

族のゲージ理論

今 野 北 斗

1 序：4次元における Diff vs. Homeo

本稿の目的は、4次元多様体の滑らかな族に対してゲージ理論を展開する「族のゲージ理論」およびその4次元多様体の微分同相群・同相群の比較への応用を紹介することである。まずこの節では、考察する具体的な問題を述べ、他の次元と比較したその位置づけを行う。

1.1 主たる問い

本稿で紹介する結果の多くは、以下の問1に対する答えとして述べる事ができる：

問1 X を可微分4次元多様体とする。微分同相群から同相群への自然な包含写像

$$\mathrm{Diff}(X) \hookrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$$

は弱ホモトピー同値写像であるか？またもしそうでないなら、 n 次ホモトピー群への誘導写像

$$\pi_n(\mathrm{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\mathrm{Homeo}(X)) \quad (1.1)$$

はいかなる n に対して同型でないか？もし n に対して同型でないなら、成立しないのは単射性・全射性・その両方のどれか？

問1は、4次元多様体をファイバーとするファイバー束（以下4次元多様体バンドル）の分類問題において、位相的カテゴリーと可微分カテゴリーとで差が出る部分に注目し、自己同型群 $\mathrm{Homeo}(X)$ 、 $\mathrm{Diff}(X)$ の言葉で記述したものである。これは微分トポロジーにおいて最も古典的である次の問題のファイバー束版とみなすことができる。すなわち、エキゾチックな多様体のペアを見つけること、可微分構造を許容しない位相多様体 (non-smoothable topological manifold) を見つけることである。どちらも微分トポロジーの成立そのものと密接に関わる基本的問題で、4次元においては、可微分多様体上で物理由来の偏微分方程式を考察するゲージ理論がその解明に強力な手段を提供することが知られている。これらの問題の族版あるいはファイバー束版は何だろうか。共通の可微分多様体 X をファイバーとする共通の底空間 B 上の二つのファイバー束が「族としてエキゾチック」であるということ、位相的バンドルとしては同型だが滑らかなバンドルとしては同型でないときと定義してみよう。もし $(n+1)$ 次元球面を底空間 B とするような X のエキゾチックな族のペアが存在するならば、これは写像 (1.1) が単射でないことを意味する。また、可微分多様体 X をファイバーとする位相的ファイバー束が「non-smoothable な族」であるということ、その構造群が $\mathrm{Homeo}(X)$ から $\mathrm{Diff}(X)$ に簡約しないことと定義してみよう。 $(n+1)$ 次元球面を底空間とする X の non-smoothable な族の存在は、写像 (1.1) が全射でないことを意味する。

1.2 他の次元との比較

問1と同様の問は、当然4以外の次元でも考えることができる。なぜ4次元を特に考えたいのかを説明するため、他の次元との比較を行いたい。よく知られているように、標語的には、3以下の次元

1 のトポロジーにおいては位相的カテゴリーと可微分カテゴリーには本質的な差がない。(例えば, 3 以
2 下の次元の任意の位相多様体には, 可微分多様体の構造が同型を除き一意に入る. [128, 114, 60] 等
3 参照.) 一方, 4 以上の全ての次元では, 位相的カテゴリーと可微分カテゴリーには差がある。(例え
4 ば, 4 以上の任意の次元で, 可微分構造が入らない位相多様体が存在する. [132, 1.8.4 Corollary] 等
5 参照.) 実は, 3 以下の次元では, この標語が自己同型群のレベルでも次の意味で成立することが知ら
6 れている (例えば [36, 55] 参照): 次元が 3 以下の任意の向き付け可能な閉可微分多様体 X に対して,
7 包含写像 $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ は弱ホモトピー同値写像である. すなわち, 問 1 と同様の問を 3 以
8 下の次元で考えると, 最初の問 ($\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ は弱ホモトピー同値写像か?) への答えは常
9 に Yes なのである. 対照的に, 高次元においては, この包含写像が弱ホモトピー同値写像にならない
10 多様体の例は数多く知られている. (例えば, エキゾチック球面が存在する 5 以上の次元の一つ下の次
11 元の球面は, そのような多様体の例である. [113] Part 1 の最初の小節などを見よ.) そうなると, 位
12 相的カテゴリーと可微分カテゴリーの間にはじめて差が出る 4 次元においてどうなるのかを問いたく
13 なるのは自然であろう. しかし, 包含写像 $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ が実際に弱ホモトピー同値になら
14 ないと示された 4 次元多様体 X の例は, これまでわずかしかなかったのである.

15 1.3 族のゲージ理論とその応用

16 この状況を打破する道具が族のゲージ理論である. その方法論を一言で述べると, 4 次元多様体バン
17 ドルに沿って, ゲージ理論で扱われる偏微分方程式の連続族を考え, そこから特性類のような不変量
18 を構成したり, ファイバー束の構造群が微分同相群であることに由来する制約を得る, というもので
19 ある. ゲージ理論は 4 次元多様体の微分構造に鋭敏に反応する道具だったわけだが, このストーリー
20 をファイバー束にまで拡張することで, 滑らかなファイバー束と位相的なファイバー束との違いを見
21 分ける, というのがアイデアである.

22 ゲージ理論の低次元トポロジーへの応用には Donaldson [29] 以来既に 40 年近い歴史があるが, 4
23 次元多様体の族にゲージ理論を展開し, 4 次元多様体の微分同相群への応用が組織的になされるよう
24 になったのは, 比較的最近のことである. 90 年代末から今世紀初等にかけての Ruberman の先駆的
25 な結果 [129, 130, 131] とその直後の中村信裕の結果 [118], 2010 年の中村信裕の結果 [120] を除き,
26 族に対するゲージ理論のトポロジーへの応用は長いこと未開拓だった. 筆者は修士論文 [74] のときよ
27 り族のゲージ理論に興味を持ち, 以来その基礎固めとトポロジー・微分幾何への応用に取り組んでい
28 るが, その後筆者以外にも様々な数学者が族のゲージ理論の研究を行い, わずかこの 5 年ほどの間に
29 数多くの豊かな成果が挙げられている [74, 75, 76, 8, 15, 16, 81, 10, 9, 80, 89, 103, 135, 136, 77, 65,
30 14, 11, 12, 137, 104]. 特に問 1 に対する筆者を含めた複数のグループによるアプローチがあり, 包
31 含写像 $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ が実際に弱ホモトピー同値にならないと判明した 4 次元多様体 X の
32 例が急増した. 現時点では, 標語的には「ほとんどの」単連結閉 4 次元多様体がそのようなものでは
33 ないかという状況となっており, 精密化された問題へのアプローチや境界付き 4 次元多様体への拡張
34 が進んでいる. 以上の最近の動向をサーベイすることが本稿の主目的である.

35 1.4 本稿の構成

36 本稿の構成は以下の通りである. まず 2 節では, 4 次元多様体の微分同相群・同相群のホモトピカ
37 ルな比較として述べられる結果, すなわち問 1 への答えとして現時点で知られている事実をまとめる.
38 3 節以降は, 2 節で述べる結果の証明で使われるゲージ理論的な道具立ての解説となる. 3 節では, 族

1 のゲージ理論に入るための準備として、従来のゲージ理論を非専門家向けに解説する．4 節で、族の
 2 ゲージ理論の基本的な考え方の説明に入る．5 節が本稿のゲージ理論的な説明の中心で、族に対する
 3 Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似の具体的な議論と、4 次元多様体の滑らかな族に実際にどのよ
 4 うな制約が得られるのかを解説する．6 節では、本稿で書くことのできなかった族のゲージ理論に関
 5 するいくつかの話題に触れ、最後の 7 節においていくつかの問題を挙げる．

6 1.5 記号

7 本稿を通して用いる記号を列挙しておく．向き付けられた位相閉 4 次元多様体 X に対して、交叉
 8 形式に関して正定値・負定値な $H^2(X; \mathbb{R})$ の部分空間の最大次元をそれぞれ $b^+(X), b^-(X)$ と書くこ
 9 とにし、 X の符号数を $\sigma(X)$ と書くことにする．すなわち $\sigma(X) = b^+(X) - b^-(X)$ である．また逆
 10 の向きを付与した X のことを $-X$ と書き、 X の n 個のコピーの連結和を nX と書く． $K3$ 曲面の
 11 underlying な可微分多様体 ([73] よりこれは一意的である) を $K3$ と書く．

12 また既に用いたが、位相多様体 X の同相群を $\text{Homeo}(X)$ 、可微分多様体 X の微分同相群を $\text{Diff}(X)$
 13 と書く．それぞれ C^0 級位相、 C^∞ 級位相が入っているものとする．(従って集合としての包含写像
 14 $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ は、連続写像ではあるが位相空間としての包含写像ではない．) また X が向
 15 き付けられているとき、 X の向きを保つ同相群、微分同相群をそれぞれ $\text{Homeo}^+(X), \text{Diff}^+(X)$ と
 16 書く．ただし、 X が向き付けられた閉 4 次元多様体で符号数が非自明な場合は、向きを裏返す自己同
 17 相写像は存在しない(向きを裏返す自己同相写像は符号数の符号を変えるため)．したがってこの場合

$$18 \quad \text{Homeo}^+(X) = \text{Homeo}(X), \quad \text{Diff}^+(X) = \text{Diff}(X)$$

19 であることに注意する．また、空間 X をファイバーとする底空間 B 上のファイバー束 E を、ファイ
 20 バーと底空間を明示するためにしばしば $X \rightarrow E \rightarrow B$ と書く．

21 2 4 次元における Diff vs. Homeo の結果

22 この節では、4 次元多様体 X の微分同相群・同相群について、自然な写像 $\pi_n(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X))$ ■
 23 による両者の比較として述べられる結果、すなわち問 1 への答えとして現時点で知られている事実を
 24 まとめる．必ずしも時系列順ではなくなるが、2.4 節までで $\pi_n(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X))$ の非全
 25 射性・非単射性に関する結果を列挙する．2.4 節の結果は non-smoothable な族を族のゲージ理論で
 26 detect するというアイデアに基づく．このアイデアに関するその他の諸結果を 2.5 節以降にまとめる．
 27 微分同相群・同相群の比較に関する具体的な結果を述べるのが主眼であるが、純粋にトポロジカル
 28 な議論に関係する事柄もこの節の中で述べる．ゲージ理論の中身の説明は後に続く節で行うこととし、
 29 この節の中では、証明に使うゲージ理論的な道具が何かということのみ付言することにする．

30 2.1 古典的結果

31 最初に 4 次元多様体の微分同相群・同相群に対する古典的結果をまとめておく．まず記号を用意
 32 する．向き付けられた閉 4 次元(位相あるいは可微分)多様体 X に対して、交叉形式が付与され
 33 た $H^2(X; \mathbb{Z})/\text{torsion}$ の自己同型群を $\text{Aut}(H^2(X; \mathbb{Z}))$ と書くことにする．(以下では $H^2(X; \mathbb{Z})$ に
 34 torsion がない場合(例えば X が単連結)のみを扱う．) 次の Wall の結果は基本的である：

35 **定理 2.1 (Wall [141] (1964))** M を向き付けられた滑らかな単連結閉 4 次元多様体とする．次の
 36 二つの条件の少なくとも一方が満たされていると仮定する：(i) M の交叉形式は不定値、(ii) $b_2(M) \leq$

8. このとき、自然な写像

$$\pi_0(\mathrm{Diff}^+(M \# S^2 \times S^2)) \rightarrow \mathrm{Aut}(H^2(M \# S^2 \times S^2; \mathbb{Z}))$$

は全射である.

