff}(X)] \xrightarrow{1:1} \{B \text{ 上の } X \text{ がファイバーのファイバー束}\} / \cong.$$

X が境界付きの場合は, X の境界の近くで恒等写像であるような微分同相全体のなす群 $\text{Diff}_\partial(X)$ とその分類空間を考える.

多様体のモジュライ空間 $B\text{Diff}(X)$ のトポロジーは基本的研究対象である. その中でも, モジュライ空間のコホモロジーは X をファイバーとするファイバー束の特性類と対応しており, 中心的な興味の対象の一つである:

$$H^*(B\text{Diff}(X)) \xrightarrow{1:1} \{X\text{-バンドルの特性類}\}.$$

2.1 背景: 4 次元以外でのホモロジー的安定性

コホモロジー $H^*(B\text{Diff}(X))$, あるいは双対的にホモロジー $H_*(B\text{Diff}(X))$ を計算することは基本的な問題であるが, 一般には極めて難しい. しかし, 多様体を適当に「安定化」すると, 驚くべきことに $H_*(B\text{Diff}(X))$ が計算ができる場合がある. その鍵が下で説明するホモロジー的安定性である.

以下, W を偶数 $2n$ 次元の境界付きでコンパクトな可微分多様体とする. このとき, W の境界 ∂W に $S^n \times S^n \# \partial W \times [0, 1]$ (ここで $\#$ は内部連結和) を $\partial W \times \{0\}$ に沿って貼り付けたものを連結和 $W \# S^n \times S^n$ のモデルとして採用する. すると, 恒等写像で拡張することで, 埋め込み写像

$$s : \text{Diff}_\partial(W) \hookrightarrow \text{Diff}_\partial(W \# S^n \times S^n)$$

が得られる. s およびそれが誘導する写像は安定化写像と呼ばれる. 以下が多様体のモジュライ空間のホモロジー的安定性と呼ばれる結果で, 2 次元の場合は Harer [15], 6 次元以上は Galatius–Randal-Williams [14] による:

定理 2.1 (Harer (1985) [15], Galatius–Randal-Williams (2018) [14]). W をコンパクトで滑らかな単連結多様体とし, 次元は 4 ではない偶数次元 ($=: 2n$) とする. $k \geq 0$ を固定したとき, 任意の $N \gg k$ に対し, s が誘導する写像

$$s_* : H_k(B\text{Diff}_\partial(W \#_N S^n \times S^n); \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(B\text{Diff}_\partial(W \#_{N+1} S^n \times S^n); \mathbb{Z})$$

は同型になる.

この定理により, 十分大きな N に対し, $H_k(B\text{Diff}_\partial(W \#_N S^n \times S^n))$ は帰納極限

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} H_k(B\text{Diff}_\partial(W \#_N S^n \times S^n))$$

と同一視できる. この極限は安定ホモロジーと呼ばれ, ホモトピー論で計算ができる対象となる. $\mathbb{Q}$ 上では明示的に計算され, Mumford–森田–Miller 類で生成される. Madsen–Weiss [39] による Mumford 予想の解決はこれを 2 次元で示すもので, その後 Galatius–Randal-Williams [14] はこれを高次元に拡張した.

2.2 4 次元でのホモロジー的非安定性

このように, 4 以外の偶数次元では, 多様体の安定化を十分行くと $H_k(B\text{Diff}_\partial(W))$ が計算できる. 以下の定理は, 4 次元においては, キーステップであったホモロジー的安定性が成立しないことを主張する. ここでは境界付き多様体として閉多様体を puncture したものに対象を限る. すなわち, 閉 4 次元多様体 X に対し, $\mathring{X} = X \setminus \text{Int}(D^4)$ を考える.

定理 2.2 (K.–Lin (2022) [27]). X を単連結で滑らかな閉 4 次元多様体とする. $k > 0$ を固定したとき, 数列 $0 < N_1 < N_2 < \cdots \rightarrow +\infty$ が存在し, 各 N_i に対して

$$s_* : H_k(B\text{Diff}_\partial(\mathring{X} \#_{N_i} S^2 \times S^2); \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(B\text{Diff}_\partial(\mathring{X} \#_{N_i+1} S^2 \times S^2); \mathbb{Z})$$

は同型にならない.

すなわち, 4 次元以外とは異なり, $S^2 \times S^2$ をいくら連結和していっても, モジュライ空間のホモロジーは安定することがないのである.

