微分同相群と族のゲージ理論

今　野　北　斗

1　背景

まずは，特段の予備知識を仮定せず，我々がやりたいことの位置づけを述べる．

1.1　4 次元トポロジーとゲージ理論

多様体の分類理論において，4 次元は特別な次元である— 今ではよく知られたこの認識の確立は，前世紀のトポロジーの研究における重要な達成の一つに数えられるであろう．

例えば，コンパクトな 4 次元位相多様体であって，無限個の異なる可微分構造を持つものが数多く知られている．ここに二つの比較の観点がある：

(1) 一つは 4 次元と他の次元との比較である．4 次元以外では，コンパクト位相多様体上の可微分構造は高々有限個しかないと知られている．

(2) もう一つは，位相的カテゴリーと可微分カテゴリーとの比較である．上の事実は，4 次元においては，両カテゴリーに著しい差異があることを示している．

これら二つの比較が 4 次元トポロジーで基本的である．

上の可微分構造の個数に関する事実は，4 次元可微分カテゴリーが特別なものであることを端的に示している．一般に，4 次元可微分カテゴリーには，特異的な複雑さが現れる傾向にある．複雑さとは，典型的には，何かの個数が無限になることや，何かが不安定であるという形で現れる．

そのような 4 次元可微分カテゴリーの特異性を証明するためには，4 次元多様体の可微分構造を精密に捉える道具が必要となる．1980 年代初頭の Donaldson の仕事以降，ゲージ理論がそのような道具を提供することはよく知られている．その典型的な議論のひとつは次のようなもので，非線形解析を本質的に使うところに特徴がある：まず，（物理学におけるゲージ理論由来の）ある非線形偏微分方程式を滑らかな 4 次元多様体上で考える．その解空間には，方程式由来のある対称性（ゲージ対称性）がある．この対称性による解空間の商であるモジュライ空間を適当な意味で「数える」ことで，4 次元多様体の数値的な不変量を得る．それを使って，互いに同相だが微分同相ではない 4 次元多様体を見分ける．

もっとも，このようなアイデアを実行するためには，ゲージ理論的な不変量を計算する必要がある．これはしばしば容易ではなく，実際に計算ができるのは限られた状況のみである．Donaldson の仕事から 40 年以上が経つが，4 次元可微分カテゴリーの特異性の内，ごく一部しか我々は捉えられていないものと思われる．

1.2　高次元多様体の微分同相群—高次元トポロジーの再来

ゲージ理論の登場以前に遡ると，高次元（5 次元以上）の多様体の分類理論は，Kirby–Siebenmann の仕事により，1960 年代終盤に一つの区切りを迎えた．例えば，上で挙げた 4 次元以外での可微分構造の有限性は（高次元においては）その帰結である．その方法の核となるのは，大まかに言えば，一種の手術の技法 (Whitney の trick) である．これが多様体の幾何学的な問題を代数的な問題に帰着さ

せる橋渡しを与える．代数に帰着されることで，高次元での幾何学的な問題がある程度統制されたものになるのである．Whitney の trick は 2 次元円板に沿って多様体内の交叉を消去する議論で，高次元多様体の分類理論において 4 次元が除外されている主な理由であった（4 という数字が出てくるのは，5 次元以上の多様体の中でなら円板の自己交叉を一般の位置の議論で外せるが，$4 = 2 + 2$ 次元ではそれができないからである.）

他方，多様体のトポロジーにおいて，その自己同型群である微分同相群は基本的な興味の対象であり続けてきた．例えば 2 次元多様体に対しては，写像類群の研究として，低次元トポロジーの大きな割合を長年占めている．一方今世紀に入ってからは，Galatius, Randal-Williams らのスクールにより，高次元多様体の微分同相群の研究が驚くべき進歩を遂げた．その結果の一部には後に触れることになる．その手法は代数トポロジーと微分トポロジーの高度な組み合わせで，微分トポロジーの技法の一部にはやはり Whitney の trick が含まれる．高次元多様体の微分同相群の研究の進展は，1960 年代のトポロジーの黄金時代の再来を思わせるものがある．

1.3　我々の興味の対象—4 次元多様体の微分同相群

再び話を 4 次元に戻そう．華々しく発展する他次元に比べ，4 次元多様体の微分同相群に対する知見は，最近までは極めて限られていた．これは，4 次元多様体の分類理論が困難である理由と同様に，Whitney の trick の欠如に由来する．

しかし，4 次元多様体の分類理論では，単に分類が困難であるということを超えて，他次元と真に異なる現象が存在していたのであった．同様のことは微分同相群に対しても成立するのだろうか．また，他次元との比較に加えて，4 次元トポロジーにおけるもう一つの基本的な観点であった位相カテゴリーと可微分カテゴリーの比較を軸に微分同相群を調べる，すなわち同相群と微分同相群を比較するのも自然な問題であろう：

問 1.1. 4 次元多様体の微分同相群が他の次元とは異なる興味深い性質を持つことを示せ．

問 1.2. 4 次元多様体の同相群と微分同相群の差を調べよ．

これらの問いを考えるにあたって，多様体の分類理論とのアナロジーから期待されるのは，4 次元可微分カテゴリー—すなわち 4 次元多様体の微分同相群が特異的に複雑になるという方向の結果であろう．まず問題となるのは，微分同相群に対して複雑さをどのように定式化するかという点である．多様体の分類理論に比べると，微分同相群における複雑さの現れ方は多種多様である．本稿では，複雑さをさまざまな形で定式化し，4 次元可微分カテゴリーに特有の複雑さが微分同相群に対して実際に存在することを解説する．

1.4　我々の手法—族のゲージ理論

上のような問題に取り組むには，4 次元多様体の連続族に対してゲージ理論を展開する「**族のゲージ理論**」が有効である．その典型的な議論は次のようなものである．4 次元多様体の連続族，すなわち 4 次元多様体をファイバーとする滑らかなファイバー束が与えられたとする．各ファイバーにはゲージ理論的偏微分方程式が乗っている．その解空間（の商であるモジュライ空間）を底空間上で束ねたものを考える．この束ねた空間を「数える」ことで，4 次元多様体の族の不変量を得る．これを用いて，（典型的には位相的には同型な）ファイバー束を可微分の範疇で見分けると，ファイバー束を統制している群（構造群）であるファイバーの微分同相群の複雑さを下から評価できる．

このようなアイデアを 4 次元多様体の微分同相群に初めて応用したのは Ruberman [63] である．彼

は 1998 年の先駆的な仕事で，族の底空間が 1 次元の場合にこのアイデアを実行し，問 2 への答えをひとつ与えている（4 節参照）．その後 10 年ほどの間に Ruberman 自身の続編 [64, 65] と中村信裕の関連する仕事 [57, 58] があったが，族のゲージ理論の微分同相群への応用は散発的な状況だった．

筆者は 2010 年代中頃以来，族のゲージ理論の組織的な研究を試みてきた．最近この分野には様々な研究者が参入し，多くの成果が生まれ，筆者の研究開始時とは状況が一変した．その結果として，上で述べた問いへの答えが，新しい視点から徐々に得られつつある．本稿ではこのような流れの一部，特に筆者が関わってきたものを中心に紹介したい．

既に述べたように，まずは 4 次元多様体の微分同相群の複雑さのいくつかの定式化を与える必要があるが，定式化ができてもその証明は多くの場合非常に困難である．その理由は主に，従来のゲージ理論的不変量同様に，族のゲージ理論の不変量の計算もしばしば難しいためである．重要な問題設定と族のゲージ理論の機構が上手くかみ合う状況を見つける部分が，現時点のこの分野における最も困難かつ面白い部分であると筆者は感じている．

本稿の内容を以下に簡単にまとめる．2 節では，4 次元多様体のモジュライ空間のホモロジー的非安定性を説明する．3 節では，4 次元多様体の微分同相群に伴う種々の無限性について述べる．4 節では，4 次元多様体のエキゾチックな微分同相写像について，最近の成果を中心にまとめる．5 節では，族のゲージ理論に関するその他の事柄や他の重要な進展である Kontsevich 特性類を僅かながら概観する．最後に 6 節では，今後の課題についてごく簡単に触れる．

以下論文には主に出版年を併記するが，最近の文献については時系列をはっきりさせるため arXiv に現れた年を記す．なお，2022 年 3 月ごろまでの族のゲージ理論の微分同相群への応用は論説 [73] にまとめた．本稿ではそれ以降，そして 2025 年 4 月ごろまでの結果のみを述べることにする．

2　ホモロジー的非安定性

2.1　多様体のモジュライ空間

まずは微分同相群の分類空間を復習する．滑らかな多様体 X に対し，$\mathrm{Diff}(X)$ を X の微分同相群とする．$\mathrm{Diff}(X)$ には自然な位相 (C^∞-位相) が入り，写像の合成により位相群となる．その分類空間 $B\mathrm{Diff}(X)$ は，直感的には X と微分同相な多様体全てをパラメトライズしている空間であり，(X と微分同相な) 多様体のモジュライ空間と呼ばれる．$B\mathrm{Diff}(X)$ の具体的なモデルを記述することも容易で，Euclid 空間の自然な包含の列 $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \cdots$ の帰納極限を $\mathbb{R}^\infty$ と置けば，

$$B\mathrm{Diff}(X) = \mathrm{Emb}(X, \mathbb{R}^\infty)/\mathrm{Diff}(X)$$

で与えられる．ここで $\mathrm{Emb}(X, \mathbb{R}^\infty)$ は X から $\mathbb{R}^\infty$ への滑らかな埋め込み（十分次元の高い Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ への埋め込みと思えば良い）のなす空間で，$\mathrm{Diff}(X)$ は $\mathrm{Emb}(X, \mathbb{R}^\infty)$ にパラメータの取り替え（すなわち埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$ の定義域への微分同相の合成）で作用している．直感的な言い方をすれば，$B\mathrm{Diff}(X)$ とは，$\mathbb{R}^\infty$ の部分多様体で X と微分同相なものを全て集めて得られる空間である．直交群 $O(n)$ の分類空間として，$\mathbb{R}^\infty$ の n 次元線形部分空間全てを集めた（無限次元）Grassmann 多様体が現れるのと同様の考え方である．

モジュライ空間と呼ばれる所以は，$B\mathrm{Diff}(X)$ が X の族，すなわち X をファイバーとする滑らかなファイバー束を分類しているからである．実際，分類空間の一般論から，任意の (良い) 位相空間 B