Wall の定理が使えない範囲では, $\pi_0(\mathrm{Diff}^+(X)) \rightarrow \mathrm{Aut}(H^2(X; \mathbb{Z}))$ の像の決定は難しい問題である. 特別な場合として $K3$ 曲面に対しては, 松本堯生の結果 [112] と Donaldson の結果 ([31], 定理 2.4) を合わせて完全に決定できる. ($A \in \mathrm{Aut}(H^2(K3; \mathbb{Z}))$ が $\pi_0(\mathrm{Diff}^+(K3)) \rightarrow \mathrm{Aut}(H^2(K3; \mathbb{Z}))$ の像に入ることは, A が $H^2(K3; \mathbb{R})$ の正定値 3 次元部分空間 $H^+(K3)$ の向きを保つことと同値になる.)

交叉形式の自己同型群はある程度様子の分かるものだが, 実は単連結な場合にはこれが位相的写像類群と同型であるという驚くべき結果が次である. 標語的には, 「単連結位相 4 次元多様体は交叉形式で「ほぼ」決まる¹⁾」という Freedman 理論 [39] の写像類群版だと思えることができる:

定理 2.2 (Quinn [127], Perron [126] (共に 1986)) X を単連結で向き付けられた位相閉 4 次元多様体とする. このとき, 自然な写像

$$\pi_0(\mathrm{Homeo}^+(X)) \rightarrow \mathrm{Aut}(H^2(X; \mathbb{Z}))$$

は同型である.

2.2 $\pi_0(\mathrm{Diff}) \rightarrow \pi_0(\mathrm{Homeo})$ の非全射性

ここからは, $\mathrm{Diff}(X)$ と $\mathrm{Homeo}(X)$ の比較に関する結果である. 歴史的には, 自然な写像 $\pi_0(\mathrm{Diff}(X)) \rightarrow \pi_0(\mathrm{Homeo}(X))$ が全射でないような 4 次元多様体 X の例が最初に見つかっている:

定理 2.3 (Friedman–Morgan [40, 41] (1988)) n を $n > 9$ なる自然数とする. X を $\mathbb{CP}^2 \# n(-\mathbb{CP}^2)$ と同相な向き付けられた 4 次元可微分多様体とする. このとき自然な写像

$$\pi_0(\mathrm{Diff}(X)) \rightarrow \pi_0(\mathrm{Homeo}(X))$$

は全射ではない.

定理 2.4 (Donaldson [31] (1990), Morgan–Szabó [31] (1997)) X を $K3$ 曲面とホモトピー同値な滑らかな 4 次元多様体とする. このとき自然な写像

$$\pi_0(\mathrm{Diff}(X)) \rightarrow \pi_0(\mathrm{Homeo}(X))$$

は全射ではない.

定理 2.4 の主張の内, $X = K3$ の場合が Donaldson [31], X が一般のホモトピー $K3$ の場合は Morgan–Szabó [31] の結果から従う.

定理 2.3, 定理 2.4 の証明は, 族のゲージ理論ではなく, 通常のゲージ理論を用いてなされる. (Donaldson 不変量や Seiberg–Witten 不変量への微分同相写像の作用を観察することで示される.) しかし最近の族のゲージ理論から出てくる結果 (Baraglia [11]) を用いた別証明を行うことも可能である. そのような別証明の射程は広く, あるクラスの非単連結 4 次元閉多様体への拡張 (中村・筆者 [80]) や境界付き 4 次元多様体への拡張 (谷口・筆者 [81]) を行うこともできる. しかしいずれも b^+ が比較的小さい 4 次元多様体 (現状 $b^+ \leq 3$) のみに適用できる議論である.

2.3 $\pi_0(\mathrm{Diff}) \rightarrow \pi_0(\mathrm{Homeo})$ の非単射性

1 族のゲージ理論のトポロジーへの初めての応用は、次の Ruberman [129] の結果である。Ruberman
2 のこの仕事は、本稿で説明される多くの仕事の雛形を与えている。

3 **定理 2.5 (Ruberman [129] (1998))** トポロジカルには恒等写像にアイソトピックだが、滑らか
4 にはアイソトピックでないような自己微分同相写像を持つ閉 4 次元多様体が存在する。すなわち、

$$5 \quad \text{Ker}(\pi_0(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(X))) \quad (2.1)$$

6 が非自明となるような閉 4 次元多様体 X が存在する。具体的には、 $X = (2n)\mathbb{CP}^2 \# m(-\mathbb{CP}^2)$ (ただ
7 し $n \geq 2, m \geq 10n + 1$) はそのような 4 次元多様体である。

8 定理 2.5 の主張にあるような自己微分同相写像、すなわちトポロジカルには恒等写像にアイソトピッ
9 クだが滑らかにはアイソトピックでないような自己微分同相写像は、最近ではエキゾチックな自己微
10 分同相写像と呼ばれている。(2.1) の非自明な元を作る Ruberman の議論は巧妙なもので、4 次元多
11 様体の dissolving と呼ばれる現象を上手く利用するものである。一番簡単な状況で少し具体的に述べ
12 ると、Kirby 計算により $K3 \# \mathbb{CP}^2 \cong 4\mathbb{CP}^2 \# 19(-\mathbb{CP}^2)$ という非自明な微分同相があるが、この微分
13 同相と $\mathbb{CP}^2 \# 2(-\mathbb{CP}^2)$ 上の手で作る自己微分同相（これがゲージ理論における「壁越え」と関係する）
14 を組み合わせて作る。以下の定理 2.6 における筆者たちの例の構成も同様のアイデアに基づいている。

15 Ruberman の定理 2.5 は、 $SO(3)$ -Yang-Mills 反自己双対方程式の S^1 上の族を考察すること示さ
16 れる。(4 節参照。) Seiberg-Witten 方程式で同様の議論を考えることで、さらに適用範囲を拡げ次
17 を示すこともできる (Seiberg-Witten 理論における「壁」の構造の簡明さに由来する)：

18 **定理 2.6 (Baraglia-K. [16] (2020))** $X = n(K3 \# S^2 \times S^2)$ (ただし $n \geq 2$) に対して、

$$19 \quad \text{Ker}(\pi_0(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(X)))$$

20 は非自明となる。

21 2.4 節以降の結果と時系列が前後するが、最近現れた 4 次元多様体上の Dehn twist に対する興味
22 深い結果をここで紹介したい。これは族に対する Bauer-Furuta 不変量 (5.1 節) に基づく。ここで、
23 4 次元多様体に対する Dehn twist とは以下のように定義される自己微分同相写像である。4 次元多様
24 体 X の中にアニュラス $S^3 \times [0, 1]$ が埋め込まれているとする。このアニュラスに沿った Dehn twist
25 とは、次の式で定義されるアニュラス上の自己微分同相写像を、恒等写像でアニュラスの外に拡張す
26 ることで得られる X の自己微分同相写像である： $S^3 \times [0, 1] \rightarrow S^3 \times [0, 1]; (x, t) \mapsto (f(t) \cdot x, t)$, た
27 だし $f : [0, 1] \rightarrow SO(4)$ は $\pi_1(SO(4)) (\cong \mathbb{Z}/2)$ の非自明元を代表する $SO(4)$ 内のループである。

28 **定理 2.7 (Kronheimer-Mrowka [89] (2020))** $X = K3 \# K3$ の連結和の首に沿った Dehn
29 twist は、

$$30 \quad \text{Ker}(\pi_0(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(X)))$$

31 の非自明な元となる。

32 既に紹介した定理 2.5、定理 2.6 の結果は、ある 4 次元多様体 X に対して $\text{Ker}(\pi_0(\text{Diff}(X)) \rightarrow$
33 $\pi_0(\text{Homeo}(X)))$ の非自明元の存在を主張するものであったが、その非自明元を与える自己微分同相
34 写像の構成は少々複雑である。Dehn twist のような一見自然に見える自己微分同相写像が「エキゾ
35 チックな」微分同相写像になっているということは驚きである。

1 定理 2.7 の証明は, Dehn twist による写像トラスとして得られる 4 次元多様体の族の Bauer–
 2 Furuta 不変量を計算して, その非自明性を示す, というものである. 族に対する Seiberg–Witten 不
 3 変量に対して同様の議論を行うことは全くできない. ($K3\#K3$ に対する Seiberg–Witten 不変量は
 4 自明だが Bauer–Furuta 不変量は非自明 [18] という事情と平行である.)

5 定理 2.7 の議論をさらに発展させ, J. Lin は次を示した:

6 定理 2.8 (J. Lin [103] (2020)) $X = K3\#K3\#S^2 \times S^2$ の, $K3$ と $K3$ の連結和の首に沿った
 7 Dehn twist は,

$$8 \quad \text{Ker}(\pi_0(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(X)))$$

9 の非自明な元となる.

10 すなわち, Kronheimer–Mrowka が定理 2.7 で考察した $K3\#K3$ の Dehn twist は, $S^2 \times S^2$ を連
 11 結和してもなおエキゾチックなまま生き残っているのである. 閉 4 次元多様体における多くのエキゾ
 12 チックな現象は, $S^2 \times S^2$ をひとつ連結和するだけで失われることが経験的に知られている. (例えば
 13 [20, 2, 6, 7] など.) しかし, 微分同相写像がエキゾチックか否かという性質は, $S^2 \times S^2$ ひとつの連
 14 結和では壊れない場合があることを定理 2.8 は示している.

15 定理 2.8 の証明は, Kronheimer–Mrowka が定理 2.7 で計算した族の Bauer–Furuta 不変量が, $S^2 \times$
 16 S^2 の連結和後にどのような元になるのかを安定ホモトピー論を駆使して調べることによる.

17 2.4 $\pi_n(\text{Diff})$ vs. $\pi_n(\text{Homeo})$ ($n > 0$)

18 さて, 2.2 節, 2.3 節の結果は $\pi_0(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(X))$ に対する結果であったが, 1 次以上
 19 のホモトピー群 π_n はどうか. $\pi_n(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X))$ が同型にならない 4 次元多様体 X の
 20 例はあるのだろうか. 筆者の知る限り, この問いに対する初めての結果は渡邊忠之による次のものであ
 21 る. これは渡邊の 4 次元 Smale 予想の否定的解決を導く理論の帰結である. その証明は Kontsevich
 22 特性類を用いるもので, 本稿の主題であるゲージ理論による議論とは全く異なる.

23 定理 2.9 (渡邊 [142] (2018)) 自然な写像

$$24 \quad \pi_1(\text{Diff}(S^4)) \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(S^4))$$

25 は単射ではない.

26 それでは, 1 次以上のホモトピー群で, $\pi_n(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X))$ が全射でないことが示せ
 27 る場合はあるだろうか? Baraglia と筆者の次の結果は, この問いに対する初めての例を与える.

28 定理 2.10 (Baraglia–K. [14] (2019)) 自然な写像

$$29 \quad \pi_1(\text{Diff}(K3)) \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(K3))$$

30 は全射ではない.

31 この結果の証明については注意 2.3 参照. 中心的な道具は Baraglia・筆者 [15] による $K3$ 曲面の族
 32 に対するゲージ理論由来の制約 (後に定理 5.2 で解説) で, 次の 2.5 節以降のアイデアが使われる²⁾.