2.1 節で述べた他次元での状況と比べると, 4 次元ではモジュライ空間のホモロジーの計算をホモトピー論に帰着することは困難なことを定理 2.2 は示唆していると言えるだろう. 多様体の分類理論と似た現象がここでも起きているわけである.

2.3 ホモロジー的非安定性の証明: ゲージ理論的特性類

ホモロジー的非安定性 (定理 2.2) は, 族のゲージ理論を用いて特性類を構成し, 計算することで証明される. X を向き付けられた可微分閉 4 次元多様体とし, $k \geq 0$ とする. $\text{Diff}^+(X)$ を向きを保つ微分同相のなす群とする. このとき $\mathbb{Z}/2$ 係数の特性類

$$\text{SW}^k(X) \in H^k(B\text{Diff}^+(X); \mathbb{Z}/2) \quad (1)$$

を定義することができる (正確には $b^+(X) \geq k+2$ という位相的仮定を課す必要がある). これは, 筆者が定義したゲージ理論的特性類 ([24], 2018 年) に Ruberman [46] の微分同相に対するある数値的不変量のアイデアを合わせて構成されるものである^{*1}. ごく大雑

^{*1} [24] では, spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ を保つ微分同相群 $\text{Diff}(X, \mathfrak{s})$ を考え, $H^*(B\text{Diff}(X, \mathfrak{s}))$ の元 $\text{SW}^*(X, \mathfrak{s})$ を Seiberg–Witten 方程式の族を用いて定義した. $\text{Diff}(X, \mathfrak{s})$ ではなく $\text{Diff}^+(X)$ 全体を扱うために [46] のアイデアを使う. [46] では, $\mathfrak{s}$ を保つとは限らない微分同相 $f \in \text{Diff}^+(X)$ に対し, 数値的不変量 $\text{SW}(X, f) \in \mathbb{Z}/2$ (f によっては $\text{SW}(X, f) \in \mathbb{Z}$) が定義されている.

把に言えば、ゲージ理論的偏微分方程式である Seiberg–Witten 方程式

$$\begin{cases} F_A^+ = \sigma(\Phi, \Phi), \\ \not{D}_A \Phi = 0 \end{cases}$$

の族の解を $B\text{Diff}^+(X)$ の各 k -cell の上で数えて定義される。

この特性類は非安定性特性類である．すなわち安定化写像 s^* （正確にはその有限回の合成）で送ると消滅する．これは，Seiberg–Witten 不変量が適当な連結和 ($\# S^2 \times S^2$ を含む) に対して消滅することの族版である．

この特性類 $\text{SW}^k(X)$ が非自明になるファイバー束を見付ける必要があるが，そのような族は T^k 上の具体的な族として与えることができる．非自明性の証明の核では Baraglia と筆者 [7] による，族の Seiberg–Witten 不変量を通常の Seiberg–Witten 不変量に帰着させる計算公式が使われる．これは Taubes 式の貼り合わせ (gluing) 公式の一種である．

3 微分同相群の無限性

微分同相群 $\text{Diff}(X)$ およびその分類空間のホモロジー・ホモトピー群は，ほとんどの場合無限群になる．無限群が与えられたとき，その構造に関して最初に問うべきことの一つは，その群が有限生成か，という弱い意味での有限性であろう．4 次元以外においては，基本群に関する仮定の下，強力な有限性定理が知られている．例えば，以下の予想には未だ反例がなく，また偶数次元の場合には実際に証明されている (Kupers [35], Bustamante–Krannich–Kupers [12])：

予想 3.1. X を可微分閉多様体とする． $\pi_1(X)$ が有限群かつ $\dim X \neq 4$ であれば， $\pi_k(\text{Diff}(X))$, $H_k(B\text{Diff}(X); \mathbb{Z})$ は全ての $k \geq 0$ に対して有限生成であろう．

この予想の 4 次元類似の反例が見付けられるかは自然な問いであろう．既に述べたように，コンパクト 4 次元多様体は他次元と異なり無限個のエキゾチック構造を持ち得るのだった．予想 3.1 の 4 次元類似の反例を探すことは，この事実—4 次元での一種の無限性—の自己同型群版のアナロジーがあるかを問うていると言えるだろう． $\text{Diff}(X)$ のホモトピー群に対しては，以下の結果がこの方向の初めてのものである：