に対し次の対応があるのであった：

$$[B, B\mathrm{Diff}(X)] \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{B \text{ 上の } X \text{ がファイバーのファイバー束}\}/\cong .$$

X が境界付きの場合は，X の境界の近くで恒等写像であるような微分同相全体のなす群 $\mathrm{Diff}_\partial(X)$ とその分類空間を考える．

ベクトル束の分類で Grassmann 多様体のトポロジーを知ることが重要なのと同様に，モジュライ空間 $B\mathrm{Diff}(X)$ のトポロジーは，ファイバー束の位相幾何学における最も基本的な研究対象である．$B\mathrm{Diff}(X)$ のトポロジーの中でも，モジュライ空間のコホモロジーは X をファイバーとするファイバー束の特性類と対応しており，中心的な興味の対象の一つである：

$$H^*(B\mathrm{Diff}(X)) \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{X \text{ がファイバーのファイバー束の特性類}\}.$$

モジュライ空間 $B\mathrm{Diff}(X)$ の位相の研究が多様体の分類理論とは異なる広がりを持つことは，例えば 2 次元トポロジーの発展の歴史を振り返れば明らかであろう．曲面の分類はよく知られているように 100 年以上前に完了している．しかし曲面のモジュライ空間 $B\mathrm{Diff}(X)$ は，Riemann 面のモジュライ空間と自然に関係し，その位相は写像類群の研究と密接に関わる．これは現在でも活発に研究されている対象であり，今後もそうであり続けるであろう．一方，高次元多様体に対しても，多様体の分類理論を越えて，モジュライ空間 $B\mathrm{Diff}(X)$ の位相が今世紀に入って以降本格的に研究されているのである．

なお，「多様体のモジュライ空間」という言葉に本来最も相応しいものは，滑らかな多様体 X の微分同相類 $[X]$ の全てに亘る非交和 $\mathcal{M} = \bigsqcup_{[X]} B\mathrm{Diff}(X)$ であろう．多様体の分類理論は $\mathcal{M}$ の連結成分 $H_0(\mathcal{M})$ あるいは $\pi_0(\mathcal{M})$ の研究であり，$B\mathrm{Diff}(X)$ の研究は高次ホモロジー群 $H_k(\mathcal{M})$ や（ある連結成分の）高次ホモトピー群 $\pi_k(\mathcal{M})$ などの研究と考えることが，多くの場面で自然である．

2.2 4 次元以外でのホモロジー的安定性

コホモロジー $H^*(B\mathrm{Diff}(X))$，あるいは双対的にホモロジー $H_*(B\mathrm{Diff}(X))$ を計算することは基本的な問題であるが，一般には極めて難しい．例えば X が曲面の場合でも，完全な計算が期待できる状況からはほど遠い．しかし，多様体を適当に「安定化」すると，驚くべきことに $H_*(B\mathrm{Diff}(X))$ が計算ができる場合がある．その鍵が下で説明する**ホモロジー的安定性**である．

以下，W を偶数 $2n$ 次元の境界付きでコンパクトな可微分多様体とする．このとき，W の境界 ∂W に $S^n \times S^n \# \partial W \times [0,1]$（ここで $\#$ は内部連結和）を $\partial W \times \{0\}$ に沿って貼り付けたものを連結和 $W \# S^n \times S^n$ のモデルとして採用する．すると，恒等写像で拡張することで，埋め込み写像

$$s : \mathrm{Diff}_\partial(W) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_\partial(W \# S^n \times S^n)$$

が得られる．s およびそれが誘導する写像は安定化写像と呼ばれる．以下が多様体のモジュライ空間のホモロジー的安定性と呼ばれる結果で，2 次元の場合は Harer [23]，6 次元以上は Galatius–Randal-Williams [21] による．Galatius–Randal-Williams の結果は，最近の高次元多様体の微分同相群の研究の基礎をなすものである：

定理 2.1 (Harer (1985) [23], Galatius–Randal-Williams (2018) [21]). W をコンパクトで滑らかな単連結多様体とし，次元は 4 ではない偶数次元 $(=: 2n)$ とする．$k \geq 0$ を固定したとき，任意

の $N \gg k$ に対し，s が誘導する写像

$$s_* : H_k(B\mathrm{Diff}_\partial(W\#_N S^n \times S^n);\mathbb{Z}) \to H_k(B\mathrm{Diff}_\partial(W\#_{N+1} S^n \times S^n);\mathbb{Z})$$

は同型になる．

この定理により，十分大きな N に対し，$H_k(B\mathrm{Diff}_\partial(W\#_N S^n \times S^n))$ は帰納極限

$$\lim_{N\to+\infty} H_k(B\mathrm{Diff}_\partial(W\#_N S^n \times S^n))$$

と同一視できる．この極限は安定ホモロジーと呼ばれ，ホモトピー論で計算ができる対象となる．$\mathbb{Q}$ 上では明示的に計算され, Mumford–森田–Miller 類で生成される．Madsen–Weiss [55] による Mumford 予想の解決はこれを 2 次元で示すもので，その後 Galatius–Randal-Williams [21] はこれを高次元に拡張した．

上の Galatius–Randal-Williams の定理で 4 次元が除外されている理由は，その証明の途中に Whitney の trick を用いる箇所があるからである．既に述べたように，Whitney の trick の欠如は，多様体の分類空間に関する高次元での定理の証明を，4 次元において阻む主要な要因となった．微分同相群に関する定理の証明においても再び，Whitney の trick のために高次元の議論が 4 次元でそのまま通らないのである．

2.3 4 次元でのホモロジー的非安定性

定理 2.1 とその後の説明で見たように，4 以外の偶数次元では，多様体の安定化を十分行うとモジュライ空間のホモロジー $H_k(B\mathrm{Diff}_\partial(W))$ が計算できる．以下の定理は，4 次元においては，キーステップであったホモロジー的安定性が成立しないことを主張する．ここでは境界付き多様体として閉多様体を puncture したものに対象を限る．すなわち，閉 4 次元多様体 X に対し，$\mathring{X} = X \setminus \mathrm{Int}(D^4)$ を考える．

定理 2.2 (K.–Lin (2022) [35]). X を単連結で滑らかな閉 4 次元多様体とする．$k > 0$ を固定したとき，数列 $0 < N_1 < N_2 < \cdots \to +\infty$ が存在し，各 N_i に対して

$$s_* : H_k(B\mathrm{Diff}_\partial(\mathring{X}\#_{N_i} S^2 \times S^2);\mathbb{Z}) \to H_k(B\mathrm{Diff}_\partial(\mathring{X}\#_{N_i+1} S^2 \times S^2);\mathbb{Z})$$

は同型にならない．

すなわち，4 次元以外とは異なり，$S^2 \times S^2$ をいくら連結和していっても，モジュライ空間のホモロジーは安定することがないのである．なお上の定理で，同型を単射あるいは全射に置き換えた主張も成立する．いわば，特性類の生成，消滅が無限回生じているのである．

2.2 節で述べた他次元での状況と比べると，4 次元ではモジュライ空間のホモロジーの計算をホモトピー論に帰着することは困難なことを定理 2.2 は示唆していると言えるだろう．多様体の分類理論と似た現象がここでも起きているわけである．

位相的カテゴリーでは現状以下のことが知られている．2 次元の場合は位相的カテゴリーと可微分カテゴリーに差が無く，Harer [23] の結果から既に同相群の分類空間 $B\mathrm{Homeo}_\partial(W)$ に対するホモロジー的安定性が従う．高次元の場合には Kupers [50] により同様の安定性が位相的カテゴリーで示されている．4 次元でも位相的カテゴリーでの安定性が期待されるが，まだ確立されていない．

なお，定理 2.2 の証明では，モジュライ空間のホモロジーの非安定な元を具体的に与えているが，

これらは全て位相的カテゴリーに移ると自明になる．すなわち，位相的なカテゴリーでのモジュライ空間と可微分カテゴリーでのモジュライ空間のホモロジーの差も検出するような証明となっている．

2.4　ホモロジー的非安定性の証明（1）：ゲージ理論的特性類の構成

ホモロジー的非安定性（定理 2.2）は，族のゲージ理論を用いて特性類を構成し，計算することで証明される．X を向き付けられた可微分閉 4 次元多様体とし，$k \geq 0$ とする．$\mathrm{Diff}^+(X)$ を向きを保つ微分同相のなす群とする．このとき $\mathbb{Z}/2$ 係数の特性類

$$\mathbb{SW}^k(X) \in H^k(B\mathrm{Diff}^+(X); \mathbb{Z}/2) \tag{2.1}$$

を定義することができる（正確には $b^+(X) \geq k+2$ という位相的仮定を課す必要がある）．これは，筆者が定義したゲージ理論的特性類 ([32], 2018 年) に Ruberman [65] の微分同相に対するある数値的不変量のアイデアを合わせて構成されるものである[1]．ごく大雑把に言えば，ゲージ理論的偏微分方程式である Seiberg–Witten 方程式

$$\begin{cases} F_A^+ = \sigma(\Phi, \Phi), \\ D\!\!\!\!/_A \Phi = 0 \end{cases}$$

の族の解を $B\mathrm{Diff}^+(X)$ の各 k-cell の上で数えて定義される．

特性類 $\mathbb{SW}^k(X)$ の構成のアイデアをもう少し述べよう．Seiberg–Witten 方程式は，X 上の spin^c 構造と呼ばれる位相的データと Riemann 計量を固定すると書き下すことができる．これらを族に対して考えよう．最も一般的な状況で議論するために，普遍 X 束

$$E := E\mathrm{Diff}^+(X) \times_{\mathrm{Diff}^+(X)} X \to B\mathrm{Diff}^+(X) =: B$$

を考える．E のモノドロミーは X 上の spin^c 構造の同型類全体 $\mathrm{Spin}^c(X)$ に引き戻しにより作用しているので，E に同伴して $\mathrm{Spin}^c(X)$ がファイバーの B 上の族が誘導される．これを $\mathrm{Spin}^c(E) \to B$ と書くことにすると，$\mathrm{Spin}^c(E) \to B$ は B の被覆空間を与える．一般に，$\mathrm{Diff}^+(X)$ の $\mathrm{Spin}^c(X)$ への作用は複雑であり，$\mathrm{Spin}^c(E) \to B$ は極めて非自明な被覆空間である．