33 2.5 全空間は滑らかになる non-smoothable な族

34 定理 2.10 の証明には, 1 節で述べた「non-smoothable な族」を detect するというアイデアが使わ
 35 れる. 次の定理 2.11 は, 族のゲージ理論によって non-smoothable な族を detect した初めての結果

1 であり, 興味深い現象を捉えていると思うので紹介したい. 以下 2 節の終わりまで時系列順である.
 2 負定値な E_8 多様体, すなわち, 向き付けられた単連結 4 次元位相閉多様体で交叉形式が負定値 E_8 -
 3 格子なものを $-E_8$ と書く. (これは滑らかになれない 4 次元位相多様体の典型例で, Freedman 理論
 4 により存在が保証される.)

5 **定理 2.11 (加藤-K.-中村 [65] (2021))** $3 \leq m \leq 6$ に対し, 4 次元位相多様体 X を

$$6 \quad X = 2(-E_8) \# m(S^2 \times S^2) \quad (2.2)$$

7 で定義する. (X は $K3 \# (m-3)(S^2 \times S^2)$ と同相なので, 可微分多様体の構造を許容する.) この
 8 とき, $\text{Homeo}(X)$ を構造群とするファイバー束

$$9 \quad X \rightarrow E \rightarrow T^{m-2}$$

10 であって次の条件を満たすものが存在する:

11 (1) 全空間 E は多様体として滑らかにできる. すなわち可微分構造を許容する.

12 (2) しかし, X のいかなる微分構造に対しても $X \rightarrow E \rightarrow T^{m-2}$ はファイバー束として滑らかに
 13 できない. すなわち, X のいかなる微分構造に対しても, 構造群を $\text{Homeo}(X)$ から $\text{Diff}(X)$ に簡約
 14 することができない.

15 全空間, ファイバー, 底空間の全てが多様体としては滑らかにできるにもかかわらず, ファイバー
 16 束としては滑らかにできないという状況があり得ることは, これまで認識すらされていなかったと思
 17 われる. 族のゲージ理論が非常に微妙な現象を捉えていることが窺えるであろう.

18 **注意 2.1** 族のゲージ理論が用いられるのは性質 (2) の証明の方で, 性質 (1) の証明は Kirby-Siebenmann
 19 理論 [70] に基づく.

20 **注意 2.2** 一般に, 可微分多様体 X をファイバーとする滑らかな多様体 B 上のファイバー束 $X \rightarrow$
 21 $E \rightarrow B$ の構造群が $\text{Diff}(X)$ に簡約しているとき (つまり E が分類空間への連続写像 $B \rightarrow B\text{Diff}(X)$
 22 により与えられたとき), E をバンドル同型で取り替えて, 全空間 E が滑らかな多様体かつ射影 $E \rightarrow$
 23 B が滑らかな写像になるようにできる. ([117] 参照.) したがって, もしも全空間 E 自身が多様体と
 24 して滑らかにできないと分かれば, 性質 (2) がただちに出る. 性質 (1) は, 性質 (2) がそのような自
 25 明な方法では導出できないことを保証している.

26 定理 2.11 における E の構成のアイデアは以下の通りである. まず, (2.2) の表示における $S^2 \times S^2$
 27 をひとつ選び, そこにサポートが入っているような (なおかつ最終的に族のゲージ理論の制約に上手
 28 く引っかかるような) 微分同相写像を考え, それを外には恒等写像で拡張すると, X の自己同相写
 29 像が得られる. どれでも良いので $S^2 \times S^2$ を $(m-2)$ 個選んでこの構成を行い, X の自己同相写像
 30 $f_1, \dots, f_{m-2}$ を作る. $f_1, \dots, f_{m-2}$ たちはサポートが交わらないので明らかに互いに可換で, した
 31 がってその (多重) 写像トーラスを作ることができる. (つまり, $f_1, \dots, f_{m-2}$ から決まる X への
 32 連続な $\mathbb{Z}^{m-2}$ 作用に対して Borel 構成を行うことで, $T^{m-2} = B(\mathbb{Z}^{m-2})$ 上の族を作る.) この多重
 33 写像トーラスとして E を定義する. E は同相写像たちの写像トーラスで作ったから, その構造群は
 34 ($\text{Diff}(X)$ でなく) $\text{Homeo}(X)$ である. さらに, $-E_8$ が可微分構造を許容しなかったから, 少なくと
 35 もアприオリには可換性を保ったまま $f_1, \dots, f_{m-2}$ を一斉に滑らかにできるか不明である. つまり
 36 E の構造群を $\text{Diff}(X)$ に簡約できるかは明らかでない. そしてこれが実際に不可能であることが族の

ゲージ理論により示せるのである。Freedman 理論による位相的な連結と分解を用いてこのような構成を行うと non-smoothable な対象が得られる可能性があるというアイデアは、中村信裕の [118, 120] に遡る。([118, 120] では 4 次元多様体への群作用の non-smoothability を論じている。)

2.6 Non-smoothable な族の存在の帰結

ここで non-smoothable なファイバー束の存在からただちに分かることを注意しておこう。可微分多様体 X をファイバーとする位相的ファイバー束 E に対し、 E が non-smoothable なファイバー束とは、 E の分類写像を $\varphi_E: B \rightarrow B\text{Homeo}(X)$ としたとき下の図式の持ち上げ問題が解けないということである：

$$\begin{array}{ccc} & & B\text{Diff}(X) \\ & \nearrow & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\varphi_E} & B\text{Homeo}(X) \end{array}$$

したがって、もしも X をファイバーとする non-smoothable なファイバー束が存在すれば、障害理論から、包含写像 $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ が弱ホモトピー同値でないことがただちに従う。

障害理論からは、単に弱ホモトピー同値でないだけでなく、族の底空間の次元に応じて、どの次数までのホモトピー群で自然な写像 $\pi_n(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X))$ が同型でないかの評価も出ること注意到しよう。定理 2.11 の場合だと、 $X = 2(-E_8) \# m(S^2 \times S^2)$ の微分構造をひとつ固定したとき（例えば $X = K3 \# (m-3)(S^2 \times S^2)$ とみなしたとき）、我々はこの多様体の T^{m-2} 上の族を考えているので、 $\pi_n(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X))$ が少なくともひとつの $n \in \{0, \dots, m-3\}$ に対して同型でないと分かる。特に $m=3$ とすると、 $K3$ 曲面とホモトピー同値な可微分多様体 X に対して $\pi_0(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(X))$ が同型でないと分かるが、より強く全射でないことが分かる。(non-smoothable な対象を detect しているからである。) これは定理 2.4 を復元する。

以上の結果は、方向性としては、 $\text{Homeo}(X)$ のホモトピー群の元であって $\text{Diff}(X)$ から来ないものと考えている、つまり

$$\text{Coker}(\pi_n(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X)))$$

の非自明元を捉えようとしているのに近い。本当にこの Coker の元が捕まるためには、 n 次までの持ち上げの障害が消えている（例えば $B = S^{n+1}$ ）必要がある。一方で、Wall の定理 ([141], 定理 2.1) は、あるクラスの 4 次元多様体に対して $\pi_0(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(X))$ が全射という結果である。これにより低次の障害を消すことで、定理 2.11 から次を導くことができる。直感的には、「 $K3 \# S^2 \times S^2$ の Homeo の Diff による商」についての情報が得られそうなのだが、可微分多様体 X に対し $\text{Diff}(X)$ は $\text{Homeo}(X)$ の自然な位相 (C^0 トポロジー) に関して閉でないので、次のホモトピー商を考える：

$$\text{Homeo}(X) // \text{Diff}(X) := (E\text{Diff}(X) \times \text{Homeo}(X)) / \text{Diff}(X).$$

定理 2.12 (加藤-K.-中村 [65] (2021)) $X = K3 \# S^2 \times S^2$ に対して、

$$\pi_1(\text{Homeo}(X) // \text{Diff}(X)) \neq 0.$$

定理 2.12 とホモトピー完全系列から、 $X = K3 \# S^2 \times S^2$ に対しては、 $\pi_0(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(X))$ ■

1 が単射でないか $\pi_1(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(X))$ が全射でないかの少なくともどちらかは成り立つと
 2 分かる. しかしいずれが (あるいはどちらも) 成立するのは現時点では分かっていない.

3 **注意 2.3** 先に述べた Baraglia・筆者の定理 2.10($\pi_1(\text{Diff}(K3)) \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(K3))$ が全射でない
 4 こと) の証明も, non-smoothable な族を 2 次元トーラス T^2 上で detect し, さらに低次の障害を消
 5 すことでなされる. 使う道具を挙げると, non-smoothable であることの detect には $K3$ 曲面の族に
 6 対するゲージ理論から来る制約 (Baraglia・筆者 [15]. 後に定理 5.2 で解説), 低次の障害を消すため
 7 に Giansiracusa [51], Giansiracusa–Kupers–Tshishiku [52] による $K3$ 曲面に対する大域的 Torelli
 8 の定理に関する考察が用いられる.

9 **2.7** ほとんどの X に対して $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ が弱ホモトピー同値でないこと

10 加藤・中村・筆者の [65] のプレプリントが arXiv 上に出た翌月, Baraglia が次の決定的な結果を証
 11 明した:

12 **定理 2.13 (Baraglia [11] (2021))** X を滑らかな向きづけられた単連結 4 次元閉多様体であって,
 13 交叉形式が不定値かつ符号数の絶対値が 8 より大きいものとする. このとき, $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$
 14 は弱ホモトピー同値でない.

15 より詳しくは, $0 \leq n \leq \min\{b^+(X), b^-(X)\} - 1$ を満たすある n が存在し, 自然な写像

$$16 \quad \pi_n(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X))$$

17 は同型でない.

18 すなわち, 問 1 の最初の問題 ($\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ は弱ホモトピー同値か?) が, ほとんどの
 19 単連結 4 次元閉多様体に対し否定的に解決されたことになる.

20 **注意 2.4** X がスピンのときは, n の評価が少し改善し, $0 \leq n \leq \min\{b^+(X), b^-(X)\} - 3$ を満た
 21 すある n が存在し, 自然な写像 $\pi_n(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X))$ が同型でないと分かる. ゲージ理論
 22 的な理由の説明は注意 5.3 参照.

23 Baraglia による定理 2.13 の証明は次のような流れである. まず, 後に定理 5.1 で解説する Don-
 24 aldson の対角化定理の族版を示し, 4 次元多様体の滑らかな族に対する制約を得ておく. 2.5 節で説
 25 明した定理 2.11 における non-smoothable な族の構成と同様に, 多重写像トーラスとして, X の連
 26 続的なバンドルが ($b^+(X)$ 次元の) トーラス上に構成できる. 用意しておいた制約を用いて, このバ
 27 ンドルが non-smoothable であると示す.

28 定理 2.13 は単連結 4 次元多様体に対する主張だが, 例えば単連結 4 次元多様体に $S^1 \times S^3$ を有
 29 限個連結和したような多様体に対しても, 同じ証明で同様の結論が成り立つ. 一方, 例えば $S^1 \times Y$
 30 や $S^2 \times \Sigma_g$ (ここで Y, Σ_g はそれぞれ任意の向き付けられた閉 3 次元多様体と種数 $g \geq 1$ の向き付け
 31 られた閉曲面) を単連結 4 次元多様体に連結和すると, もはや定理 2.13 を証明する議論は使えなく
 32 なる. しかしこのタイプの非単連結 4 次元多様体には, 中村信裕の展開していた $\text{Pin}^-(2)$ -モノポー
 33 ル [121, 122] が上手く機能する. 中村・筆者の共同研究 [80] では, 定理 2.13 と平行した結果がこの
 34 タイプの非単連結 4 次元多様体に対して成立することを, $\text{Pin}^-(2)$ -モノポールの族版を用いて示した.