定理 3.2 (Baraglia (2021) [4]). $\pi_1(\text{Diff}(K3))$ は有限生成ではない．

この結果は族の Seiberg–Witten 不変量を用いて示される．その後 Lin [36] は，全ての楕円曲面や完全交叉を含む，広範なクラスの 4 次元多様体に上の結果を一般化・精密化した．

一方 Auckly–Ruberman は，Baraglia, Lin とは大きく異なる例に基づき，Ruberman の 1-パラメータ族に関する一連の仕事 [44, 45, 46] を高次ホモトピー群に拡張する結果を得ている．特に：

定理 3.3 (Auckly–Ruberman (2025) [1]). 各 $k \geq 1$ に対し， $\pi_k(\text{Diff}(X))$ が有限生成で

ないような単連結閉可微分 4 次元多様体 X が存在する.

以上は微分同相群の高次ホモトピー群に関する結果だが, 次に X の写像類群と $B\text{Diff}(X)$ のホモロジーの無限性について論じよう. これがゲージ理論的特性類の別の応用となる. まず背景として, 4 次元以外での写像類群の有限性については, 次の結果が古典的である:

定理 3.4 (Sullivan (1977) [48]). X を単連結閉可微分多様体とする. $\dim X \geq 5$ ならば, $\pi_0(\text{Diff}(X))$ は有限生成である.

実際には Sullivan はより強い有限性を示しており, 例えば同じ仮定の下 $\pi_0(\text{Diff}(X))$ は有限表示群である. もちろん 3 次元以下では同様の主張は正しいので, 4 次元以外では単連結多様体の写像類群は有限生成ということになる. この事実の 4 次元類似の非成立が次の結果である:

定理 3.5 (K. (2023) [26], Baraglia (2023) [5]). 写像類群 $\pi_0(\text{Diff}(X))$ が有限生成でないような単連結閉可微分 4 次元多様体 X が存在する.

具体的には, $X = E(n) \# S^2 \times S^2$ (ここで $E(n)$ はあるクラスの楕円曲面で, $n \geq 2$) に対し, $\pi_0(\text{Diff}(X))$ は無限生成であると分かる.

ここで位相的カテゴリーとの比較を述べよう. まず, 単連結閉 4 次元多様体 X に対しては, $\pi_0(\text{Homeo}(X))$ が有限生成であることは Freedman [13], Quinn [43] の結果から従う. したがって単連結多様体の写像類群の無限生成性 (定理 3.5) は, 4 次元可微分カテゴリー特有の現象ということになる. なお, 単連結でない場合は, 高次元でも 4 次元でも写像類群が無限生成になり得ることはこの結果以前に知られていた (Hatcher [16], Budney–Gabai [11], 渡邊 [50]).

上の写像類群の無限性は, 以下のより一般の結果の帰結である:

定理 3.6 (K. (2023) [26]). 各 $k \geq 1$ に対し, $H_k(B\text{Diff}(X); \mathbb{Z})$ が有限生成でないような単連結閉可微分 4 次元多様体 X が存在する.

具体的には, $X = E(n) \#_k S^2 \times S^2$ ($n \geq 2$) に対し, $H_k(B\text{Diff}(X); \mathbb{Z})$ は $(\mathbb{Z}/2)^{\oplus \mathbb{N}}$ を直和因子に含むと分かる. 定理 3.6 で $k = 1$ とすると定理 3.5 はただちに従う.

$H_k(B\text{Diff}(X))$ の無限生成性 (定理 3.6) の証明もゲージ理論的特性類を用いる. 具体的には, ホモロジー的非安定性 (定理 2.2) の証明で用いた特性類を精密化して無限個の特性類を定義し, それらの $\mathbb{Z}/2$ 上での一次独立性を示すことによりなされる. 我々の証明における $H_k(B\text{Diff}(X))$ の無限性は, 楕円曲面 $E(n)$ が無限個のエキゾチック構造を持つこと (の Seiberg–Witten 理論による証明) に由来する. この無限性を使って族を無限個構成する. それらをゲージ理論的特性類たちで evaluate することで一次独立性を示す, というのが証明の流れである.