E 上で Riemann 計量の連続族を取る．すると，B の各点 b 上のファイバー E_b の上には，計量 g_b と $\mathrm{Spin}^c(E)$ のファイバー $\mathrm{Spin}^c(E_b)$ が乗っている．$\mathrm{Spin}^c(E_b)$ の各元ごとに，計量 g_b に関する Seiberg–Witten 方程式を考えることができる．この方程式の $\mathrm{Spin}^c(E_b)$ に亘った disjoint union を考える．b を動かすと，Seiberg–Witten 方程式の ($\#\mathrm{Spin}^c(X)$ 個の) 組の族が B 上に得られる．各ファイバーの上では互いに関係の無い Seiberg–Witten 方程式の組を考えているに過ぎないが，B 全体の上では被覆空間 $\mathrm{Spin}^c(E) \to B$ に沿って複雑に繋がった方程式の族が現れる．

$B = B\mathrm{Diff}^+(X)$ を胞体近似し，B の各 k-cell の上で，上で得られた Seiberg–Witten 方程式の組の族の解（のモジュライ）空間を数えて数を得る．このようにして B 上のコチェインを作ると，これがコサイクルとなると分かる．そのコホモロジー類が特性類 (2.1) で，計量の族（や技術上必要な摂動）の取り方に依らないことが示せる．$\mathbb{Z}/2$ 係数にするのは，E のモノドロミーが解（のモジュライ）空間の向き（homology orientation）に非自明に作用するためである．正確には，適当な形式的次元の spin^c 構造だけ選び，また非自明な計算結果を得るために，charge conjugation と呼ばれる $\mathbb{Z}/2$ 対称性で上の構成を「割った」ものを定理 2.2 の証明では用いる．

この特性類 $\mathbb{SW}^k(X)$ の重要な性質は，これが非安定な特性類ということである．すなわち，安定化写像 s^*（正確にはその有限回の合成）で送ると消滅することが証明できる．これは，Seiberg–Witten 不変量が適当な連結和 ($\#S^2 \times S^2$ を含む) に対して消滅することの族版である．この非安定性のおかげで，次に述べる特性類の計算さえできれば，ゲージ理論的特性類が，非安定性という形で，4 次元多様体の微分同相群の複雑さを捉える道具であることが分かるのである．

2.5　ホモロジー的非安定性の証明（2）：ゲージ理論的特性類の計算

この特性類 $\mathbb{SW}^k(X)$ が非自明になるファイバー束を見付ける必要があるが，そのような族は以下のようにして構成される．これは Ruberman [63] が S^1 上の族の場合に行っていた議論の高次元化である．（正確には，Yang–Mills 理論を用いていた Ruberman [63] の議論の，Baraglia と筆者 [8] による Seiberg–Witten 側の対応物の高次元版である．）閉 4 次元多様体 M に対し，$M\#_k S^2 \times S^2$ と言う形の 4 次元多様体を考える．この上の k 個の互いに可換な微分同相 $f_1, \dots, f_k$ を上手く選ぶ（大まかにいうと，各 $S^2 \times S^2$ のコピー上に台を持ち，そのホモロジーに -1 倍で作用するようなものを取る）．それらの多重写像トーラスは，X の T^k 上の族となる．

M を良い性質を満たすシンプレクティック多様体として取っておくと，この T^k 上の族に対し，上で述べた特性類 (2.1) は非自明になる[2)]．非自明性の証明の核では Baraglia と筆者 [8] による 4 次元多様体の族に対する Seiberg–Witten 不変量の計算公式（Taubes 式の貼り合わせ公式）が使われる．これは $M\#_k S^2 \times S^2$ の族の Seiberg–Witten 不変量の計算を，Seiberg–Witten 方程式の解の貼り合わせにより M の Seiberg–Witten 不変量の計算に帰着させるものである．この貼り合わせ公式により，族のモノドロミーで不変な spin^c 構造に対応して，（大まかに言えば）M の Seiberg–Witten 不変量が特性類の計算に寄与すると分かる．モノドロミーで不変でない個々の spin^c 構造からの寄与は一般には極めて複雑で，直接計算をするのは困難と思われる代物である．しかし，モノドロミーの spin^c 構造全体の集合への作用の軌道を考えると，モノドロミー不変な spin^c 構造の軌道以外の軌道の寄与は全て $\mathbb{Z}/2$ 上でキャンセルすることが分かる．これは $S^2 \times S^2$ 上でホモロジーに -1 倍で作用する簡単な微分同相を考えていたことの帰結である．以上を全部合わせると，結局 M の Seiberg–Witten 不変量のみが特性類の計算に効いてきて，特性類の非自明性が示せる，というのが筋道である．

ここまでがホモロジー的非安定性定理の証明の中心である．定理の証明を完結させるには，与えられた単連結閉 4 次元多様体 X に対して，数列 $N_i \to +\infty$ と良い性質を満たすシンプレクティック 4 次元多様体の列 M_i であって $X\#_{N_i} S^2 \times S^2 \cong M_i \#_k S^2 \times S^2$ となるものを見付けてくれば良い．これはある種の geography に帰着する．ここまでできると，上で注意した特性類 $\mathbb{SW}^k(X)$ の非安定性と合わせることで，定理 2.2 で現れた安定化写像 s_* たちが全射でないことが示せる．

安定化写像 s_* たちが単射でないことは次のようにして分かる．上のように構成した族 E が，M の代わりに Seiberg–Witten 不変量が自明であるような 4 次元多様体 M' に対して同様の構成を行って得られる族 E' を考える．上と同様の貼り合わせの議論により，E' に対しては特性類 $\mathbb{SW}^k(X)$ は自明になることが分かる．ここから E と E' の分類写像が定める $H_k(B\mathrm{Diff}(M_k S^2 \times S^2))$ の元は相異なることが従う．一方，あらかじめ M, M' を上手く取って $M\#S^2 \times S^2$ と $M'\#S^2 \times S^2$ が微分同相になると仮定することができ，すると E と E' は $S^2 \times S^2$ の自明束の連結和をすると同型なファイバー束になることが簡単に分かる．すなわち，$H_k(B\mathrm{Diff}(X))$ の相異なる元を s_* で $H_k(B\mathrm{Diff}(M_{k+1} S^2 \times S^2))$ に移したものが等しくなる．これで s_* が単射でないことが分かる．

3 微分同相群の無限性

3.1 様々な有限性・無限性

微分同相群 $\mathrm{Diff}(X)$ およびその分類空間のホモロジー・ホモトピー群は，ほとんどの場合無限群になる．無限群が与えられたとき，その構造に関して最初に問うべきことの一つは，その群が有限生成か，という弱い意味での有限性であろう．4 次元以外においては，基本群に関する仮定の下，強力な有限性定理が知られている．例えば，以下の予想には未だ反例がない：

予想 3.1. X を可微分閉多様体とする．$\pi_1(X)$ が有限群かつ $\dim X \neq 4$ であれば，$\pi_k(\mathrm{Diff}(X))$, $H_k(B\mathrm{Diff}(X);\mathbb{Z})$ は全ての $k \geq 0$ に対して有限生成であろう．

また偶数次元の場合には，この予想は既に証明されている (Kupers [51], Bustamante–Krannich–Kupers [15])．その証明にはホモロジー的安定性（定理 2.1 の 6 次元以上の部分）が用いられている．振り返ると，ホモロジー的安定性の証明では，Whitney の trick の欠如のため 4 次元が除外されていた．結局ここでも Whitney の trick のために，4 次元では有限性定理が成立するか不明となるのである．

予想 3.1 の 4 次元類似の反例が見付けられるかは自然な問いであろう．既に述べたように，コンパクト 4 次元多様体は他次元と異なり無限個のエキゾチック構造を持ち得るのだった．予想 3.1 の 4 次元類似の反例を探すことは，この事実—4 次元での一種の無限性—の自己同型群版のアナロジーがあるかを問うていると言えるだろう．$\mathrm{Diff}(X)$ のホモトピー群に対しては，以下の結果がこの方向の初めてのものである：

定理 3.2 (Baraglia (2021) [4]). $\pi_1(\mathrm{Diff}(K3))$ は有限生成ではない．

この結果は族の Seiberg–Witten 不変量を用いて示される．この後 Lin [52] は，全ての楕円曲面や完全交叉を含む，広範なクラスの 4 次元多様体に上の結果を一般化・精密化した．

一方 Auckly–Ruberman は，Baraglia, Lin とは大きく異なる例に基づき，Ruberman の 1-パラメータ族に関する一連の仕事 [63, 64, 65] を高次ホモトピー群に拡張する結果を得ている．特に：

定理 3.3 (Auckly–Ruberman (2025) [1]). 各 $k \geq 1$ に対し， $\pi_k(\mathrm{Diff}(X))$ が有限生成でないような単連結閉可微分 4 次元多様体 X が存在する．

これもやはり族の Seiberg–Witten 不変量の計算による．Ruberman [63] による 1-パラメータの族の不変量の計算（の Seiberg–Witten 対応物 [8]）を，$S^2 \times S^2$ を考えたいホモトピー群の次数に応じて連結和したところに帰納的に拡張し，任意次元の球面の上で不変量を計算する，というのが筋道である．

以上は微分同相群の高次ホモトピー群に関する結果だが，次に X の写像類群と $B\mathrm{Diff}(X)$ のホモロジーの無限性について論じよう．これがゲージ理論的特性類の別の応用となる．まず背景として，4 次元以外での写像類群の有限性については，次の結果が古典的である：

定理 3.4 (Sullivan (1977) [67]). X を単連結閉可微分多様体とする．$\dim X \geq 5$ ならば，$\pi_0(\mathrm{Diff}(X))$ は有限生成である．

実際には Sullivan はより強い有限性を示しており，例えば同じ仮定の下 $\pi_0(\mathrm{Diff}(X))$ は有限表示群である[3)]．もちろん 3 次元以下では同様の主張は正しいので，4 次元以外では単連結多様体の写像類群は有限生成ということになる．この事実の 4 次元類似の非成立が次の結果である：

定理 3.5 (K. (2023) [34], Baraglia (2023) [5]). 写像類群 $\pi_0(\mathrm{Diff}(X))$ が有限生成でないよう

な単連結閉可微分 4 次元多様体 X が存在する．

具体的には，$X = E(n)\#S^2 \times S^2$（ここで $E(n)$ はあるクラスの楕円曲面で，$n \geq 2$）に対し，$\pi_0(\mathrm{Diff}(X))$ は無限生成であると分かる．