35 **2.8** 境界付き 4 次元多様体の Diff vs. Homeo

36 Baraglia の定理 2.13 は強力である. 谷口正樹と筆者 [81] はこれを境界付き 4 次元多様体に拡張し
 37 た. それを述べるために, 3 次元多様体の Frøyshov 不変量をごく簡単に説明しよう. (より詳しい説

1 明は 5.3 節参照.) これは 3 次元多様体に対してゲージ理論により定義される数値的不変量の中でも特
 2 に重要なものである. Frøysthov 不変量 $\delta(Y, \mathfrak{t})$ は, 向き付けられた spin^c 有理ホモロジー 3 球面 $(Y, \mathfrak{t})$
 3 に対し $\frac{1}{8}\mathbb{Z}$ の値を取る不変量である. $\delta(Y, \mathfrak{t})$ は spin^c 構造 $\mathfrak{t}$ にも依るが, Y が整ホモロジー 3 球面な
 4 らばその上の spin^c 構造は一意的なので, 以下記号から落として $\delta(Y)$ と書く. また整ホモロジー 3 球
 5 面 Y に対しては δ は $\mathbb{Z}$ に値を取る. 整ホモロジー 3 球面のなすホモロジー同境界群 $\Theta_3^{\mathbb{Z}}$ は低次元トポ
 6 ロロジーのひとつの中心的な対象であるが, Frøysthov 不変量 δ は全射準同形 $\delta: \Theta_3^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}$ を誘導する.
 7 境界付き多様体 X に対して, $\text{Homeo}(X, \partial) = \{f \in \text{Homeo}(X) \mid f|_Y = \text{id}_Y\}$ と定義し, $\text{Diff}(X, \partial)$
 8 も同様に定義する. Baraglia の定理 2.13 (ほとんどの閉 4 次元多様体 X に対して $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ ■
 9 が弱ホモトピー同値でないこと) は, 以下のように境界付き 4 次元多様体に拡張することができる:
 10 **定理 2.14 (K.-谷口 [81] (2020))** X を滑らかな向き付けられた単連結境界付き 4 次元多様体で,
 11 $\sigma(X) \leq 0$ かつ交叉形式が不定値とする. 境界 $\partial X = Y$ は連結で, 整ホモロジー 3 球面であるとする.
 12 $\sigma(X) < -8$ かつ $\delta(Y) \leq 0$, あるいは X がスピンかつ $-\sigma(X)/8 > \delta(Y)$ と仮定する. このとき,
 13
$$\text{Diff}(X, \partial) \hookrightarrow \text{Homeo}(X, \partial) \quad \text{および} \quad \text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$$

 14 は弱ホモトピー同値でない. より詳しくは, 自然な写像 $\pi_n(\text{Diff}(X, \partial)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X, \partial))$ がある
 15 $n \in \{0, \dots, b^+(X) - 1\}$ で同型でないこと, $\pi_n(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X))$ がある $n \in \{0, \dots, b^+(X)\}$ ■
 16 で同型でないことが分かる.
 17 定理 2.14 の証明は, 後に説明する定理 5.3 に基づく. 定理 2.14 の仮定を満たす具体例は極めて豊
 18 富に存在する. (例えば, 楕円曲面 $E(2n)$ 中の Gompf 核 $N(2n)$, およびそれに $\Sigma(2, 3, 5)$ を境界に
 19 持つ負定値 E_8 多様体を任意有限個連結和したものが一つの例である.)

20 3 ゲージ理論の 4 次元トポロジーへの応用法

21 ここからは, 2 節で述べた諸結果の一部の証明の概説を目標に, ゲージ理論の中身の説明を始める.
 22 まずこの節では, 族のゲージ理論の解説の前段階として, 従来のゲージ理論の 4 次元トポロジーへの
 23 応用がどのような方法に基づいて行われてきたかを, 極力専門用語を使わずに説明する. テクニカル
 24 な条件を無視して述べるが, 正確で詳しい内容は [32, 38, 115, 123, 145] などを参照されたい.

25 3.1 不変量と制約

26 ゲージ理論の 4 次元トポロジーへの応用の基本的な手順は, 以下の 3 ステップにまとめられる.
 27 **ステップ 1:** 向き付けられた滑らかな閉 4 次元多様体上で, Yang–Mills 反自己双対方程式あるいは
 28 Seiberg–Witten 方程式という偏微分方程式を立式する. (具体的に書くとそれぞれ

$$29 \quad F_A^+ = 0, \quad \begin{cases} F_A^+ = \sigma(\Phi, \Phi), \\ \not{D}_A \Phi = 0 \end{cases}$$

30 であるが, ここに出てくる記号が分からずとも以下の部分を読むのに差し支えない.) 微分方程式を書
 31 き下すためには, もちろん多様体の可微分構造が必要である. 正確には, これらの微分方程式を書く
 32 ためには, それだけではなく, Riemann 計量などの非トポロジカルなデータと何らかのトポロジカル
 33 なデータ (適当な Lie 群 G に対する主 G 束や spin^c 構造) を付加データとして固定する必要がある.
 34 **ステップ 2:** これらは非線型偏微分方程式であるが, そこからモジュライ空間と呼ばれる有限次元

1 多様体を取り出す。その手順は以下の通りである。まず、上の非線型偏微分方程式の解空間は (generic
2 には) 無限次元多様体になる。ここにゲージ変換群と呼ばれる無限次元群が作用している。この作用
3 で解空間の商を取ったものがモジュライ空間である。モジュライ空間は (genericity の下で) 有限次元
4 多様体となる。(正確には、4 次元多様体の位相的条件によっては、商特異点が生じる場合がある。)

5 **ステップ 3:** モジュライ空間から元々偏微分方程式を立式する舞台であった 4 次元多様体の情報
6 を引き出す。情報の引き出し方には、大別すると次の 2 つのタイプがある:

7 • 方法 1: モジュライ空間の情報を用いて 4 次元多様体の微分位相不変量を定義し、多様体の区
8 別に用いる (この場合は、最終的に得られた不変量が、上の手順のステップ 1 で取った非トポロジ
9 カルな付加データの選び方に依らないことの証明が必要となる)。典型的には、モジュライ空間が 0
10 次元の状況に帰着し、その数え上げを行い整数値不変量を得る。

11 • 方法 2: モジュライ空間の性質から、4 次元多様体の古典的な不変量 (典型的には交叉形式) に
12 何らかの制約を与える。

表 1: 不変量と制約

方法 1: 不変量	方法 2: 制約
Donaldson 不変量 [31]	Donaldson の対角化定理 [29]
Seiberg–Witten 不変量 [143]	Donaldson の Theorems B, C [30]
Bauer–Furuta 不変量 [19]	古田の 10/8 不等式 [47]

13 方法 1・方法 2 に基づく不変量・4 次元多様体への制約の典型例を表 1 に挙げる。正確には、表 1
14 の一番下の行にある、Bauer–Furuta 不変量と古田の 10/8 不等式は、モジュライ空間よりも精密な情
15 報を用いて得られるものであり、Seiberg–Witten 方程式を無限次元空間の間の写像とみなし、その有
16 限次元近似から情報を引き出すものである。その説明は 3.3 節で行うこととし、まずは上に出てきた
17 モジュライ空間の描像を、有限次元のモデルを用いて非専門家向けにより詳しく説明しよう。

18 3.2 有限次元のモデル

19 Yang–Mills 反自己双対方程式・Seiberg–Witten 方程式は、(ゲージ変換群の作用を込みで見ると)
20 非線型の楕円型偏微分方程式と呼ばれるタイプの微分方程式である。楕円性は Fredholm 性という関
21 数解析的な性質を導くが、この性質を直感的に述べると、このタイプの微分方程式は以下の意味で有
22 限次元のモデルを持っているというものである。まず、これらの微分方程式は、ある無限次元多様体
23 $\mathcal{B}$ 上の、ある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ をファイバーとする無限次元のベクトル束 $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ の切断

$$24 \quad s: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E} \quad (3.1)$$

25 と見なすことができる。この切断の零点集合 $s^{-1}(0)$ が、方程式の解空間をゲージ群で割ったもの、
26 すなわちモジュライ空間である。ここで、各零点 $x \in s^{-1}(0)$ における s の微分 $ds_x: T_x \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}$ が
27 全射となっているとき (generic にはこのようにできる)、無限次元の多様体に対する陰関数定理から
28 $s^{-1}(0)$ は多様体になるが、Fredholm 性が、 $s^{-1}(0)$ が実は有限次元であることを保証する。実はもっ
29 と強く、 $s^{-1}(0)$ は局所的には有限次元多様体上の有限ランクのベクトル束 $E \rightarrow B$ の切断

$$30 \quad s': B \rightarrow E$$

1 の零点として書けることが Fredholm 性から従う。(この有限次元の局所モデルを倉西モデルという.)
 2 直感的には, 無限次元のベクトル束 $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ の底空間 $\mathcal{B}$ とファイバー $\mathcal{H}$ は共に無限次元なので
 3 あるが, s の微分を通して無限次元の部分と同型に対応しており, 残りの有限次元の部分抽出したも
 4 のが $s' : B \rightarrow E$ である. 特に, $s^{-1}(0)$ の次元は, $\dim B - \text{rank } E$ で与えられる. この数はモジュ
 5 ライ空間の形式的次元, あるいは仮想次元と呼ばれ, Atiyah–Singer の指数定理 [4] で計算できるも
 6 のである. 有限次元のモデルから想像できるように, 形式的次元は $s^{-1}(0)$ が実際に多様体になるか
 7 (つまり切断 s が零切断と横断的か) 否かとは関係なく, 方程式を書くための設定が与えられた段階で
 8 定義できる概念であり, また Riemann 計量などの非トポロジカルな付加データにも依らない.

9 3.3 Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似と種々のゲージ理論的制約

10 ここで, 古田幹雄が 10/8 不等式 [47] の証明において導入し, その後 Bauer–Furuta 不変量 [19] の
 11 理論として発展した Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似の方法について説明しよう。(この節お
 12 よび続く 3.4 節の参考文献として, 古田の原論文 [47], Bauer–Furuta の原論文 [19], Bauer による
 13 Bauer–Furuta 不変量の貼り合わせの原論文 [18] を挙げる. また古田のプレプリント [50], 古田の
 14 サーベイ [144, 48], Bauer のサーベイ [17] も参照.) 有限次元近似の方法は, 後で述べる族のゲージ
 15 理論においても基本的である. さらに, 有限次元近似の方法により, 表 1 の右側に代表されるゲージ
 16 理論による 4 次元多様体への種々の制約の統一的な説明を行うことができる. まず, 表 1 の右側の内
 17 ふたつの主張を思い出す (残りの Donaldson の Theorems B,C については後述):

18 **定理 3.1 (Donaldson [29] (1983))** X を滑らかで向き付けられた閉 4 次元多様体とする. X の
 19 交叉形式が負定値であると仮定する. このとき, X の交叉形式は $\mathbb{Z}$ 上で対角化可能である.