4 エキゾチックな微分同相写像

滑らかな多様体 X とその自己微分同相写像 $f: X \rightarrow X$ が与えられたとする．もし f が位相的には恒等写像にアイソトピックだが滑らかにはそうでないとき，すなわち f は $\text{Homeo}(X)$ の単位元成分には属するが $\text{Diff}(X)$ の単位元成分には属さないとき， f はエキゾチックな微分同相写像であるという．このようなものは，同相群と微分同相群のトポロジーの差の最も基本的なものと言えるだろう．なお，3次元以下では自然な写像 $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ は弱ホモトピー同値なので，4次元がこのような現象が現れる最小の次元である．

4.1 エキゾチックな Dehn ツイスト

4次元多様体上のエキゾチック微分同相の初めての例は Ruberman [44] により 1998 年に構成された．これは族に対するゲージ理論の初めてのトポロジカルな応用でもあり，本稿で述べた多くの結果の証明の雛形となる重要なものである．一方この数年は，それとは趣を異にする Dehn ツイストの 4次元類似が盛んに研究されている．その一部を紹介する．

Y を多様体とし，恒等写像を基点とするループ $\phi: S^1 \rightarrow \text{Diff}(Y)$ が与えられたとする．このとき， $Y \times [0, 1]$ の境界を各点ごとに固定する微分同相写像が

$$Y \times [0, 1] \rightarrow Y \times [0, 1] \quad ; \quad (y, t) \mapsto (\phi(t) \cdot y, t) \quad (2)$$

で定義される． $Y = S^1$ として， ϕ を S^1 の自身への自然な作用から得られるループとすれば，これは 2次元トポロジーで基本的な $S^1 \times [0, 1]$ 上の Dehn ツイストに他ならない．

この微分同相を Y が 3次元多様体の場合に考えよう． Y が 4次元多様体 X に埋め込まれているとき， Y の管状近傍に上の微分同相 (2) を移植すれば， X 上の微分同相が得られる．これを X 上の Y に沿った **Dehn ツイスト** と呼ぼう．特に X が Y を境界に持つとき， Y を X の内部に少し押し入れたものに沿った Dehn ツイストは $\text{Diff}_\partial(X)$ の元となる．これを X の境界 **Dehn ツイスト** と呼ぶことにする．

$Y = S^3$ の場合には， $\pi_1(\text{Diff}(S^3)) \cong \pi_1(\text{SO}(4)) \cong \mathbb{Z}/2$ の生成元に対応するループを用いた Dehn ツイストを考えることができる．2020 年に，Kronheimer–Mrowka [33] や Lin [37] は，ある状況でこれがエキゾチックな微分同相となることを示した．

より広い例を考えるために自然な 3次元多様体のクラスは Seifert ファイバー空間である．定義からそこには S^1 作用があり，この作用を用いた Dehn ツイストを考えることができる．2023 年に，Mallick–谷口–筆者 [30] は，Seifert ファイバー空間に沿った Dehn ツイストがエキゾチック微分同相となる例を初めて与えた．その後 1 年あまりのいくつかの研究で，[30] の結果は大きく一般化された：Kang–Park–谷口 [20]，Lin–Mukherjee–Muñoz–Echániz–筆者 [28, 29]，宮澤 [40]．ここでは [28] の結果の一部を紹介する．

境界付き 4次元多様体 W に対して， $\text{Diff}_\partial(W)$ の元であって， $\text{Homeo}_\partial(W)$ を通して

恒等写像にアイソトピックだが $\text{Diff}_\partial(W)$ を通してそうではないものを相対的なエキゾチック微分同相写像と呼ぶことにしよう．以下の定理から，Seifert ファイバー空間に沿った Dehn ツイストが，相対的なエキゾチック微分同相の例を系統的に与えることが分かる：

定理 4.1 (K.–Lin–Mukherjee–Muñoz–Echániz (2024) [28]). Y を $b_1(Y) = 0$ な Seifert ファイバー空間とする． W を Y の標準的なコンタクト構造に対するコンパクトなシンプレクティック充填とする．もし $b^+(W) > 0$ ならば， W の境界 Dehn ツイスト τ_W は $\pi_0(\text{Diff}_\partial(W))$ で無限位数となる．さらに W が単連結ならば， τ_W の任意の冪 τ_W^n ($n \neq 0$) は相対的なエキゾチック微分同相となる．

仮定の $b^+(W) > 0$ は， W の交叉形式が負定値でないということである．この仮定を落とすと容易に反例が作れる．この定理の証明は族の相対 Bauer–Furuta 不変量を用いた背理法である．前に触れた Kang–Park–谷口 [20] に加え，ゲージ理論とコンタクト構造に関わる比較的最近の進展である飯田 [17], 飯田–谷口 [19] の仕事も使われる．