ここで位相的カテゴリーとの比較を述べよう．まず，単連結閉 4 次元多様体 X に対しては，$\pi_0(\mathrm{Homeo}(X))$ が有限生成であることは Freedman [18], Quinn [62] の結果から従う[4)]．したがって単連結多様体の写像類群の無限生成性（定理 3.5）は，4 次元可微分カテゴリー特有の現象ということになる．なお，単連結でない場合は，高次元でも 4 次元でも写像類群が無限生成になり得ることはこの結果以前に知られていた（Hatcher [24], Budney–Gabai [14], 渡邉 [71]）．

上の写像類群の無限性は，一般の次数に対するモジュライ空間のホモロジー群の無限性の帰結である：

定理 3.6 (K. (2023) [34]). 各 $k \geq 1$ に対し， $H_k(B\mathrm{Diff}(X);\mathbb{Z})$ が有限生成でないような単連結閉可微分 4 次元多様体 X が存在する．

具体的には，$X = E(n)\#_k S^2 \times S^2$ $(n \geq 2)$ に対し，$H_k(B\mathrm{Diff}(X);\mathbb{Z})$ は $(\mathbb{Z}/2)^{\oplus\mathbb{N}}$ を直和因子に含むと分かる．$H_1(B\mathrm{Diff}(X))$ は $\pi_0(\mathrm{Diff}(X))$ のアーベル化であるから，定理 3.6 で $k=1$ とすると定理 3.5 はただちに従う．なお，一般の単連結 4 次元位相多様体 X に対する $\pi_k(\mathrm{Homeo}(X))$ $(k > 0)$, $H_k(B\mathrm{Homeo}(X))$ $(k > 1)$ の有限性生成は，現在まだ証明されていない．

3.2 $\boldsymbol{H_k(B\mathrm{Diff}(X))}$ の無限生成性の証明

$H_k(B\mathrm{Diff}(X))$ の無限生成性（定理 3.6）の証明をもう少し詳しく説明する．この定理の証明にもゲージ理論的特性類を用いる．具体的には，ホモロジー的非安定性（定理 2.2）の証明で用いた特性類を精密化して無限個の特性類を定義し，それらの $\mathbb{Z}/2$ 上での一次独立性を示すことによりなされる．一次独立性の証明では，定理 2.2 でも用いた多重写像トーラスを用いる．我々の証明における $H_k(B\mathrm{Diff}(X))$ の無限性は，楕円曲面 $E(n)$ が無限個のエキゾチック構造を持つこと（の Seiberg–Witten 理論による証明）に由来する．この無限性を使って多重写像トーラスを無限個構成する．それらをゲージ理論的特性類たちで evaluate することで一次独立性を示す，というのが証明の流れである．ここでもやはり，ゲージ理論的特性類が，モジュライ空間のホモロジーの無限性という形で，4 次元多様体の微分同相群の複雑さを捉えている．

どのような特性類が定式化されるのかをもう少し詳しく述べる．無限個の特性類は，$\mathrm{Spin}^c(X)$ を charge conjugation で割った $\mathrm{Spin}^c(X)/(\mathbb{Z}/2)$ への $\mathrm{Diff}^+(X)$ 作用の軌道で添え字付けされる．より一般に，$\mathrm{Diff}^+(X)$-不変な $\mathrm{Spin}^c(X)/(\mathbb{Z}/2)$ の部分集合 $\mathcal{S}$ が与えられるごとに，特性類

$$\mathbb{SW}^k(X,\mathcal{S}) \in H^k(B\mathrm{Diff}^+(X);\mathbb{Z}/2)$$

が定義される．

これらの特性類による evaluation を並べることで，準同型

$$\bigoplus_{\mathcal{S}} \langle \mathbb{SW}^k(X,\mathcal{S}), -\rangle : H_k(B\mathrm{Diff}^+(X)) \to \bigoplus_{\mathcal{S}} (\mathbb{Z}/2) \tag{3.1}$$

を得る．多くの状況で $\mathcal{S}$ は無限個ある．そこで，準同型 (3.1) が $\bigoplus_{\mathcal{S}}(\mathbb{Z}/2)$ に含まれる $(\mathbb{Z}/2)^{\oplus\mathbb{N}}$ のあるコピーの上への全射を与えると示せれば，$H_k(B\mathrm{Diff}^+(X))$ が無限生成と証明できるわけである．[34] における定理 3.6 の証明では，定理 2.2 と同様の計算で，準同型 (3.1) が上手く取った無限個の

$\mathcal{S}$ で生成される $\bigoplus_{\mathcal{S}}(\mathbb{Z}/2)$ の上への写像を与えることを示した．そのような $\mathcal{S}$ は，$E(n)$ の対数変換（これは $E(n)$ の無限個のエキゾチック構造を与える）から得られるもので，$\mathcal{S}$ の不変量である spin^c 構造の第 1 Chern 類の divisibility によって無限個の $\mathcal{S}$ が区別される．

Baraglia [5] による定理 3.5 の証明も，[34] の証明の $k=1$ の場合と実質同様の議論による．なお，この節で説明した無限性の結果の証明のほとんどは，Ruberman [64] による 4 次元多様体の Torelli 群の無限生成性の証明が雛形となっている．特に，4 次元多様体の無限個のエキゾチック構造を引き継いだ族を構成し，それを族のゲージ理論の不変量で見分けるという考え方は Ruberman に負う．その後の族のゲージ理論の発展の中で生まれた新しい不変量により，このような族の変種・一般化が様々な異なる文脈（微分同相群の高次ホモトピー群，分類空間のホモロジー群）で検出され，上のような種々の結果に繋がったのである．なお，Torelli 群についても，高次元・単連結の場合は Sullivan の結果 [67] から有限生成性が知られており，Ruberman [64] の結果も 4 次元特有の現象である．

4　Dehn ツイストとエキゾチックな微分同相写像

4.1　エキゾチックな微分同相写像

滑らかな多様体 X とその自己微分同相写像 $f : X \to X$ が与えられたとする．もし f が位相的には恒等写像にアイソトピックだが滑らかにはそうでないとき，すなわち f は $\mathrm{Homeo}(X)$ の単位元成分には属するが $\mathrm{Diff}(X)$ の単位元成分には属さないとき，f は**エキゾチックな微分同相写像**であるという．別の良い方をすれば，$\mathrm{Diff}(X) \hookrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$ が誘導する写像

$$\pi_0(\mathrm{Diff}(X)) \to \pi_0(\mathrm{Homeo}(X))$$

の核の非自明元を与えるような微分同相写像のことである．

境界付きの場合は次を考える．境界付き多様体 W に対して，$\mathrm{Diff}_\partial(W)$ の元であって，$\mathrm{Homeo}_\partial(W)$ を通して恒等写像にアイソトッピックだが $\mathrm{Diff}_\partial(W)$ を通してそうではないものを**相対的にエキゾチックな微分同相写像**と呼ぶことにしよう．別の言い方をすれば，自然な写像

$$\pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(W)) \to \pi_0(\mathrm{Homeo}_\partial(W))$$

の核の非自明元を与えるような微分同相写像のことである．

エキゾチック微分同相は，同相群と微分同相群のトポロジーの差の最も基本的なものと言えるだろう．高次元においてはこのような微分同相は古典的に良く知られている．例えば，高次元のエキゾチック球面 $\tilde{S}^{n+1}$ が与えられると，それは D^{n+1} ふたつのコピーを境界のある微分同相 $f : S^n \to S^n$ に沿って貼り合わせたものとして得られることが h-同境定理から分かる．$\tilde{S}^{n+1}$ のエキゾチック性から f のエキゾチック性が容易に従う．なお，3 次元以下では自然な写像 $\mathrm{Diff}(X) \hookrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$ は弱ホモトピー同値なので，4 次元がこのような現象が現れ得る最小の次元である．

4 次元多様体の上のエキゾチック微分同相の初めての例は Ruberman [63] により 1998 年に構成された．これは族に対するゲージ理論の初めてのトポロジカルな応用でもあり，本稿で述べた多くの結果の証明の雛形となる重要なものである．一方この数年は，それとは趣を異にする Dehn ツイストの 4 次元類似が盛んに研究されている．まずはその一部を紹介する．

なお，以下で現れるエキゾチック微分同相に関する結果で，位相的な範疇では恒等写像にアイソト

ピックであるという結果はもちろんゲージ理論と関係ない手法によるもので，Quinn [62]（閉 4 次元多様体）や Orson–Powell [60]（境界付き 4 次元多様体）の結果である．

4.2　Dehn ツイストの定義

Y を可微分多様体とし，恒等写像を基点とするループ $\phi : S^1 \to \mathrm{Diff}(Y)$ が与えられたとする．このとき，$Y \times [0,1]$ の境界を各点ごとに固定する微分同相写像が

$$Y \times [0,1] \to Y \times [0,1] \quad ; \quad (y,t) \mapsto (\phi(t)\cdot y, t) \tag{4.1}$$

で定義される．$Y = S^1$ として，ϕ を S^1 の自身への自然な作用から得られるループとすれば，これは 2 次元トポロジーで基本的な $S^1 \times [0,1]$ 上の Dehn ツイストに他ならない．

この微分同相を Y が 3 次元多様体の場合に考えよう．Y が 4 次元多様体 X に埋め込まれているとき，Y の管状近傍に上の微分同相 (4.1) を移植すれば，X 上の微分同相が得られる．これを **$\boldsymbol{X}$ 上の $\boldsymbol{Y}$ に沿った Dehn ツイスト**と呼ぼう．特に X が Y を境界に持つとき，境界のカラー近傍を $Y \times [0,1]$ と同一視して微分同相 (4.1) を移植すれば，これは $\mathrm{Diff}_\partial(X)$ の元となる．これを X の**境界 Dehn ツイスト**と呼ぶことにする．

4.3　S^3 に沿った Dehn ツイスト

一番簡単なのは $Y = S^3$ の場合である．この場合，$\pi_1(\mathrm{Diff}(S^3)) \cong \pi_1(\mathrm{SO}(4)) \cong \mathbb{Z}/2$ の生成元に対応するループを用いた Dehn ツイストを考えることができる．2020 年に，Kronheimer–Mrowka [47] は次を示した：

定理 4.1 (Kronheimer–Mrowka (2020) [47]). $K3\#K3$ の連結和の首に沿った Dehn ツイストはエキゾチック微分同相である．