20 **定理 3.2 (古田 [47] (2001))** X を滑らかで向き付けられたスピンの閉 4 次元多様体で, 交叉形式が
 21 不定値と仮定する. このとき次の不等式が成り立つ:

$$22 \quad b_2(X) \geq \frac{5}{4} |\sigma(X)| + 2.$$

23 位相 4 次元多様体に対する Freedman 理論 [39] と比べると, これらの定理は可微分 4 次元多様体
 24 の交叉形式への極めて強い制約を与えていると分かるのであった. この節で説明したいことは, 定
 25 理 3.1, 定理 3.2 の主張の見た目 (およびはじめて現れた証明法) はかなり異なるが, これらは両方
 26 とも Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似から同様の方法で導出でき, 両者の差異は用いるコホモ
 27 ロジー理論の違いのみと理解できるということである.

28 3.2 節の説明の中で特に Seiberg–Witten 方程式を考えているとき, 有限次元のモデルを十分大き
 29 く取って, モジュライ空間 $s^{-1}(0)$ 全体を有限次元のモデルに納めることができる. (Seiberg–Witten
 30 方程式の解のモジュライ空間がコンパクトになることが鍵である.) このモデルを適当に書き換える
 31 と, 有限次元の球面の間の連続写像

$$32 \quad f : S^m \rightarrow S^n$$

33 (ただし $m, n \gg 0$) が得られる. ここで, f の定義域と値域の球面は次のようにして現れるものであ
 34 る. まず一般に, 微分方程式はある関数空間の間の写像とみなすことができる. Seiberg–Witten 方程
 35 式に対応する写像の定義域・値域の関数空間を有限次元近似すると, 有限次元のベクトル空間が得ら
 36 れる. f の定義域と値域の球面は, この有限次元ベクトル空間の一点コンパクト化として得られる.

重要なことは、 f の定義域・値域の球面にはある Lie 群 G が自然に作用しており、Seiberg–Witten 方程式自体の内部対称性由来して、写像 $f: S^m \rightarrow S^n$ はこれらの作用に関して同変写像になっていることである。 $(G$ は具体的には次のものである：一般には $G = S^1$ 、スピンの 4 次元多様体に対してはより大きい $G = \text{Pin}(2)$.) もう少し詳しく述べると、 G が作用する実ベクトル空間 $V_{\mathbb{R}}, W_{\mathbb{R}}$ と複素ベクトル空間 $V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}$ が存在し、 S^m, S^n は

$$S^m = V_{\mathbb{R}}^+ \wedge V_{\mathbb{C}}^+, \quad S^n = W_{\mathbb{R}}^+ \wedge W_{\mathbb{C}}^+$$

と分解される。ここで $+$ は一点コンパクト化で、 $V_{\mathbb{R}}, W_{\mathbb{R}}$ および $V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}$ には G が異なる仕方で線型に作用している。例えば $G = S^1$ のときは $V_{\mathbb{R}}, W_{\mathbb{R}}$ は自明表現、 $V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}$ は複素ベクトル空間へのスカラー倍の制限で G を作用させたものである。この二つのタイプの G 表現は、Seiberg–Witten 方程式の線型化に現れる二種類の線型微分作用素、すなわち Atiyah–Hitchin–Singer 作用素という実線型な作用素と、Dirac 作用素という複素線型な作用素に対応する。表現のタイプごとの次元の差

$$\dim V_{\mathbb{R}} - \dim W_{\mathbb{R}}, \quad \dim V_{\mathbb{C}} - \dim W_{\mathbb{C}}$$

を指数定理で計算することで、特性数が二種類現れる。同変写像 f の存在から、Borsuk–Ulam 型の定理の帰結として、この二種類の特性数の間の不等式が得られる場合があり、これが 4 次元多様体の可微分構造由来の強い制約となるのである。

実際に種々の Borsuk–Ulam 型の定理から得られる帰結は以下の通り：古田の 10/8 不等式 ([47], 定理 3.2) の証明は、 $\text{Pin}(2)$ 同変 K 理論 $K_{\text{Pin}(2)}$ から得られる Borsuk–Ulam 型の定理を写像 f に適用することでなされる。同様に、 S^1 同変 ordinary cohomology $H_{S^1}^*$, $\text{Pin}(2)$ 同変 ordinary cohomology $H_{\text{Pin}(2)}^*$ から得られる Borsuk–Ulam 型の定理を写像 f に適用することで、それぞれ Donaldson の対角化定理 ([19], 定理 3.1) と Donaldson の Theorems B, C (表 1 右側参照) を復元できる。まとめると、 $H_{S^1}^*, H_{\text{Pin}(2)}^*, K_{\text{Pin}(2)}$ という種々の同変コホモロジー理論に応じて得られる種々の Borsuk–Ulam 型の定理が、滑らかな 4 次元多様体に対する異なる制約を与えているのである。

注意 3.1 Donaldson の Theorems B, C は b^+ の小さい滑らかなスピン閉 4 次元多様体の交叉形式に対する制約である。これは閉 4 次元多様体に対する主張としては 10/8 不等式に含まれるが、境界付き 4 次元多様体への拡張を考えると [101], それは Manolescu による境界付き 4 次元多様体に対する 10/8 不等式 [109] とは異なる制約となる。また、族版を考えると、これもやはり 10/8 不等式の族版とは異なる制約となる [11]。なお、F. Lin [101] による証明は有限次元近似を用いるものではなく、彼が [102] で構成した $\text{Pin}(2)$ モノポール Floer ホモロジーに基づく。有限次元近似による (族版に拡張された) 証明は、谷口・筆者の [81] にあり、これは Baraglia [11] の議論の相対版である。

3.4 Bauer–Furuta 不変量

以上はゲージ理論的制約の説明だが、有限次元近似の方法に基づいて 4 次元多様体の不変量を定義することもできる。それが Bauer と古田により導入された Bauer–Furuta 不変量 [19] であり、Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似 $f: S^m \rightarrow S^n$ の取り方の不定性を安定ホモトピーに吸収させることで定義される。Seiberg–Witten 不変量は $f^{-1}(0)$ (正確には $f^{-1}(0)$ を自然な S^1 作用で割ったもの) の数え上げにあたるが、これは写像 f (の定義域を自然な S^1 作用で割ったもの) の ordinary cohomology を用いた写像度であり、Bauer–Furuta 不変量は自然に Seiberg–Witten 不変量を復元する。さらに

1 Bauer–Furuta 不変量は Seiberg–Witten 不変量よりも真に強い不変量であることが知られており (例
2 えば [18, 49] 参照), Seiberg–Witten 方程式から定義される閉 4 次元多様体の不変量としては, 現時
3 点では最も情報量の多いものである.

4 3.5 Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型

5 ここで 3 次元多様体と境界付き 4 次元多様体に関することに触れる. Manolescu [108] は, 古田 [47],
6 Bauer–Furuta [19] による閉 4 次元多様体上の Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似の議論の 3 次
7 元版を考え, さらにそこに Conley index の理論を適用することで, Seiberg–Witten Floer 安定ホモト
8 ピー型の構成を実現した. その画期的応用として, トポロジー最大の未解決問題のひとつだった三角形
9 分割予想を否定的に解決した [110]. ここで Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型とは, 3 次元多様
10 体に対するモノポール Floer ホモロジー [91] と呼ばれる不変量の, 空間版の精密化である. もう少し
11 説明すると, まずモノポール Floer ホモロジーとは, 3 次元多様体に対してあるアーベル群を対応させ
12 るゲージ理論的不変量である. その構成は, 標語的には, ある無限次元多様体上の Seiberg–Witten 方
13 程式に対応するある汎関数に対する Morse ホモロジーである. そして Seiberg–Witten Floer 安定ホ
14 モトピー型は, その (同変) 特異ホモロジーを取るとモノポール Floer ホモロジーを復元するような空
15 間 (の安定ホモトピー型) のことである. (実際に復元することの証明は [98].) モノポール Floer ホモ
16 ロジーは 3 次元多様体とその間のコボルディズムに関して強力な情報を持っているが, ひとたび Floer
17 安定ホモトピー型という空間が手に入ると, 例えば種々の一般コホモロジーをその空間に適用するこ
18 とで, Floer ホモロジー以上の情報が手に入ると期待される. (閉 4 次元多様体上の Seiberg–Witten
19 方程式に対して, 古田幹雄が K 理論を適用することで $10/8$ 不等式を導いたことを想起していただき
20 たい.) このようなアイデアは [23] で提起され, 種々の Floer ホモロジーに対してその空間版である
21 Floer 安定ホモトピー型の構成の試みがなされた. しかし解析的な構成に成功したのは, 未だにこの
22 Manolescu の仕事およびその一般化 [92, 69, 134] のみと思われる. (Floer ホモロジーの隣接分野の
23 Khovanov ホモロジー, その変種の Bar–Natan ホモロジー, 結び目の Floer ホモロジーの組み合わせ
24 的な空間版の構成については [106, 133, 111], シンプレクティック幾何学における Floer ホモロジー
25 のある一般コホモロジー理論への部分的な持ち上げについては [1] 参照.)

26 Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型は, Bauer–Furuta 不変量の境界付き 4 次元多様体版 (し
27 ばしば相対版と呼ばれる) の値を取る場所を提供している. これは, Seiberg–Witten 不変量の相対版
28 がモノポール Floer ホモロジーに値を取るものの空間版である.

29 4 族のゲージ理論の基本的な考え方

30 以上でようやく族のゲージ理論の説明に入ることができる. 設定を改めて書くと, 向き付けられた
31 滑らかな閉 4 次元多様体 X に, 種々の付加データ (Riemann 計量, 主 G 束あるいは spin^c 構造) を
32 乗せて, 反自己双対方程式あるいは Seiberg–Witten 方程式を考える. これはある無限次元多様体 $\mathcal{B}$
33 上の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ をファイバーとする無限次元のベクトル束 $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ の切断 $s: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ を与
34 えていた. そして零点集合 $s^{-1}(0)$ は, 局所的には有限次元多様体上の有限ランクのベクトル束の切
35 断 $s': \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ の零点集合でモデルされているのであった. いま形式的次元が負であるとしよう. こ
36 れは有限次元のモデルにおいて, 底空間の次元よりもファイバーの次元の方が高い状況に相当する.
37 トポロジカルな問題への応用を考える場合には, 方程式の摂動で不変な性質を考えるのが普通である

1 ため, $s: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ が零切断と横断的な generic な状況を考えても一般性は失わない. しかし, 形式的次元が負である今は, $s: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ が零切断と横断的ならば, $s^{-1}(0)$ は空集合である. 空なモジュライ空間からは何ら情報が得られないし, また古田の有限次元近似の方法も使えない. s の有限次元近似として得られる写像が (同変性を保ったまま) 定値写像にホモトピックになるからである. したがって, 形式的次元が負である場合には, 通常のゲージ理論は無力である.