4.2 Milnor ファイブレーションのモノドロミー

上の結果（定理 4.1）の系として，Milnor ファイブレーションのモノドロミーについての興味深い帰結を得ることができる．3 変数の複素多項式 $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ が与えられ， $f(0) = 0$ かつ原点を孤立特異点として持つとしよう． f を制限した

$$f : f^{-1}(B_\delta(\mathbb{C}) \setminus \{0\}) \cap B_\epsilon(\mathbb{C}^3) \rightarrow B_\delta(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \quad (1 \gg \epsilon \gg \delta > 0)$$

がファイバー束になるというのが古典的な Milnor のファイブレーション定理であった．このファイバー束を f の **Milnor ファイブレーション** と呼ぶ．そのファイバー (**Milnor ファイバー**) を M_f とおくと，ファイバー束のモノドロミー $\mu \in \pi_0(\text{Diff}_\partial(M_f))$ が Milnor ファイブレーションの最も重要な不変量である． μ のホモロジー $H_*(M_f)$ への作用は古典的に研究されてきたが，写像類自体を研究するのも自然であろう．

μ の写像類を調べるために多項式のクラスを少々限定する． f が weighted homogeneous とは，ある整数 $w_1, w_2, w_3, d > 0$ が存在し，

$$f(t^{w_1} z_1, t^{w_2} z_2, t^{w_3} z_3) = t^d f(z_1, z_2, z_3)$$

が任意の $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$, $t \in \mathbb{C}$ に対して成り立つときを言う．weighted homogeneous な多項式は，Brieskorn 型の特異点や ADE 特異点（を与える多項式）のような興味深いクラスを含んでいる．ADE 特異点の場合には，Milnor ファイブレーションのモノドロミー μ は $\pi_0(\text{Diff}_\partial(M_f))$ の中で有限位数と知られている (Brieskorn [10], 1971 年)．実は，モノドロミーが有限位数となるのは，ADE 特異点のみであることが示せる：

定理 4.2 (K.–Lin–Mukherjee–Muñoz–Echániz (2024) [28]). $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ を weighted homogeneous な多項式とし， $f(0) = 0$ かつ原点を孤立特異点として持つと仮定する． f

が ADE 特異点を与えるときまたそのときに限り, f の Milnor ファイブレーションのモノドロミー μ は $\pi_0(\text{Diff}_\partial(M_f))$ の中で有限位数である.

証明は, weighted homogeneous の場合, モノドロミーの適当な冪が境界 Dehn ツイストになることに注意し, 定理 4.1 に帰着させることで得られる. 多項式が ADE 型であるというのは, 定理 4.1 の記号で言えば $b^+(W) = 0$ に対応する.

定理 4.2 の位相的カテゴリーでの類似や高次元類似 (すなわち多項式の変数を増やして得られる高次元の Milnor ファイブレーションに対する類似) を考えると, これらは共に成立しないことが分かる. したがって定理 4.2 は, Milnor ファイブレーションのモノドロミーのような古典的な微分同相も, 4 次元特有現象や位相的カテゴリーと可微分カテゴリーの差異を与えていることを示している.

4.3 既約な 4 次元多様体上のエキゾチック微分同相

上では, Milnor ファイバーのような自然な境界付き 4 次元多様体上のエキゾチック微分同相を扱った. 一方, エキゾチック微分同相が検出できる閉 4 次元多様体は, 証明の都合上, 連結和で作るある種「人工的な」ものが多かった. 例えば $4\mathbb{CP}\#21\overline{\mathbb{CP}}^2$ や $K3\#S^2\times S^2$ [44, 7] といった形のものである. これらは, 複素構造, シンプレクティック構造を持たず, エキゾチック構造を持つかも知れないものである.

一方, 4 次元トポロジーで重要な 4 次元多様体の例の多くは複素曲面である. blow-down すると, そういったものは既約な 4 次元多様体, すなわち非自明な連結和分解を持たないものとなる^{*2}. これが 4 次元トポロジーの building block であり, その上ではしばしば, エキゾチック構造, 複素構造, シンプレクティック構造など, 豊かな構造を考えられる.

既約な 4 次元多様体がエキゾチック微分同相を持ち得るかは 4 次元多様体の微分同相群に関する基本的な問いと見なされてきたが, 最近そのような例が存在することが分かった:

定理 4.3 (Baraglia–K. (2024) [9]). 既約な閉 4 次元多様体であってエキゾチック微分同相を許容するものが存在する.