証明は（非同変な）族の Bauer–Furuta 不変量が Dehn ツイストに対して非自明であることを示すことでなされる．Ruberman [63] の与えた 4 次元多様体のエキゾチック微分同相の初めての例は，エキゾチック 4 次元多様体を巧みに利用するものであった．その構成の材料には，Kirby 計算によって得られる 4 次元多様体の間の微分同相も含まれる．Dehn ツイストという一見単純に見える微分同相がエキゾチックになるという Kronheimer–Mrowka の結果は，専門家に驚きを与えた．Ruberman の構成が 4 次元多様体のエキゾチック性をうまく引き継いだ微分同相を構成するという性格であるのに対し，Dehn ツイストは少なくとも一見してそのような性格はなく，この意味でも本質的に異なるエキゾチック微分同相であると考えられる．

Kronheimer–Mrowka の結果のすぐ後に，Lin [53] は次を示した：

定理 4.2 (Lin (2020) [53]). $K3\#K3$ の連結和の首に沿った Dehn ツイストを $K3\#K3\#S^2 \times S^2$ 上に拡張したものもエキゾチック微分同相である．

Lin は，Dehn ツイストに対する Pin(2)-同変な族の Bauer–Furuta 不変量を計算することでこの結果を証明した．単連結 4 次元多様体上のエキゾチック微分同相の写像類は，有限回の安定化 ($S^2 \times S^2$ の連結和) で自明になることが知られている．しかし，それまでに知られていた例（Ruberman [63] と Baraglia–筆者 [8] の例）は一回の安定化で自明になっていた．Lin の結果は，単連結 4 次元多様体に関するエキゾチックな現象であって，安定化一回で生き残る初めての例を与えたものであり，これも専門家には驚きを持って迎えられた．

S^3 に沿った Dehn ツイストはその後も研究が続いている．例えば [61, 11] 参照．

4.4　Seifert ファイバー空間に沿った Dehn ツイスト

より広い例を考えるために自然な 3 次元多様体のクラスは Seifert ファイバー空間である．定義からそこには S^1-作用があり，この作用を用いた Dehn ツイストを考えることができる．S^3 は Seifert ファイバー空間としては特殊であり，S^3 の Seifert S^1-作用が定める $\mathrm{Diff}(S^3)$ の中のループは $\pi_1(\mathrm{Diff}(S^3))$ で自明となってしまい，非自明な Dehn ツイストを定め得ない．しかし S^3 以外の Seifert ファイバー空間 Y の場合には Seifert S^1-作用は $\pi_1(\mathrm{Diff}(Y))$ の中で非自明な元を定め ([60, Proposition 8.8])，潜在的に非自明な Dehn ツイストを与える可能性がある．

2023 年に，Mallick–谷口–筆者 [38] は，Seifert ファイバー空間に沿った Dehn ツイストがエキゾチック微分同相となる例を初めて与えた．その後 1 年あまりのいくつかの研究で，[38] の結果の一部は大きく一般化された：Kang–Park–谷口 [28], Lin–Mukherjee–Muñoz-Echániz–筆者 [36, 37], 宮澤 [56]．ここでは [28, 36, 37] の結果の一部を紹介する．

n 次元の境界付き可微分多様体 W に対し，n 次元円板の滑らかな埋め込み $D^n \hookrightarrow \mathrm{Int}(W)$ を固定すると，微分同相を恒等写像で拡張することで写像 $i : \mathrm{Diff}_\partial(D^n) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_\partial(W)$ が得られる．高次元では，W が可縮であれば，実はその微分同相群は i を通して円板の微分同相群とホモトピー的に差がないことが知られている（6 次元以上は [22], 5 次元は [44] による）：

定理 4.3 (Galatius–Randal-Williams (2023) [22], Krannich–Kupers (2024) [44]). W を可縮なコンパクト可微分多様体とし，$n := \dim W \geq 5$ と仮定する．このとき，任意の滑らかな埋め込み $D^n \hookrightarrow \mathrm{Int}(W)$ に対し，$i : \mathrm{Diff}_\partial(D^n) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_\partial(W)$ は弱ホモトピー同値写像である．

下の結果は，この高次元での結果と興味深い対比をなす：

定理 4.4 (K.–Lin–Mukherjee–Muñoz-Echániz (2024) [37]). Seifert ファイバー空間を境界に持つある可縮なコンパクト可微分 4 次元多様体 W で次の性質を満たすものが存在する：W の境界 Dehn ツイスト $\tau \in \mathrm{Diff}_\partial(W)$ の任意の冪 τ^n $(n \neq 0)$ は相対的にエキゾチックな微分同相であり，さらに D^4 に局所化しない．

定理 4.4 の W は，具体的な Mazur 多様体として与えることができる．ここで微分同相 $f \in \mathrm{Diff}_\partial(W)$ が D^4 に局所化するとは，ある埋め込み $D^4 \hookrightarrow \mathrm{Int}(W)$ に対して f の写像類が $i_* : \pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(D^4)) \to \pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(W))$ の像に属するときを言う．定理 4.4 は，境界 Dehn ツイストは D^4 から来ないという意味で複雑さを持つ微分同相であることを主張している．

D^4 への非局所化性から特に，$i : \mathrm{Diff}_\partial(D^4) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_\partial(W)$ は弱ホモトピー同値ではない．したがって定理 4.4 は，高次元での結果（定理 4.3）の 4 次元類似が成立しないことを，具体的な 4 次元多様体と微分同相で示すものである．なお定理 4.3 の 4 次元類似が成立しないことは，[37] とは異なる手法により，Krushkal–Mukherjee–Powell–Warren [49] によっても（明示的な 4 次元多様体と微分同相に対してではないが）[37] の直前に示されている．

非局所性の定理（定理 4.4）の証明は，Dehn ツイストに対する族の Seiberg–Witten 不変量の非自明性を示すことでなされる．D^4 に局所化したどんな微分同相に対しても，族の Seiberg–Witten 不変量は自明になることが分かることから，非局所化性が従う．ここでもやはり，ゲージ理論的不変量が微分同相の 4 次元特有の微妙な複雑さを上手く捉えていることが覗えるだろう．

なお，可縮な 4 次元多様体の上のエキゾチック Dehn ツイストの検出は Mallick–谷口–筆者 [38] によってはじめて行われたが，これは以下のように一般化された：

定理 4.5 (Kang–Park–谷口 (2024) [28]). W を可縮で滑らかなコンパクト 4 次元多様体とし，その境界が S^3 でない Brieskorn ホモロジー球面とする．このとき，W の境界 Dehn ツイスト τ_W は $\pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(W))$ で無限位数で，τ_W の任意の冪 τ_W^n $(n \neq 0)$ は相対的にエキゾチックな微分同相となる．

以上はトポロジカルな趣の定理であるが，次にシンプレクティック構造を利用することを考える．以下の定理から，Seifert ファイバー空間に沿った Dehn ツイストが，相対的にエキゾチックな微分同相の例を系統的に与えることが分かる：

定理 4.6 (K.–Lin–Mukherjee–Muñoz-Echániz (2024) [36]). Y を $b_1(Y) = 0$ な Seifert ファイバー空間とする．W を Y の標準的なコンタクト構造に対するコンパクトなシンプレクティック充填とする．もし W の交叉形式が負定値でないならば，W の境界 Dehn ツイスト τ_W は $\pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(W))$ で無限位数となる．さらに W が単連結ならば，τ_W の任意の冪 τ_W^n $(n \neq 0)$ は相対的にエキゾチックな微分同相となる．

W の交叉形式に関する仮定を落とすと容易に反例が作れる．例えば，Poincaré ホモロジー球面 $\Sigma(2,3,5)$ は標準的なやり方で負定値な $-E_8$ が交叉形式であるような 4 次元多様体 W の境界として現れる（W は後に見る Milnor ファイバーの一例である）．この W は S^1-同変な plumbing で得られることが知られており，その帰結として，$\Sigma(2,3,5)$ 上の標準的な S^1-作用は W に拡張する．この S^1-作用を用いれば，W の境界 Dehn ツイストが $\pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(W))$ で自明なことはただちに分かる．

定理 4.6 の証明は族の相対 Bauer–Furuta 不変量を用いた背理法である．仮に τ_W^n が恒等写像に（境界に対して相対的かつ）滑らかにアイソトピックであるとする．Kang–Park–谷口 [28] の議論を用いると，この仮定から，ある有限巡回群の分類空間の上の W をファイバーとする滑らかな族を構成することができる．これに対する族の相対 Bauer–Furuta 不変量を観察することで矛盾を導くのである．この矛盾は一言で言えば，Taubes によるシンプレクティック 4 次元多様体に対する Seiberg–Witten 不変量の非消滅定理 [68] と，Baraglia–Hekmati [7] による Floer ホモロジーの消滅定理から来る．後者は，Seifert ファイバー空間を十分位数の高い巡回群の標準的な作用で割って得られる 3 次元多様体の Floer ホモロジーの消滅であり，Némethi [59] による Floer ホモロジーの計算に基づくものである．これらの非消滅定理・消滅定理を繋いで矛盾させるためには，ゲージ理論とコンタクト構造に関わる比較的最近の進展である飯田 [25], 飯田–谷口 [27] の仕事も使われる．

4.5 Milnor ファイブレーションのモノドロミー

上のシンプレクティック充填に関する結果（定理 4.6）の系として，Milnor ファイブレーションのモノドロミーについての興味深い帰結を得ることができる．3 変数の複素多項式 $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ が与えられ，$f(0) = 0$ かつ原点を孤立特異点として持つとしよう．f を制限した

$$f : f^{-1}(B_\delta(\mathbb{C}) \setminus \{0\}) \cap B_\epsilon(\mathbb{C}^3) \to B_\delta(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \quad (1 \gg \epsilon \gg \delta > 0)$$

がファイバー束になるというのが古典的な Milnor のファイブレーション定理であった．このファイバー束を f の **Milnor ファイブレーション**と呼ぶ．そのファイバー (**Milnor ファイバー**) を M_f とおくと，ファイバー束のモノドロミー $\mu \in \pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(M_f))$ が Milnor ファイブレーションの最も重要な不変量である．μ のホモロジー $H_*(M_f)$ への作用は古典的に研究されてきたが，写像類自体を研究するのも自然であろう．