2 一方, このような状況では族を考えることで意味のある情報が得られる場合がある. はじめてこのことをトポロジーに応用したのは Ruberman [129] で, 彼は以下に述べるアイデアを底空間が S^1 の 4 次元多様体バンドルに用いることで定理 2.5 を示した. B を有限次元の多様体とする. B でパラメトライズされた 4 次元多様体 X の連続族, すなわちファイバー束 $X \rightarrow E \rightarrow B$ が与えられたとしよう. ただし, ゲージ理論を考察するための設定ごと族として与えられたと仮定する. (例えば, $SU(2)$ -Yang-Mills 方程式を考察するなら $SU(2)$ 束 $P \rightarrow X$, Seiberg-Witten 方程式を考察するなら spin^c 構造の族が, E のファイバーごとに B に沿って連続的に与えられたとする.) ここで付加データ (例えば Riemann 計量) の E に沿った族をひとつ固定すると, ゲージ理論の方程式が B 上でパラメトライズされた状況が得られる. つまり, 無限次元ベクトル束とその切断 (3.1) が B 上でパラメトライズされた状況, すなわち

$$s = \bigsqcup_{b \in B} s_b : \bigsqcup_{b \in B} B_b \rightarrow \bigsqcup_{b \in B} \mathcal{E}_b$$

17 が手に入る. パラメトライズされた切断の零点集合 $s^{-1}(0) = \bigsqcup_{b \in B} s_b^{-1}(0)$ を考えよう. これをパラメータ付きモジュライ空間 (parameterized moduli space) という. この次元は, 元々の形式的次元と B の次元の和である. 例えば $\dim B$ が形式的次元の -1 倍なら, $s^{-1}(0)$ は generic には 0 次元多様体であり, 空でない可能性が生じる. (有限次元のモデルに戻って, 有限次元多様体とその上の有限ランクのベクトル束 $s': B \rightarrow E$ が空間 B でパラメトライズされている状況を想像すると良い.)

22 このように, 形式的次元が負の状況でパラメータ付きモジュライ空間を用いる, というのが族のゲージ理論の基本的なアイデアである. また, 有限次元のモデルからも想像できる通り, 考えている族 $X \rightarrow E \rightarrow B$ が自明なバンドルであると, パラメータ付きモジュライ空間 $s^{-1}(0)$ はやはり空となり, 意味のある情報は得られない. 逆に, パラメータ付きモジュライ空間を数え上げるなどして, どう振動しても $s^{-1}(0)$ が空でないことが分かれば, 考えている族 $X \rightarrow E \rightarrow B$ が非自明なバンドルと分かる.

27 4 次元多様体の「エキゾチックな微分同相写像」を初めて detect した Ruberman の定理 2.5 は, $B = S^1$ のときに $SO(3)$ -Yang-Mills 反自己双対方程式の族に対して上のアイデアを実行することで証明された. Seiberg-Witten 方程式で同様のことを考えることもでき, その場合はさらに適用範囲を拡げることもしける. それが定理 2.6 である. 定理 2.5 も定理 2.6 も, 形式的次元が -1 の状況で, S^1 上のモジュライ空間を数え上げることで整数値あるいは $\mathbb{Z}/2$ 値不変量を定義し, その非自明性を用いることで示された. 非自明性の証明は壁越えと貼り合わせに基づく解析的なものである.

33 また, 定理 2.5, 定理 2.6 で使われた不変量の構成はずっと一般化することもできる. 例えば Li-Liu [97] では, 閉多様体を底空間とする spin^c 4 次元多様体の族が与えられたとき, それに対して整数あるいは $\mathbb{Z}/2$ に値を取る数値不変量を Seiberg-Witten 方程式により定義している. さらに一般に, (主 $SO(3)$ 束 $\cdot \text{spin}^c$ 構造の同型類を保つなどの) 適当な条件を満たす自己微分同相のなす群を構造群

とする任意の 4 次元多様体バンドルに対して, $SO(3)$ -Yang-Mills 反自己双対方程式・Seiberg-Witten 方程式の情報をパッケージ化した特性類を定義することができる (筆者 [77]). [77] の特性類は底空間が任意の位相空間の場合に定義できるが, 特に底空間が閉多様体の場合にその基本類と [77] の特性類のペアを取ると, [97] の数値的不変量が復元される. また, Bauer-Furuta 不変量の族版も同様に考えることができる. Bauer と古田の論文 [19, Theorem 2.6] や古田のプレプリント [50] にも構成のやり方が書かれており, その後 Szymik [138] も改めて定式化を行った. 族の Bauer-Furuta 不変量は族の Seiberg-Witten 不変量を復元する (Baraglia・筆者 [15]).

5 族に対する Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似

2 節の多くの結果, 具体的には定理 2.11, 定理 2.12, 定理 2.10, 定理 2.13 定理 2.14, 定理 2.7, 定理 2.8 は全て族に対する Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似に基づく. この方法の基本的な考え方と, この方法から 4 次元多様体の族に具体的にどのような制約が得られるかの例を説明する.

5.1 基本的描像

まず設定を書こう. B を有限 CW 複体とする. 大抵の実用上はコンパクト多様体で構わない. X を向き付けられた可微分閉 4 次元多様体とする. $X \rightarrow E \rightarrow B$ を X の向き付けられた滑らかなファイバー束とする. ここで向き付けられた滑らかなファイバー束とは, その構造群が向きを保つ自己微分同相写像のなす群 $\text{Diff}^+(X)$ に簡約していることと定義する.

注意 5.1 B が滑らかな多様体の場合は, E をバンドル同型で取り替えて, 全空間 E が滑らかな多様体かつ射影 $E \rightarrow B$ が滑らかな写像になるようにできる [117]. 通常簡単のために B をはじめから滑らかな多様体と仮定することが多いが, 族のゲージ理論において底空間 B が可微分多様体であることが本質的に必要になる場面は今のところ現れていないと思われる. これは, 線型楕円型作用素の族の指数 [5] の考察において, 底空間の滑らかさが必要でないことと似た事情と理解することができる.

さらに E に沿って Seiberg-Witten 方程式を書くための付加データを固定しよう. (正確を期すために書くが, 例えば spin^c 構造に不慣れな場合この段落を無視して読んでも差し支えない.) まず, X に spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ が与えられたとし, E にはファイバーごとに $\mathfrak{s}$ のコピーが連続的に与えられたとする. 正確に述べると, E の構造群が, spin^c 4 次元多様体 $(X, \mathfrak{s})$ の自己同型群に簡約しているということである. この状況を, spin^c 4 次元多様体 $(X, \mathfrak{s})$ の滑らかなファイバー束が与えられたと言い表し, $(X, \mathfrak{s}) \rightarrow E \rightarrow B$ という記号で書こう³⁾. さらにファイバーごとに Riemann 計量の族が B に沿って連続的に与えられたとする. これを E の fiberwise Riemannian metric という.

以上の設定で, E のファイバーごとに Seiberg-Witten 方程式が連続的に乗っている状況が手に入る. ここで, B のコンパクト性を使うと, 3.3 節で説明した Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似を B 上で一斉に行うことができる. 結果として出てくるものは, 有限ランクの実ベクトル束 $V_{\mathbb{R}} \rightarrow B, W_{\mathbb{R}} \rightarrow B$ と有限ランクの複素ベクトル束 $V_{\mathbb{C}} \rightarrow B, W_{\mathbb{C}} \rightarrow B$ および, それらの直和の Thom 空間の間のファイバーを保つ連続写像

$$\begin{array}{ccc} f : \text{Th}(V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{C}}) & \longrightarrow & \text{Th}(W_{\mathbb{R}} \oplus W_{\mathbb{C}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xlongequal{\quad} & B \end{array} \quad (5.1)$$

1 である。3.3 節で説明した unparametrized なときと全く同様に, $V_{\mathbb{R}}, W_{\mathbb{R}}$ と $V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}$ にはある Lie 群
 2 G がファイバーごとに作用している。具体的には, $\mathfrak{s}$ が一般の spin^c 構造のときは $G = S^1$, $\mathfrak{s}$ として
 3 スピン構造を特に考えているときは $G = \text{Pin}(2)$ である。例えば $G = S^1$ のときは, $V_{\mathbb{R}}, W_{\mathbb{R}}$ への作用
 4 は自明で, $V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}$ へは複素ベクトル束の構造の複素スカラー倍の制限で G が作用している。底空間
 5 B には自明に作用しているとみなすと, B 上の G 同変ベクトル束が手に入ったことになる。そして,
 6 それら (の Thom 空間) の間の写像である f は, やはり G 同変写像になっている。

7 3.3 節では, 球面の間の G 同変写像 f の存在から, 4 次元多様体の特性数の間の不等式が Borsuk–
 8 Ulam 型の定理の帰結として得られ, これらが Donaldson の対角化定理や 10/8 不等式であることを
 9 説明した。このストーリーの族版は, 4 次元多様体に付随するあるベクトル束 (の Thom 空間) の間
 10 の G 同変写像 f の存在から, これらのベクトル束の特性類への制約が得られる, というものである。
 11 (実際には, これらのベクトル束の特性類と, unparametrized な場合に考えられていた特性数の両方
 12 を用いて結果が述べられることが多い。)

13 また, 3.4 節同様やはり安定ホモトピーに有限次元近似の取り方を吸収させることで, 族に対する
 14 Bauer–Furuta 不変量を定式化することもできる。ただし, 実際にこれを計算しようとする, 有限
 15 次元近似で生じた対象の自明化を固定する必要がしばしば生じ, 自明化の一意性が保証できない場合
 16 には本質的な障害となる。これは unparametrized な場合には起きなかった問題である。

17 5.2 族に対する有限次元近似から得られる制約

18 それでは実際に族に対する Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似から得られる制約がどのような主
 19 張か具体的に述べよう。定理 2.13 の証明に用いられた, Baraglia による Donaldson の対角化定理の
 20 族版 ([11], 定理 5.1) が一番説明しやすいので, それをメインの例に取る。まず, $B, (X, \mathfrak{s}), (X, \mathfrak{s}) \rightarrow$
 21 $E \rightarrow B$ は全て 5.1 節の通りとする。すなわち, B は有限 CW 複体, X は向き付けられた可微分閉 4
 22 次元多様体, $\mathfrak{s}$ はその上の spin^c 構造, E は spin^c 4 次元多様体 $(X, \mathfrak{s})$ の B 上の滑らかなファイバー
 23 束とする。 E に与えられているファイバーごとの spin^c 構造を $\mathfrak{s}_E$ とおく。

24 ファイバー束 $X \rightarrow E \rightarrow B$ には, ベクトル束

$$25 \quad \mathbb{R}^{b^+}(X) \rightarrow H^+(E) \rightarrow B$$

26 が, 同型を除いて一意的に付随する。これは spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ とは無関係で, E の向き付けられた位相
 27 的ファイバー束, すなわち $\text{Homeo}^+(X)$ 束としての構造のみから決まる。(構造群が $\text{Diff}^+(X)$ に簡
 28 約していることも使わない。) 直感的には, このベクトル束は「各 $b \in B$ の上に, $H^2(E_b; \mathbb{R})$ の正定
 29 値の最大次元部分空間が乗っている」ようなものである。正確に述べると以下のようなになる。まず,
 30 $\text{Gr}^+(H^2(X; \mathbb{R}))$ を, 交叉形式に関して正定値な $H^2(X; \mathbb{R})$ の最大次元部分空間の集合とする。この
 31 一種の「Grassmann 多様体」は可縮であることが示せる。(例えば [97] 参照。) さて, $\text{Homeo}^+(X)$ は
 32 自然に $\text{Gr}^+(H^2(X; \mathbb{R}))$ に作用している。したがって, E の $\text{Homeo}^+(X)$ 束としての構造に伴い
 33 て, この Grassmann 多様体をファイバーとするファイバー束 $\text{Gr}^+(H^2(X; \mathbb{R})) \rightarrow \text{Gr}_E^+ \rightarrow B$ が得ら
 34 れる。ファイバー $\text{Gr}^+(H^2(X; \mathbb{R}))$ が可縮なので, このファイバー束 Gr_E^+ の切断はホモトピーを除い
 35 て一意的に存在する。ひとつの切断を選ぶごとにベクトル束 $\mathbb{R}^{b^+}(X) \rightarrow H^+(E) \rightarrow B$ が得られ, Gr_E^+
 36 の切断の (ホモトピーを除いた) 一意性から, その同型類は E から一意的に定まる。