具体的には, minimal な単連結複素曲面 (様々な楕円曲面や完全交叉) として例が与えられる. 例えば, 対数変換で得られる楕円曲面 $E(4n)_{p,q}$ ($n, p, q \geq 1$, ただし有限個の (p, q) を除く) が例となる. 証明は, Baraglia と筆者が族の Bauer–Furuta 不変量から導出した滑らかな 4 次元多様体への制約 [8] と族の指数定理を用いる.

^{*2} 正確には, 閉 4 次元多様体 X が既約とは, $X = X_1\#X_2$ と書けるならば X_i の少なくとも一方はホモトピー S^4 であるというときを言う.

5 その他の事柄

5.1 族のゲージ理論のその他の応用

本稿では、族のゲージ理論の微分同相群への応用の、さらに最近の展開のうちごく一部を述べてきた。他にも触れるべきことは多くある。微分同相群に関するところでは、2022 年 3 月ごろまでの結果を [51] にまとめた。そこでは特に、先駆的な Ruberman の結果 [44] および 4 次元多様体の滑らかな族へのゲージ理論由来の制約を与えた加藤–中村–筆者 [21] の結果、Baraglia [3] の結果、[3] の境界付き 4 次元多様体への拡張についての谷口–筆者 [32] の結果について述べてある。

本稿で述べられなかった族のゲージ理論の位相幾何的応用には以下が含まれる。4 次元多様体の群作用に関する中村の結果 [41] や Baraglia の結果 [2], Riemann 計量の族を用いた 4 次元多様体内の曲面配位への応用に関する筆者の結果 [22, 25], Baraglia [6] や飯田–Mukherjee–谷口–筆者 [18] の 4 次元多様体内の曲面への応用、飯田–Mukherjee–谷口–筆者 [18] や Mukherjee–谷口–筆者 [31] の 4 次元多様体内の 3 次元多様体の埋め込みへの応用。

微分幾何的な応用には、正スカラー曲率計量の空間のトポロジーについての Ruberman の結果 [46], 筆者の結果 [23], Auckly–Ruberman の結果 [1] がある。幾何構造と関わる場所では、シンプレクティック微分同相群と微分同相群の比較についての Kronheimer の議論 [34], Smirnov の [47] に始まる一連の結果, Lin [36] による結果がある。

5.2 Kontsevich 特性類

4 次元多様体の微分同相群に関する族のゲージ理論以外の最近の大きな流れは、渡邊忠之 [49] による 4 次元 Smale 予想の否定的解決 ($\text{Diff}^+(S^4) \not\cong \text{SO}(5)$) という決定的な仕事に端を発する。これはゲージ理論とは全く別システムの道具である Kontsevich 特性類を用いるもので、その後も多くの進展がある。[49] 以降の展開のうち特に興味深いものとして、Kontsevich 特性類が「形式的に滑らか」(formally smooth) なファイバー束に対しても well-defined であることを示した Lin–Xie [38] の仕事に触れたい。[38] の結果は、Kontsevich 特性類と族のゲージ理論が検出できる範囲が相補的であることを示唆している。[38] から導かれる標語を一言で言えば、『Kontsevich 特性類は 4 次元多様体のモジュライ空間の中に出現する高次元と類似する部分を検出しており、族のゲージ理論は 4 次元特有の現象を検出している』ということであり、多くの例で実際に確かめられている。

6 今後の課題・展望

4 次元多様体の微分同相群のゲージ理論的研究には、まだ多くの問題が残っている。

モジュライ空間のホモロジー $H_*(B\text{Diff}(X))$ については、現状族のゲージ理論で検出している元は全て捻れ元である。 $\mathbb{Q}$ 係数でも同様の結果（ホモロジー的非安定性、無限生成性）の成立が期待され、研究が進んでいる。

現在未開拓の事柄としては、 $\text{Diff}(X)$ の代数構造について、4次元特有の現象はまだ見つかっていない。 $\text{Diff}(X)$ の代数構造をゲージ理論的に調べることでそのような現象を見出すことができるかは興味深い問題である。

また、既約な4次元多様体上でエキゾチック微分同相が見つかった（定理 4.3）以上、今後は4次元多様体のエキゾチック構造、複素構造、シンプレクティック構造などの諸構造と微分同相群の間の関係がより詳細に調べられる可能性がある。