μ の写像類を調べるために多項式のクラスを少々限定する．f が weighted homogeneous とは，あ

る整数 $w_1, w_2, w_3, d > 0$ が存在し，

$$f(t^{w_1}z_1, t^{w_2}z_2, t^{w_3}z_3) = t^d f(z_1, z_2, z_3)$$

が任意の $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$, $t \in \mathbb{C}$ に対して成り立つときを言う．weighted homogeneous な多項式は，Brieskorn 型の特異点や ADE 特異点（を与える多項式）のような興味深いクラスを含んでいる．Brieskorn 型とは，$f(z_1, z_2, z_3) = z_1^{p_1} + z_2^{p_2} + z_3^{p_3}$ $(p_i \geq 2)$ の形の多項式で与えられる特異点であり，その Milnor ファイバーの境界に現れる Brieskorn 3 次元多様体は基本的なクラスの 3 次元多様体である．ADE 型特異点，あるいは有理二重点や du Val 特異点とも呼ばれるこのクラスは，$SL(2, \mathbb{C})$ のある有限部分群 Γ を用いて $\mathbb{C}^2/\Gamma$ と表される特異点であった．

ADE 特異点の場合には，Milnor ファイブレーションのモノドロミー μ は $\pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(M_f))$ の中で有限位数であることが分かる．これは Brieskorn [13] による古典的な同時特異点解消定理の帰結である．実は，逆にモノドロミーが有限位数となるのは，ADE 特異点のみであることが示せる：

定理 4.7 (K.–Lin–Mukherjee–Muñoz-Echániz (2024) [36]). $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ を weighted homogeneous な多項式とし，$f(0) = 0$ かつ原点を孤立特異点として持つと仮定する．f が ADE 特異点を与えるときまたそのときに限り，f の Milnor ファイブレーションのモノドロミー μ は $\pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(M_f))$ の中で有限位数である．

証明は，weighted homogeneous の場合，モノドロミーの適当な冪が境界 Dehn ツイストになることに注意し，定理 4.6 に帰着させることで得られる．多項式が ADE 型であるというのは，定理 4.6 における W の交叉形式が負定値なことに対応する．

定理 4.7 の位相的カテゴリーでの類似や高次元類似（すなわち多項式の変数を増やして得られる高次元の Milnor ファイブレーションに対する類似）を考えると，これらは共に成立しないことが分かる．（位相的カテゴリー類似については Orson–Powell [60], 高次元については Krannich–Randal-Williams [45] の結果の帰結である．）したがって定理 4.7 は，Milnor ファイブレーションのモノドロミーのような古典的な微分同相も，4 次元特有現象や位相的カテゴリーと可微分カテゴリーの差異を与えていることを示している．

4.6　既約な 4 次元多様体の上のエキゾチック微分同相

上では，Milnor ファイバーのような自然な境界付き 4 次元多様体上のエキゾチック微分同相を扱った．一方，エキゾチック微分同相が検出できる閉 4 次元多様体は，証明の都合上，連結和で作るものが多かった．例えば $4\mathbb{CP}\#21\overline{\mathbb{CP}}^2$ や $K3\#S^2 \times S^2$ [63, 8] といった形のものである．これらは，複素構造，シンプレクティック構造を持たず，エキゾチック構造を持つかも分からないものである．

一方，4 次元トポロジーで重要な 4 次元多様体の例の多くは複素曲面である．blow-down すると，そういったものは**既約な 4 次元多様体**，すなわち非自明な連結和分解を持たないものとなる[5)]．これが 4 次元トポロジーの building block であり，その上ではしばしば，エキゾチック構造，複素構造，シンプレクティック構造など，豊かな構造を考えられる．

既約な 4 次元多様体がエキゾチック微分同相を持ち得るかは 4 次元多様体の微分同相群に関する基本的な問いと見なされてきたが，最近そのような例が存在することが分かった：

定理 4.8 (Baraglia–K. (2024) [11]). 既約な閉 4 次元多様体であってエキゾチック微分同相を許容するものが存在する．

具体的には，minimal な単連結複素曲面（様々な楕円曲面や完全交叉）として例が与えられる．例えば，対数変換で得られる楕円曲面 $E(4n)_{p,q}$ $(n, p, q \geq 1$, ただし有限個の (p,q) を除く) や，$\mathbb{CP}^4$ を二本の方程式で切った完全交叉のおおよそ 1/4 が例となる．証明は，Baraglia と筆者が族の Bauer–Furuta 不変量から導出した滑らかな 4 次元多様体への制約 [9] と族の指数定理を用いる．

5　その他の事柄

5.1　族のゲージ理論のその他の応用

本稿では，族のゲージ理論の微分同相群への応用の，さらに最近の展開のうちごく一部を述べてきた．他にも触れるべきことは多くある．

5.1.1　4 次元多様体の滑らかな族への制約

本稿で述べていない大きな話題は，族のゲージ理論に基づく 4 次元多様体の滑らかな族への制約である．まず（族ではない）従来のゲージ理論の 4 次元トポロジーへの応用を振り返ると，大きく分けて二つの方法論がある：

(1) 一つは，本稿冒頭に既に説明した通り，ゲージ理論的偏微分方程式の解のモジュライ空間を数えることで 4 次元多様体の不変量を定義し，それを用いて 4 次元多様体を区別するというものである．（正確には，モジュライ空間だけでなく，ゲージ理論的方程式の有限次元近似を不変量として用いることもある．）この方法の典型例は，Donaldson 不変量 [17], Seiberg–Witten 不変量 [72], Bauer–Furuta 不変量 [12] を用いた研究である．

(2) もう一つは，モジュライ空間を調べることで，4 次元多様体の古典的な不変量，典型的には交叉形式に制約を見出すというものである．（正確には，モジュライ空間だけでなく，ゲージ理論的方程式の有限次元近似から制約を得ることもある．）この方法の典型例は，Donaldson の対角化定理 [16] や古田の 10/8 不等式 [19] である．

本稿でここまで説明してきたことは，(1) の族版であった．ここで注意したいことは (2) の族版である．

その基本的な考え方は次のようなものである．滑らかな 4 次元多様体 X ファイバーとする滑らかなファイバー束の上でゲージ理論的偏微分方程式の族を考える．これに伴うパラメトライズされたモジュライ空間，あるいはゲージ理論的方程式の有限次元近似の族を調べることで，ファイバー束の古典的な不変量に制約をかけるのである．ファイバー束の古典的な不変量とは，典型的には，ファイバー束のモノドロミーの交叉形式への作用である．

この制約を破るような位相的なファイバー束 $E \to B$ を構成することができれば，その構造群を同相群 $\mathrm{Homeo}(X)$ から $\mathrm{Diff}(X)$ に簡約できないことが従う．すなわち， E の分類写像を $\varphi_E : B \to B\mathrm{Homeo}(X)$ と書くとき，持ち上げ問題

$$\begin{tikzcd} & B\mathrm{Diff}(X) \arrow[d] \\ B \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\varphi_E"'] & B\mathrm{Homeo}(X) \end{tikzcd}$$

が解けないということである．障害理論から，これは $\mathrm{Homeo}(X)$ と $\mathrm{Diff}(X)$ にホモトピカルな差が

あることを意味する．このような族，すなわち滑らかになれない族をできるだけ多く検出することで，Homeo(X) と Diff(X) の差を下から評価していく，というのがアイデアである．

この方面では，加藤–中村–筆者 [29] の結果，Baraglia [3] の結果，Baraglia–筆者の結果 [9, 10], [3] の $\mathrm{Pin}^-(2)$-モノポール版である中村–筆者 [42] の結果，[3] の境界付き 4 次元多様体への拡張についての谷口–筆者 [43] の結果がある．特に Baraglia [3] の結果は，Donaldson の対角化定理の族版に相当するもので適用範囲が広く，その後も多くの応用に繋がった．

また，上のアイデアの Homeo(X) と Diff(X) のホモトピカルな比較以外の応用のひとつに，滑らかになれない群作用を検出することが挙げられる．一般に，群 G が多様体 X に作用しているとき，Borel 構成により G の分類空間上の X の族

$$EG \times_G X \to BG$$

が得られる．この族に族のゲージ理論由来の制約を適用することで，滑らかな G-作用への制約が得られる．この考え方で 4 次元多様体上の滑らかになれない作用を実際に検出した仕事に中村 [58], Baraglia [2] がある．

以上の事柄の一部は論説 [73] でより詳細に解説した．Baraglia [3] の結果や谷口–筆者 [43] の結果の [73] の以降の応用には [39, 38, 40] がある．これには，族とは一見関係のない応用，例えばエキゾチックな 4 次元多様体の検出や曲面や 3 次元多様体の 4 次元多様体へのエキゾチックな埋め込みの検出も含まれる．

5.1.2　2 次不変量的な応用

本稿で述べられなかった別の系統の応用は，ある種の 2 次不変量的な考え方で解釈することができるものである．すなわち，Seiberg–Witten 方程式の解の消滅定理があるときに，「消滅の理由のなす空間」のトポロジーの非自明性を調べることができる場合があるのである．例えば以下の諸結果は，明示的にそのような形で述べられていないものが多いが，2 次不変量的な考え方の下に理解することができる．

(1) Riemann 計量の族を用いた 4 次元多様体内の曲面配位への応用に関する筆者の結果 [30, 33]. これは，adjunction 不等式と呼ばれる 4 次元多様体に曲面の種数に関する不等式と関わる．この不等式を破る曲面の近傍を引き伸ばした Riemann 計量に関する Seiberg–Witten 方程式の解の消滅定理が知られている．（例えば [46] 参照．）この消滅定理を利用して，adjunction 不等式を破る曲面の配位に制約をかけることができるのである．

(2) Baraglia [6] や飯田–Mukherjee–谷口–筆者 [26] の 4 次元多様体内の曲面への応用，飯田–Mukherjee–谷口–筆者 [26] や Mukherjee–谷口–筆者 [41] の 4 次元多様体内の 3 次元多様体の埋め込みへの応用．これらも，adjunction 不等式を破る曲面やある特別な性質を満たす 3 次元多様体の近傍を引き伸ばした計量に対する Seiberg–Witten 方程式の解の消滅定理を利用するものである．そのような 3 次元多様体の典型例は，その Floer ホモロジーの主要部が消滅するようなもの（L-空間）として与えられる．

(3) より微分幾何的な応用には，正スカラー曲率計量の空間のトポロジーについての Ruberman の結果 [65], 筆者の結果 [31], Auckly–Ruberman の結果 [1] がある．正スカラー曲率計量に対する Seiberg–Witten 方程式の解の消滅定理は Witten [72] 以来よく知られており，それを利用することで