37 一般に, ベクトル束 $H^+(E)$ の標準的な選び方はない。もし E の構造が $\text{Diff}^+(X)$ に簡約している

1 ことを用いて良ければ, E のファイバーごとに Riemann 計量の族を B に沿って連続的に与えると,
 2 自己双対調和 2 形式の空間をファイバーごとに考え束ねたベクトル束が $H^+(E)$ のひとつの選び方を
 3 与える. ただ, non-smoothable な族への応用のためには, 位相的 4 次元多様体バンドルを扱う必要
 4 があるので, 上のように E の $\text{Homeo}^+(X)$ 束の構造のみを用いた定義を与えておくのは重要である.
 5 次に, E の構造が $\text{Diff}^+(X)$ に簡約していることと, ファイバーごとに与えられた spin^c 構造 $\mathfrak{s}_E$
 6 を用いて, 別のバンドル (正確には virtual vector bundle) を定義しよう. まず, E のファイバーご
 7 とに Riemann 計量の族を取る. また, $\mathfrak{s}_E$ によってファイバーごとに与えられる, 行列式直線束の E
 8 に沿った族を考え, その接続全体をファイバーごとに考える. これは, ファイバーが可縮 (もっと強
 9 く, $\Omega^1(X)$ でモデルされる無限次元アファイン空間) であるような B の上のファイバー束である. こ
 10 のファイバー束の切断をひとつ取ることは, 行列式直線束の接続の族 $\{A_b\}_{b \in B}$ を取ることにあたる.
 11 このような切断をひとつ選ぶと, ファイバーごとに spin^c Dirac 作用素を考えることができ, その族
 12 $\{\not{D}_{A_b}\}_{b \in B}$ が得られる. この作用素の族の指数

$$13 \quad \text{ind } \not{D}_E := \text{ind}\{\not{D}_{A_b}\}_{b \in B} \in K(B)$$

14 は, 途中で取ったファイバーごとの Riemann 計量の族や接続の族の選び方によらない. (両者とも不
 15 定性が可縮だからである.)

16 以上で, E に付随して実ベクトル束 $H^+(E)$ と複素 (virtual) ベクトル束 $\text{ind } \not{D}_E$ が手に入った. こ
 17 の 2 種類のベクトル束は, Seiberg–Witten 方程式の線型化に現れる二種類の線型微分作用素, すな
 18 わち Atiyah–Hitchin–Singer 作用素という実線型な作用素と, Dirac 作用素という複素線型な作用素
 19 に対応する. $H^+(E)$ と $\text{ind } \not{D}_E$ は言わば「ファイバー束 E の線型化」として現れるベクトル束であ
 20 る. これらを用いると, 5.1 節で説明した族の有限次元近似 (5.1) に現れたベクトル束の説明ができる.
 21 (5.1) における実ベクトル束 $V_{\mathbb{R}} \rightarrow B, W_{\mathbb{R}} \rightarrow B$ と複素ベクトル束 $V_{\mathbb{C}} \rightarrow B, W_{\mathbb{C}} \rightarrow B$ は,

$$22 \quad W_{\mathbb{R}} - V_{\mathbb{R}} = H^+(E) \text{ in } KO(B), \quad V_{\mathbb{C}} - W_{\mathbb{C}} = \text{ind } \not{D}_E \text{ in } K(B) \quad (5.2)$$

23 という関係を満たすのである. やや標語的だが見やすくまとめると, 「サスペンションを除いて, 族の
 24 有限次元近似 (5.1) は

$$25 \quad \begin{array}{ccc} f : \text{ind } \not{D}_E & \longrightarrow & H^+(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xlongequal{\quad} & B \end{array} \quad (5.3)$$

26 という形」である. (本当は, $\text{ind } \not{D}_E$ は virtual ベクトル束であるし, また (適当にサスペンションを
 27 して本物のベクトル束の間の写像にしないと意味を持たない) Thom 空間の記号を省略している.)

28 これらのベクトル束 $H^+(E)$ と $\text{ind } \not{D}_E$ の特性類と特性数に, ゲージ理論を用いて制限をかけるの
 29 である. 現状では, non-smoothable な族を detect するには, ベクトル束 $H^+(E)$ の位相的捻れの情
 30 報のみが使われており, $\text{ind } \not{D}_E$ の方はそのランク, つまり単なる X の上の spin^c Dirac 指数の情
 31 報しか使われていない. (後で述べる問 8 参照.) 指数定理でこのランクを計算すると次の通りである:

$$32 \quad \text{rank}_{\mathbb{C}}(\text{ind } \not{D}_E) = (c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(X))/8. \quad (5.4)$$

次の Baraglia の定理が, Donaldson の対角化定理のひとつの族版を与えるもので, 定理 2.13 (「ほとんどの」単連結閉 4 次元多様体 X に対して $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ が弱ホモトピー同値でないこと) の証明はこれに基づく:

定理 5.1 (Baraglia [11] (2021)) B を有限 CW 複体とする. X は向き付けられた可微分閉 4 次元多様体, $\mathfrak{s}$ を X の上の spin^c 構造とし, $(X, \mathfrak{s}) \rightarrow E \rightarrow B$ を spin^c 4 次元多様体 $(X, \mathfrak{s})$ の B 上の滑らかなファイバー束とする. このとき, もしベクトル束 $H^+(E)$ の $b^+(X)$ 次の Stiefel–Whitney 類が非自明, すなわち $w_{b^+(X)}(H^+(E)) \neq 0$ ならば, 次の不等式が成り立つ:

$$c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(X) \leq 0.$$

注意 5.2 [11] でも述べられている通り, 定理 5.1 の仮定 $w_{b^+(X)}(H^+(E)) \neq 0$ は, 次の局所係数の Euler 類の非消滅に緩められる: $e(H^+(E)) \neq 0$ in $H^{b^+(X)}(B; \mathbb{Z}_w)$. ここで $\mathbb{Z}_w$ は, B 上のファイバーが $\mathbb{Z}$ の局所系で, $w = w_1(H^+(E))$ で決まるものである.

定理 5.1 の証明のスケッチを述べる前に, 定理 5.1 がなぜ Donaldson の対角化定理の族版と思えるのかを説明しよう. $B = \{\text{pt}\}$, $b^+(X) = 0$ と仮定する. このとき $w_{b^+(X)}(H^+(E)) \neq 0$ という仮定は自動的に満たされる. したがって定理 5.1 から, X 上の任意の spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ に対して $c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(X) \leq 0$ という不等式を得る. これと Elkies による対角化可能な格子の特徴付けの定理 [34] を合わせると, X の交叉形式が $\mathbb{Z}$ 上対角化可能と分かる. (現在知られている Seiberg–Witten 方程式から Donaldson の対角化定理を導く議論は全て, この議論同様 Elkies の定理に拠っている.)

定理 5.1 の証明のスケッチ まず, (5.3) で説明した族に対する有限次元近似 f , より正確には (5.1) を考える. 写像 f は S^1 同変になっている. (5.1) の S^1 不変部分を取って図式

$$\begin{array}{ccc} \text{Th}(V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{f} & \text{Th}(W_{\mathbb{R}} \oplus W_{\mathbb{C}}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Th}(V_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{f^{S^1}} & \text{Th}(W_{\mathbb{R}}) \end{array} \quad (5.5)$$

を得る. 垂直方向の写像は包含写像である. ここに関し $H_{S^1}^*(-; \mathbb{Z}/2)$ を適用し可換図式

$$\begin{array}{ccc} H_{S^1}^*(\text{Th}(V_{\mathbb{R}} \oplus V_{\mathbb{C}})) & \xleftarrow{f^*} & H_{S^1}^*(\text{Th}(W_{\mathbb{R}} \oplus W_{\mathbb{C}})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{S^1}^*(\text{Th}(V_{\mathbb{R}})) & \xleftarrow{(f^{S^1})^*} & H_{S^1}^*(\text{Th}(W_{\mathbb{R}})) \end{array} \quad (5.6)$$

を得る. (係数の $\mathbb{Z}/2$ は省略した. 以下断らなければ, この節の終わりまでの全てのコホモロジーは $\mathbb{Z}/2$ 係数とする.) この図式 (5.6) の右上から $\mathbb{Z}/2$ 係数の S^1 同変 Thom 類

$$\tau_{S^1}(W_{\mathbb{R}} \oplus W_{\mathbb{C}}) \in H_{S^1}^*(\text{Th}(W_{\mathbb{R}} \oplus W_{\mathbb{C}}))$$

を取り, 図式 (5.6) の左下まで 2 通りの経路で送り, 図式 (5.6) の可換性を使って等式を書く. ($\mathbb{Z}/2$ 係数の S^1 同変) Thom 同型を複数回使うと, ある $\alpha \in H_{S^1}^*(B)$ が存在し

$$\alpha e_{S^1}(V_{\mathbb{C}}) = e_{S^1}(H^+(E)) e_{S^1}(W_{\mathbb{C}}) \text{ in } H_{S^1}^*(B) \quad (5.7)$$

1 が成立すると分かる. ここで $e_{S^1}(-)$ は $\mathbb{Z}/2$ 係数の S^1 同変 Euler 類である. (α は f の $H_{S^1}^*(-; \mathbb{Z}/2)$
 2 というコホモロジー理論に関する写像度である.) (5.7) において $H^+(E)$ が現れるのは, f^{S^1} はファ
 3 イバーごとに単射線型なバンドル写像 $f^{S^1} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow W_{\mathbb{R}}$ から誘導されており, Hodge 理論から

$$4 \quad \text{Coker}(f^{S^1} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow W_{\mathbb{R}}) \cong H^+(E)$$

5 が成立することの帰結である. さて, S^1 は B および $H^+(E)$ に自明に作用していたから,

$$6 \quad e_{S^1}(H^+(E)) = w_{b^+(X)}(H^+(E)) \otimes 1 \in H^*(B) \otimes H_{S^1}^*(\text{pt}) = H_{S^1}^*(B)$$

7 である. したがって $w_{b^+(X)}(H^+(E)) \neq 0$ ならば $e_{S^1}(H^+(E)) \neq 0$ となる. また一般に, 複素ベク
 8 トル束 $V \rightarrow B$ に, 複素スカラー倍の制限で S^1 がファイバーごとに作用しているとしよう. $H_{S^1}^*(\text{pt})$
 9 は 1 変数の多項式環と同型であるが, その変数を U をおくと, S^1 同変 Euler 類 $e_{S^1}(V)$ は (非同変
 10 の) Chern 類たちが係数の U の多項式で書けるのだった. (今は $\mathbb{Z}/2$ 係数だから Chern 類の代わり
 11 に Stiefel–Whitney 類になる.) これを (5.7) の $e_{S^1}(V_{\mathbb{C}}), e_{S^1}(W_{\mathbb{C}})$ に代入して, 条件 $e_{S^1}(H^+(E)) \neq$
 12 0 を使って両辺の U の最高次を比較すると, $\text{rank}_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} - \text{rank}_{\mathbb{C}} W_{\mathbb{C}} \leq 0$ が得られると容易に分かる.
 13 これを (5.2), (5.4) と合わせると, 所望の不等式 $c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(X) \leq 0$ が得られる. $\square$