4次元以外の微分同相群の研究の歴史を振り返ると、4次元多様体の微分同相群も、これからずっと興味の尽きない対象であろう。その研究はまだ始まったばかりのはずである。現時点では予想もできない展開が今後も起きることを期待しつつ筆を擱く。

参考文献

- [1] Dave Auckly and Daniel Ruberman. Families of diffeomorphisms, embeddings, and positive scalar curvature metrics via Seiberg-Witten theory. *arXiv:2501.11892*, 2025.
- [2] David Baraglia. Obstructions to smooth group actions on 4-manifolds from families Seiberg-Witten theory. *Adv. Math.*, 354:106730, 32, 2019.
- [3] David Baraglia. Constraints on families of smooth 4-manifolds from Bauer-Furuta invariants. *Algebr. Geom. Topol.*, 21(1):317–349, 2021.
- [4] David Baraglia. Non-trivial smooth families of $K3$ surfaces. *Math. Ann.*, 387(3-4):1719–1744, 2023.
- [5] David Baraglia. On the mapping class groups of simply-connected smooth 4-manifolds. *arXiv:2310.18819*, 2023.
- [6] David Baraglia. An adjunction inequality obstruction to isotopy of embedded surfaces in 4-manifolds. *Math. Res. Lett.*, 31(2):329–352, 2024.
- [7] David Baraglia and Hokuto Konno. A gluing formula for families Seiberg-Witten invariants. *Geom. Topol.*, 24(3):1381–1456, 2020.
- [8] David Baraglia and Hokuto Konno. On the Bauer-Furuta and Seiberg-Witten invariants of families of 4-manifolds. *J. Topol.*, 15(2):505–586, 2022.
- [9] David Baraglia and Hokuto Konno. Irreducible 4-manifolds can admit exotic diffeomorphisms. *arXiv:2412.14398*, 2024.
- [10] E. Brieskorn. Singular elements of semi-simple algebraic groups. In *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970)*, Tome 2, pages 279–284. Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1971.
- [11] Ryan Budney and David Gabai. Knotted 3-balls in S^4 . *arXiv:1912.09029*, 2021.
- [12] Mauricio Bustamante, Manuel Krannich, and Alexander Kupers. Finiteness properties of automorphism spaces of manifolds with finite fundamental group. *arXiv:2103.13468*, 2023.
- [13] Michael Hartley Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. *J. Differential Geometry*, 17(3):357–453, 1982.
- [14] Søren Galatius and Oscar Randal-Williams. Homological stability for moduli spaces of high dimensional manifolds. I. *J. Amer. Math. Soc.*, 31(1):215–264, 2018.

- [15] John L. Harer. Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 121(2):215–249, 1985.
- [16] A. E. Hatcher. Concordance spaces, higher simple-homotopy theory, and applications. In *Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 1*, volume XXXII of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 3–21. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1978.
- [17] Nobuo Iida. A Bauer-Furuta-type refinement of Kronheimer and Mrowka’s invariant for 4-manifolds with contact boundary. *Algebr. Geom. Topol.*, 21(7):3303–3333, 2021.
- [18] Nobuo Iida, Hokuto Konno, Anubhav Mukherjee, and Masaki Taniguchi. Diffeomorphisms of 4-manifolds with boundary and exotic embeddings. *Math. Ann.*, 391(2):1845–1897, 2025.
- [19] Nobuo Iida and Masaki Taniguchi. Seiberg-Witten Floer homotopy contact invariant. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 58(4):505–558, 2021.
- [20] Sungkyung Kang, JungHwan Park, and Masaki Taniguchi. Exotic Dehn twists and homotopy coherent group actions. *arXiv:2409.11806*, 2024.
- [21] Tsuyoshi Kato, Hokuto Konno, and Nobuhiro Nakamura. Rigidity of the mod 2 families Seiberg-Witten invariants and topology of families of spin 4-manifolds. *Compos. Math.*, 157(4):770–808, 2021.
- [22] Hokuto Konno. Bounds on genus and configurations of embedded surfaces in 4-manifolds. *J. Topol.*, 9(4):1130–1152, 2016.
- [23] Hokuto Konno. Positive scalar curvature and higher-dimensional families of Seiberg-Witten equations. *J. Topol.*, 12(4):1246–1265, 2019.
- [24] Hokuto Konno. Characteristic classes via 4-dimensional gauge theory. *Geom. Topol.*, 25(2):711–773, 2021.
- [25] Hokuto Konno. A cohomological Seiberg-Witten invariant emerging from the adjunction inequality. *J. Topol.*, 15(1):108–167, 2022.
- [26] Hokuto Konno. The homology of moduli spaces of 4-manifolds may be infinitely generated. *Forum Math. Pi*, 12:Paper No. e25, 2024.
- [27] Hokuto Konno and Jianfeng Lin. Homological instability for moduli spaces of smooth 4-manifolds. *arXiv:2211.03043*, 2022.
- [28] Hokuto Konno, Jianfeng Lin, Anubhav Mukherjee, and Juan Muñoz-Echániz. The monodromy diffeomorphism of weighted singularities and Seiberg-Witten theory. *arXiv:2411.12202*, 2024.
- [29] Hokuto Konno, Jianfeng Lin, Anubhav Mukherjee, and Juan Muñoz-Echániz. On four-dimensional Dehn twists and Milnor fibrations. *arXiv:2409.11961*, 2024.
- [30] Hokuto Konno, Abhishek Mallick, and Masaki Taniguchi. Exotic Dehn twists on 4-manifolds. *arXiv:2306.08607*, 2023.
- [31] Hokuto Konno, Anubhav Mukherjee, and Masaki Taniguchi. Exotic codimension-1 submanifolds in 4-manifolds and stabilizations. *arXiv:2210.05029*, 2022.
- [32] Hokuto Konno and Masaki Taniguchi. The groups of diffeomorphisms and homeomorphisms of 4-manifolds with boundary. *Adv. Math.*, 409:Paper No. 108627, 58, 2022.
- [33] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka. The Dehn twist on a sum of two $K3$ surfaces.