正スカラー曲率計量の空間のトポロジーが調べられる．

(4) 幾何構造と関わるところでは，シンプレクティック微分同相群と微分同相群の比較，あるいはシンプレクティック形式の空間についての Kronheimer の議論 [48]，Smirnov の [66] に始まる一連の結果，Lin [52] による結果がある．これらの結果は Taubes の消滅定理 [69] に基づく．シンプレクティック 4 次元多様体に対する Taubes による Seiberg–Witten 不変量の非消滅定理 [68] は著名であるが，これはシンプレクティック構造から決まる標準的な spin^c 構造に対して Seiberg–Witten 不変量が非自明であることを保証する定理である．標準的なものとは異なる spin^c 構造がある条件を満たすとき，Seiberg–Witten 方程式の解は，シンプレクティック形式を用いた Taubes の摂動の下で消滅することを Taubes は示した [69]．これを利用することで，シンプレクティック形式の空間のトポロジーを調べることができるのである．

5.2 Kontsevich 特性類

4 次元多様体の微分同相群に関する族のゲージ理論以外の最近の大きな流れは，渡邉忠之 [70] による 4 次元 Smale 予想の否定的解決 ($\mathrm{Diff}^+(S^4) \not\simeq \mathrm{SO}(5)$) という決定的な仕事に端を発する．これはゲージ理論とは全く別系統の道具である Kontsevich 特性類を用いるもので，その後も多くの進展がある．

[70] 以降の展開のうち特に興味深いものとして，Kontsevich 特性類が「形式的に滑らか」(formally smooth) なファイバー束に対しても well-defined であることを示した Lin–Xie [54] の仕事に触れたい．彼らの結果から導かれる標語を一言で言えば，『Kontsevich 特性類は 4 次元多様体のモジュライ空間の中に出現する高次元と類似する部分を検出しており，族のゲージ理論は 4 次元特有の現象を検出している』ということである．このように，Kontsevich 特性類と族のゲージ理論の射程が相補的であることを [54] の結果は示唆する．

これをもう少し詳しく述べるためにいくつか言葉を用意する．まず，n 次元位相多様体 X がファイバーの位相的なファイバー束 E 上の形式的に滑らかな構造とは，E の垂直マイクロ接束 $\tau_v E$ を $\mathrm{Homeo}(\mathbb{R}^n)$ が構造群のファイバー束とみなしたとき（Kister–Mazur の定理），その直交群 $O(n)$ への簡約のことをいう．直感的には，垂直接束のレベルでは滑らかなファイバー束のようになっているということである．形式的に滑らかなファイバー束を分類する空間 $\mathcal{M}^{fs}(X)$ を比較的容易に定義することができ，これを形式的に滑らかなモジュライ空間という．大まかにいえば $\mathcal{M}^{fs}(X)$ は

$$E\mathrm{Homeo}(X) \times_{\mathrm{Homeo}(X)} \{\text{reductions of } \tau X \text{ to } O(n)\}$$

として定義される．ここで τX は X のマイクロ接束である．もちろん滑らかなファイバー束には形式的に滑らかなファイバー束の構造が入り，したがって滑らかなモジュライ空間 $\mathcal{M}^{sm}(X) = B\mathrm{Diff}(X)$ からの忘却写像

$$\mathcal{M}^{sm}(X) \to \mathcal{M}^{fs}(X)$$

がある．さらに，形式的に滑らかな構造を忘れることで，位相的なモジュライ空間 $\mathcal{M}^{top}(X) = B\mathrm{Homeo}(X)$ への忘却写像

$$\mathcal{M}^{fs}(X) \to \mathcal{M}^{top}(X)$$

もある．このように，忘却写像 $\mathcal{M}^{sm}(X) \to \mathcal{M}^{top}(X)$ は $\mathcal{M}^{fs}(X)$ を経由する

$$\mathcal{M}^{sm}(X) \to \mathcal{M}^{fs}(X) \to \mathcal{M}^{top}(X)$$

という形に分解できる．4 次元以外では，smoothing theory から，$\mathcal{M}^{sm}(X) \to \mathcal{M}^{fs}(X)$ が弱ホモトピー同値であると知られている．そのため，4 次元以外での $\mathcal{M}^{sm}(X)$ と $\mathcal{M}^{top}(X)$ の差は，全て $\mathcal{M}^{fs}(X) \to \mathcal{M}^{top}(X)$ から来ていることになる．

Lin–Xie [54] の結果は，$X = D^4$ に対してアプリオリには滑らかなモジュライ空間 $\mathcal{M}^{sm}(X)$ の上で定義されていた Kontsevich 特性類から得られる不変量[6)] が，実は形式的に滑らかなモジュライ空間 $\mathcal{M}^{fs}(X)$ からのある不変量を経由する，というものである．このことから，渡邉 [70] が検出していた $B\mathrm{Diff}(X) = \mathcal{M}^{sm}(X)$ と $B\mathrm{Homeo}(X) = \mathcal{M}^{top}(X)$ のホモトピカルな差は，実は $\mathcal{M}^{fs}(X) \to \mathcal{M}^{top}(X)$ のホモトピカルな差であると分かる．すなわち，渡邉の結果は，4 次元以外と同様の形で $\mathcal{M}^{sm}(X)$ と $\mathcal{M}^{top}(X)$ の差を検出しているということになる．

一方で，本稿で繰り返し述べてきたゲージ理論的特性類は $\mathcal{M}^{sm}(X)$ 上のコホモロジー類として定式化されるが，これが多くの具体例に対して $\mathcal{M}^{fs}(X)$ から来ていないこと，すなわち自然な写像 $H^*(\mathcal{M}^{fs}(X)) \to H^*(\mathcal{M}^{sm}(X))$ の像に属していないことが示せる．この簡単な帰結として，ゲージ理論的特性類で検出できる $B\mathrm{Diff}(X) = \mathcal{M}^{sm}(X)$ と $B\mathrm{Homeo}(X) = \mathcal{M}^{top}(X)$ のホモトピカルな差は，実は $\mathcal{M}^{sm}(X) \to \mathcal{M}^{fs}(X)$ のホモトピカルな差という，4 次元特有のものであることが従うのである．

6　今後の課題・展望

4 次元多様体の微分同相群のゲージ理論的研究には，まだ多くの問題が残っている．

モジュライ空間のホモロジー $H_*(B\mathrm{Diff}(X))$ については，現状族のゲージ理論で検出している元は全て捻れ元である．$\mathbb{Q}$ 係数でも同様の結果（ホモロジー的非安定性，無限生成性）の成立が期待される．

現在未開拓の事柄としては，$\mathrm{Diff}(X)$ の代数構造について，4 次元特有の現象はまだ見つかっていない．$\mathrm{Diff}(X)$ の代数構造をゲージ理論的に調べることでそのような現象を見出すことができるかは興味深い問題である．

また，既約な 4 次元多様体上でエキゾチック微分同相が見つかった（定理 4.8）以上，今後は 4 次元多様体のエキゾチック構造，複素構造，シンプレクティック構造などの諸構造と微分同相群の間の関係がより詳細に調べられる可能性がある．

また 5.2 節に述べた通り，Kontsevich 特性類と族のゲージ理論による 4 次元多様体の微分同相群の相補的な研究が今後も進んでいくと思われる．

4 次元以外の微分同相群の研究の歴史を振り返ると，4 次元多様体の微分同相群も，これからもずっと興味の尽きない対象であろう．その研究はまだ始まったばかりのはずである．現時点では予想もできない展開が今後も起きることを期待しつつ筆を擱く．

注　釈

1)　[32] では，spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ を保つ微分同相群 $\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s})$ を考え，$H^*(B\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s}))$ の元 $\mathbb{SW}^*(X,\mathfrak{s})$ を Seiberg–Witten 方程式の族を用いて定義した．$\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s})$ ではなく $\mathrm{Diff}^+(X)$ 全体を扱うために [65]

のアイデアを少し改変したものを使う．[65] では，$\mathfrak{s}$ を保つとは限らない微分同相 $f \in \mathrm{Diff}^+(X)$ に対し，数値的不変量 $\mathrm{SW}(X, f, \mathfrak{s}) \in \mathbb{Z}/2$ (f によっては $\mathrm{SW}(X, f, \mathfrak{s}) \in \mathbb{Z}$) が定義されている．$\mathrm{SW}(X, f, \mathfrak{s})$ は $\{(f^n)^*\mathfrak{s}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の形の spin^c 構造全てに関する Seiberg–Witten 方程式を考えることで定義される．一方 [35] で定義した特性類の定義では，（固定された形式次元を持つ）spin^c 構造を全てに関する Seiberg–Witten 方程式を考えるのである．$\mathrm{SW}(X, f, \mathfrak{s})$ は f の合成に関して準同型にならないが，全ての spin^c 構造を考えることで準同型性を獲得し，$B\mathrm{Diff}^+(X)$ 上のコホモロジー類が得られるのである．

2) M が満たすべき性質を簡単に述べると，M のシンプレクティック構造から来る spin^c 構造以外の spin^c 構造たちに対する Seiberg–Witten 不変量の総和が (charge conjugation で割った後でも) mod 2 で 0 になる，というような性質である．

3) [67] では 5 次元の場合が明示的に主張されていないが，5 次元でも同様の主張の成立が知られている．

4) 最近 [62] のギャップが [20] で指摘され，同論文でそのギャップが埋められた．

5) 正確には，閉 4 次元多様体 X が既約とは，$X = X_1 \# X_2$ と書けるならば X_i の少なくとも一方はホモトピー S^4 であるというときを言う．

6) 正確には境界を相対的にした設定を考える

文　献

[1] Dave Auckly and Daniel Ruberman. Families of diffeomorphisms, embeddings, and positive scalar curvature metrics via Seiberg-Witten theory. arXiv:2501.11892, 2025.

[2] David Baraglia. Obstructions to smooth group actions on 4-manifolds from families Seiberg-Witten theory. Adv. Math., 354:106730, 32, 2019.

[3] David Baraglia. Constraints on families of smooth 4-manifolds from Bauer-Furuta invariants. Algebr. Geom. Topol., 21(1):317–349, 2021.

[4] David Baraglia. Non-trivial smooth families of $K3$ surfaces. Math. Ann., 387(3-4):1719–1744, 2023.

[5] David Baraglia. On the mapping class groups of simply-connected smooth 4-manifolds. arXiv:2310.18819, 2023.

[6] David Baraglia. An adjunction inequality obstruction to isotopy of embedded surfaces in 4-manifolds. Math. Res. Lett., 31(2):329–352, 2024.

[7] David Baraglia and Pedram Hekmati. Brieskorn spheres, cyclic group actions and the Milnor conjecture. J. Topol., 17(2):Paper No. e12339, 40, 2024.

[8] David Baraglia and Hokuto Konno. A gluing formula for families Seiberg-Witten invariants. Geom. Topol., 24(3):1381–1456, 2020.

[9] David Baraglia and Hokuto Konno. On the Bauer-Furuta and Seiberg-Witten invariants of families of 4-manifolds. J. Topol., 15(2):505–586, 2022.

[10] David Baraglia and Hokuto Konno. A note on the Nielsen realization problem for $K3$ surfaces. Proc. Amer. Math. Soc., 151(9):4079–4087, 2023.

[11] David Baraglia and Hokuto Konno. Irreducible 4-manifolds can admit exotic diffeomorphisms. arXiv:2412.14398, 2024.

[12] Stefan Bauer and Mikio Furuta. A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. I. Invent. Math., 155(1):1–19, 2004.

[13] E. Brieskorn. Singular elements of semi-simple algebraic groups. In Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2, pages 279–284. Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1971.

[14] Ryan Budney and David Gabai. Knotted 3-balls in S^4. arXiv:1912.09029, 2021.

[15] Mauricio Bustamante, Manuel Krannich, and Alexander Kupers. Finiteness properties of automorphism spaces of manifolds with finite fundamental group. arXiv:2103.13468, 2023.

[16] S. K. Donaldson. An application of gauge theory to four-dimensional topology. J. Differential Geom., 18(2):279–315, 1983.

[17] S. K. Donaldson. Polynomial invariants for smooth four-manifolds. Topology, 29(3):257–315, 1990.

[18] Michael Hartley Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. J. Differential Geometry, 17(3):357–453, 1982.

[19] M. Furuta. Monopole equation and the $\frac{11}{8}$-conjecture. Math. Res. Lett., 8(3):279–291, 2001.

[20] David Gabai, David T. Gay, Daniel Hartman, Vyacheslav Krushkal, and Mark Powell. Pseudo-isotopies of simply connected 4-manifolds. arXiv:2311.11196, 2023.

[21] Søren Galatius and Oscar Randal-Williams. Homological stability for moduli spaces of high dimensional manifolds. I. J. Amer. Math. Soc., 31(1):215–264, 2018.

[22] Søren Galatius and Oscar Randal-Williams. The Alexander trick for homology spheres. Int. Math. Res. Not. IMRN, (24):14689–14703, 2024.

[23] John L. Harer. Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces. Ann. of Math. (2), 121(2):215–249, 1985.

[24] A. E. Hatcher. Concordance spaces, higher simple-homotopy theory, and applications. In Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 1, volume XXXII of Proc. Sympos. Pure Math., pages 3–21. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1978.

[25] Nobuo Iida. A Bauer-Furuta-type refinement of Kronheimer and Mrowka's invariant for 4-manifolds with contact boundary. Algebr. Geom. Topol., 21(7):3303–3333, 2021.

[26] Nobuo Iida, Hokuto Konno, Anubhav Mukher-

jee, and Masaki Taniguchi. Diffeomorphisms of 4-manifolds with boundary and exotic embeddings. Math. Ann., 391(2):1845–1897, 2025.

[27] Nobuo Iida and Masaki Taniguchi. Seiberg-Witten Floer homotopy contact invariant. Studia Sci. Math. Hungar., 58(4):505–558, 2021.

[28] Sungkyung Kang, JungHwan Park, and Masaki Taniguchi. Exotic Dehn twists and homotopy coherent group actions. arXiv:2409.11806, 2024.

[29] Tsuyoshi Kato, Hokuto Konno, and Nobuhiro Nakamura. Rigidity of the mod 2 families Seiberg-Witten invariants and topology of families of spin 4-manifolds. Compos. Math., 157(4):770–808, 2021.

[30] Hokuto Konno. Bounds on genus and configurations of embedded surfaces in 4-manifolds. J. Topol., 9(4):1130–1152, 2016.

[31] Hokuto Konno. Positive scalar curvature and higher-dimensional families of Seiberg-Witten equations. J. Topol., 12(4):1246–1265, 2019.

[32] Hokuto Konno. Characteristic classes via 4-dimensional gauge theory. Geom. Topol., 25(2):711–773, 2021.

[33] Hokuto Konno. A cohomological Seiberg-Witten invariant emerging from the adjunction inequality. J. Topol., 15(1):108–167, 2022.

[34] Hokuto Konno. The homology of moduli spaces of 4-manifolds may be infinitely generated. Forum Math. Pi, 12:Paper No. e25, 2024.

[35] Hokuto Konno and Jianfeng Lin. Homological instability for moduli spaces of smooth 4-manifolds. arXiv:2211.03043, 2022.

[36] Hokuto Konno, Jianfeng Lin, Anubhav Mukherjee, and Juan Muñoz-Echániz. The monodromy diffeomorphism of weighted singularities and Seiberg–Witten theory. arXiv:2411.12202, 2024.

[37] Hokuto Konno, Jianfeng Lin, Anubhav Mukherjee, and Juan Muñoz-Echániz. On four-dimensional Dehn twists and Milnor fibrations. arXiv:2409.11961, 2024.

[38] Hokuto Konno, Abhishek Mallick, and Masaki Taniguchi. Exotic Dehn twists on 4-manifolds. arXiv:2306.08607, 2023.

[39] Hokuto Konno, Abhishek Mallick, and Masaki Taniguchi. From diffeomorphisms to exotic phenomena in small 4-manifolds. arXiv:2304.05997, 2023.

[40] Hokuto Konno, Abhishek Mallick, and Masaki Taniguchi. Exotically knotted closed surfaces from Donaldson's diagonalization for families. arXiv:2409.07287, 2024.

[41] Hokuto Konno, Anubhav Mukherjee, and Masaki Taniguchi. Exotic codimension-1 submanifolds in 4-manifolds and stabilizations. arXiv:2210.05029, 2022.

[42] Hokuto Konno and Nobuhiro Nakamura. Constraints on families of smooth 4-manifolds from $\mathrm{Pin}^-(2)$-monopole. Algebr. Geom. Topol., 23(1):419–438, 2023.

[43] Hokuto Konno and Masaki Taniguchi. The groups of diffeomorphisms and homeomorphisms of 4-manifolds with boundary. Adv. Math., 409:Paper No. 108627, 58, 2022.

[44] Manuel Krannich and Alexander Kupers. ∞-operadic foundations for embedding calculus. arXiv:2409.10991, 2024.

[45] Manuel Krannich and Oscar Randal-Williams. Diffeomorphisms of discs and the second weiss derivative of btop(-). arXiv:2109.03500, 2021.

[46] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka. The genus of embedded surfaces in the projective plane. Math. Res. Lett., 1(6):797–808, 1994.

[47] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka. The Dehn twist on a sum of two $K3$ surfaces. Math. Res. Lett., 27(6):1767–1783, 2020.

[48] Peter Kronheimer. Some non-trivial families of symplectic structures. preprint.

[49] Vyacheslav Krushkal, Anubhav Mukherjee, Mark Powell, and Terrin Warren. Corks for exotic diffeomorphisms. arXiv:2407.04696, 2024.

[50] Alexander Kupers. Proving homological stability for homeomorphisms of manifolds. arXiv:1510.02456, 2016.

[51] Alexander Kupers. Some finiteness results for groups of automorphisms of manifolds. Geom. Topol., 23(5):2277–2333, 2019.

[52] Jianfeng Lin. The family Seiberg-Witten invariant and nonsymplectic loops of diffeomorphisms. arXiv:2208.12082, 2022.

[53] Jianfeng Lin. Isotopy of the Dehn twist on $K3 \# K3$ after a single stabilization. Geom. Topol., 27(5):1987–2012, 2023.

[54] Jianfeng Lin and Yi Xie. Configuration space integrals and formal smooth structures. arXiv:2310.14156, 2023.

[55] Ib Madsen and Michael Weiss. The stable moduli space of Riemann surfaces: Mumford's conjecture. Ann. of Math. (2), 165(3):843–941, 2007.

[56] Jin Miyazawa. Boundary Dehn twists on Milnor fibers and Family Bauer–Furuta invariants. arXiv:2410.21742, 2024.

[57] Nobuhiro Nakamura. The Seiberg-Witten equations for families and diffeomorphisms of 4-manifolds. Asian J. Math., 7(1):133–138, 2003.

[58] Nobuhiro Nakamura. Smoothability of $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-actions on 4-manifolds. Proc. Amer. Math. Soc., 138(8):2973–2978, 2010.

[59] András Némethi. On the Ozsváth-Szabó invariant of negative definite plumbed 3-manifolds. Geom. Topol., 9:991–1042, 2005.

[60] Patrick Orson and Mark Powell. Mapping class groups of simply connected 4-manifolds with

boundary. arXiv:2207.05986, 2022.

[61] Haochen Qiu. The Dehn twist on a connected sum of two homology tori. arXiv:2410.02461, 2024.

[62] Frank Quinn. Isotopy of 4-manifolds. J. Differential Geom., 24(3):343–372, 1986.

[63] Daniel Ruberman. An obstruction to smooth isotopy in dimension 4. Math. Res. Lett., 5(6):743–758, 1998.

[64] Daniel Ruberman. A polynomial invariant of diffeomorphisms of 4-manifolds. In Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998), volume 2 of Geom. Topol. Monogr., pages 473–488. Geom. Topol. Publ., Coventry, 1999.

[65] Daniel Ruberman. Positive scalar curvature, diffeomorphisms and the Seiberg-Witten invariants. Geom. Topol., 5:895–924, 2001.

[66] Gleb Smirnov. From flops to diffeomorphism groups. Geom. Topol., 26(2):875–898, 2022.

[67] Dennis Sullivan. Infinitesimal computations in topology. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (47):269–331, 1977.

[68] Clifford Henry Taubes. The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms. Math. Res. Lett., 1(6):809–822, 1994.

[69] Clifford Henry Taubes. More constraints on symplectic forms from Seiberg-Witten invariants. Math. Res. Lett., 2(1):9–13, 1995.

[70] Tadayuki Watanabe. Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of $\mathrm{Diff}(S^4)$. arXiv:1812.02448, 2018.

[71] Tadayuki Watanabe. Theta-graph and diffeomorphisms of some 4-manifolds. arXiv:2005.09545, 2023.

[72] Edward Witten. Monopoles and four-manifolds. Math. Res. Lett., 1(6):769–796, 1994.

[73] 今野北斗．族のゲージ理論．『数学』論説，to appear.

(こんの　ほくと・東京大学大学院数理科学研究科)