- Math. Res. Lett.*, 27(6):1767–1783, 2020.
- [34] Peter Kronheimer. Some non-trivial families of symplectic structures. *preprint*.
 - [35] Alexander Kupers. Some finiteness results for groups of automorphisms of manifolds. *Geom. Topol.*, 23(5):2277–2333, 2019.
 - [36] Jianfeng Lin. The family Seiberg-Witten invariant and nonsymplectic loops of diffeomorphisms. *arXiv:2208.12082*, 2022.
 - [37] Jianfeng Lin. Isotopy of the Dehn twist on $K3 \# K3$ after a single stabilization. *Geom. Topol.*, 27(5):1987–2012, 2023.
 - [38] Jianfeng Lin and Yi Xie. Configuration space integrals and formal smooth structures. *arXiv:2310.14156*, 2023.
 - [39] Ib Madsen and Michael Weiss. The stable moduli space of Riemann surfaces: Mumford’s conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 165(3):843–941, 2007.
 - [40] Jin Miyazawa. Boundary Dehn twists on Milnor fibers and Family Bauer–Furuta invariants. *arXiv:2410.21742*, 2024.
 - [41] Nobuhiro Nakamura. The Seiberg-Witten equations for families and diffeomorphisms of 4-manifolds. *Asian J. Math.*, 7(1):133–138, 2003.
 - [42] Nobuhiro Nakamura. Smoothability of $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -actions on 4-manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(8):2973–2978, 2010.
 - [43] Frank Quinn. Isotopy of 4-manifolds. *J. Differential Geom.*, 24(3):343–372, 1986.
 - [44] Daniel Ruberman. An obstruction to smooth isotopy in dimension 4. *Math. Res. Lett.*, 5(6):743–758, 1998.
 - [45] Daniel Ruberman. A polynomial invariant of diffeomorphisms of 4-manifolds. In *Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998)*, volume 2 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 473–488. Geom. Topol. Publ., Coventry, 1999.
 - [46] Daniel Ruberman. Positive scalar curvature, diffeomorphisms and the Seiberg-Witten invariants. *Geom. Topol.*, 5:895–924, 2001.
 - [47] Gleb Smirnov. From flops to diffeomorphism groups. *Geom. Topol.*, 26(2):875–898, 2022.
 - [48] Dennis Sullivan. Infinitesimal computations in topology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (47):269–331, 1977.
 - [49] Tadayuki Watanabe. Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of $\text{Diff}(S^4)$. *arXiv:1812.02448*, 2018.
 - [50] Tadayuki Watanabe. Theta-graph and diffeomorphisms of some 4-manifolds. *arXiv:2005.09545*, 2023.
 - [51] 今野北斗. 『数学』論説, *to appear*.