14 **注意 5.3** 定理 5.1 の証明の議論は, Bauer–Furuta [19] による Seiberg–Witten 方程式の有限次
 15 元近似から Donaldson の対角化定理を証明する議論の族版である. また, $(X, \mathfrak{s})$ がスピンのときは,
 16 以上の議論における $H_{S^1}^*(-; \mathbb{Z}/2)$ の代わりに, $H_{\text{Pin}(2)}^*(-; \mathbb{Z}/2)$, $K_{\text{Pin}(2)}$ という同変コホモロジー理
 17 論に対して全く同様の議論を実行することも可能である. (Baraglia [11] 参照. $H_{\text{Pin}(2)}^*(-; \mathbb{Z}/2)$ を用
 18 いることにより, 注意 2.4 に述べたように, $\pi_n(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X))$ が同型にならないこと
 19 を保証できる n の評価が改善する.) これらはそれぞれ, Donaldson の Theorems B, C [30], 古田の
 20 $10/8$ 不等式 [47] の族版にあたる. ただし, $K_{\text{Pin}(2)}$ を用いる場合は, ベクトル束 $H^+(E) \rightarrow B$ に K
 21 理論的な向き (spin^c 構造) が $\text{Pin}(2)$ 作用と両立するように入ることが必要となる. これは議論の途
 22 中で Thom 同型を用いるため, 応用を阻むひとつの障害となっている. (後に述べる問 10 参照.)
 23 ordinary cohomology でも $\mathbb{Z}$ 係数で議論を行おうとすると事情は同じで, $H^+(E)$ の向きが必要にな
 24 るが, 上での議論のように $\mathbb{Z}/2$ 係数に落したり, 注意 5.2 で述べたように局所系を用いて回避する
 25 ことができる. 現在現れている応用では $\mathbb{Z}/2$ 係数に落とした議論のみで十分だが, 局所系を用いるこ
 26 とでさらなる応用が出ないかどうか興味深い問題である. (後に述べる問 9 参照.)

27 以上の議論は, 従来のゲージ理論における議論の族版, という位置づけであるが, 次の定理は従来
 28 の (つまり unparametrized な) ゲージ理論には対応物が存在しない議論により示される:

29 **定理 5.2 (Baraglia–K. [15] (2019))** B を有限 CW 複体とする. X は向き付けられた可微分
 30 閉 4 次元多様体とする. $b_1(X) = 0$ かつ $b^+(X) \equiv 3 \pmod{4}$ と仮定する. $\mathfrak{s}$ を X の上の spin^c 構造
 31 とし, Seiberg–Witten 不変量 $SW(X, \mathfrak{s})$ が奇数と仮定する. このとき, spin^c 4 次元多様体 $(X, \mathfrak{s})$ の
 32 B 上の滑らかなファイバー束 $(X, \mathfrak{s}) \rightarrow E \rightarrow B$ に対して次が成り立つ:

$$33 \quad c_1(\text{ind } \not{D}_E) \pmod{2} = w_2(H^+(E)) \text{ in } H^2(B; \mathbb{Z}/2).$$

34 特に, $X = K3$, $\mathfrak{s}$ を X の上の標準的なスピン構造ならば $w_2(H^+(E)) = 0$ が成り立つ.

35 定理 5.2 の証明はこれまで説明してきた Seiberg–Witten の族の有限次元近似に Steenrod 平方作

1 用素を作用させて制約を引き出すことでなされる. この定理 5.2 は $\text{Diff}(K3)$ と $\text{Homeo}(K3)$ の比較
2 に関する定理 2.10 の証明で用いられた.

3 5.3 境界付き 4 次元多様体の族に対する制約

4 Baraglia による対角化定理の族版 (定理 5.1) は, 以下のように境界付き 4 次元多様体の族へと一
5 般化できる. 思い出すと, Frøyshov 不変量 $\delta(Y, \mathfrak{t})$ は, 向き付けられた spin^c 有理ホモロジー 3 球面
6 $(Y, \mathfrak{t})$ に対する数値的なゲージ理論的不変量であった. Frøyshov 不変量はモノポール Floer ホモロ
7 ジー [91] を用いて定義されるが, Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型や Heegaard Floer ホモロ
8 ジーを用いても定義可能である (注意 5.4). 特に Heegaard Floer ホモロジーによる定義があるため,
9 多くの 3 次元多様体に対して組み合わせ論的な計算ができる. 元々 Frøyshov 不変量は, Donaldson
10 の対角化定理の境界付き 4 次元多様体への拡張を行った Frøyshov の 1996 年ごろからの一連の仕事
11 [42, 43, 45] で導入された. (Frøyshov によるこの拡張 [42, 45] の主張は, すぐ後の定理 5.3 において
12 $B = \{\text{pt}\}$, X が負定値とするとしたものである.) Donaldson の対角化定理は, 可約解と呼ばれるモ
13 ジュライ空間の特異点の情報を用いて示される定理であった. 3 次元多様体 Y の Frøyshov 不変量は,
14 直感的には, Y 上の可約解以外の Seiberg–Witten 方程式の解 (既約解) から Y 上の可約解に, $Y \times$
15 $\mathbb{R}$ 上の 4 次元の Seiberg–Witten 方程式を通してどのくらい伝搬があるかを測ることで定義される.

16 それでは Baraglia による対角化定理の族版 (定理 5.1) の境界付き 4 次元多様体の族への一般化を
17 述べよう. 境界付き 4 次元多様体の微分同相群・同相群の比較に関する定理 2.14 はこれに基づく:

18 **定理 5.3 (K.-谷口 [81] (2020))** X を滑らかな向き付けられた境界付き 4 次元多様体で, $b_1(X) =$
19 0 とする. 境界 $\partial X = Y$ は連結で, 有理ホモロジー 3 球面であるとする. $\mathfrak{s}$ を X 上の spin^c 構造とす
20 る. $(X, \mathfrak{s}) \rightarrow E \rightarrow B$ を spin^c 4 次元多様体 $(X, \mathfrak{s})$ の B 上の滑らかなファイバー束とし, ファイバー
21 ごとに境界への制限を行ったものが自明な spin^c 3 次元多様体束であると仮定する. このとき, もし
22 $w_{b^+}(X)(H^+(E)) \neq 0$ ならば, 次の不等式が成立する:

$$23 \quad (c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(X))/8 \leq \delta(Y, \mathfrak{s}|_Y).$$

24 この定理で $B = \{\text{pt}\}$, X が負定値とすると, Frøyshov の定理 [42, 45] を復元する. また $Y = S^3$
25 とすると Baraglia の定理 5.1 を復元する.

26 定理 5.3 の証明は, Seiberg–Witten 方程式の族の有限次元近似を, 境界付き 4 次元多様体の族に対し
27 て行うことでなされる. この有限次元近似の受け皿として, 3.5 節で説明した Manolescu の Seiberg–
28 Witten Floer 安定ホモトピー型 [108] を用いる. なお, スピン 4 次元多様体の族に対して $\text{Pin}(2)$ -同
29 変コホモロジーを用いた議論も行うことができ, より精密な結果が得られる (注意 5.3 参照). この
30 場合は, Frøyshov 不変量 δ の代わりに, Manolescu の不変量 α, β, γ [110] が現れる. この中の β は,
31 Manolescu が三角形分割予想の否定的解決 [110] に用いたものである.

32 **注意 5.4** Frøyshov 不変量と等価な不変量はいくつかの Floer ホモロジー理論で現れているため, 相
33 互関係をここで整理しておく. 現状, モノポール Floer ホモロジー [91] で定義される Frøyshov 不変量
34 h , Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型で定義される Frøyshov 不変量 δ [110], Heegaard Floer
35 ホモロジーで定義される correction term d [125] が良く使われるが, これらは全て等価で, 以下の定
36 数倍で互いに関係している: $\delta(Y, \mathfrak{t}) = -h(Y, \mathfrak{t}) = d(Y, \mathfrak{t})/2$. δ と h の等価性は [98, Corollary 1.3],
37 h と d の等価性は例えば [105, Remark 1.1] を参照.

1 6 その他のトピック

2 ここまでで述べるができなかった、族のゲージ理論のいくつかの他の側面にごく簡単に触れる。
3 残り許された紙数にも限られているので、関係する文献を挙げて注意を喚起するのに留める。

4 6.1 Symp vs. Diff

5 Kronheimer [90] は、族のゲージ理論を用いて、シンプレクティック 4 次元多様体 (X, ω) に対する
6 シンプレクティック微分同相群 $\text{Symp}(X, \omega)$ と微分同相群 $\text{Diff}(X)$ との比較を行っている。使われる
7 基本的な道具は、シンプレクティック形式のコホモロジー類とのある関係を満たす spin^c 構造に対し
8 ては、シンプレクティック構造を用いた摂動に関する摂動 Seiberg–Witten 方程式の解が消えるとい
9 う Taubes の結果 [140, 139] である。この消滅性質を下に、Seiberg–Witten 方程式の族を用い、 ω と
10 アイソトピックなシンプレクティック形式のなす空間の上のコホモロジカルな不変量を作る。このシ
11 ンプレクティック形式の空間の非自明なホモトピー類の存在は $\text{Symp}(X, \omega)$ と $\text{Diff}(X)$ の差を意味す
12 る。非自明なホモトピー類を detect するため、コホモロジカルな不変量の非自明性を、代数曲面の特
13 異点解消に伴う族に対して実際に計算することでチェックするのである。この計算は、Kähler 曲面に
14 対しては摂動 Seiberg–Witten 方程式の解が代数曲線と対応するという事実に着する。

15 最近になって、Smirnov [135, 136, 137] がこの Kronheimer の議論を急速に発展させている。

16 6.2 Riemann 計量の族

17 ここまでは 4 次元多様体の族を考えてきたが、多様体の族としては自明なもの（積束）を考え、そ
18 の上で幾何学的な由来を持つ Riemann 計量の族を考えることで得られる応用もある。この場合は、4
19 次元多様体バンドルに対する結果ではなく、4 次元多様体自体に対する主張が得られることになる。

20 まず基本的なのは、Kronheimer–Mrowka による Thom 予想の解決 [84] である。これは、 $\mathbb{CP}^2$ に
21 滑らかに埋め込まれた曲面の種数を、そのホモロジー類の言葉で評価する古典的な問題で、Seiberg–
22 Witten 理論登場直後に得られた最も鮮烈な応用の一つである。この証明には、Seiberg–Witten 方
23 程式の計量に沿った 1-parameter family を考え、「壁越え」と呼ばれる現象が利用される。重要なこと
24 は、種数の十分低い（専門用語を避けず正確に述べると、adjunction 不等式を破るほど種数の低い）
25 曲面の近傍を引き伸ばして得られる Riemann 計量について（非摂動）Seiberg–Witten 方程式の解は
26 存在しない、という事実である。曲面の近傍を引き伸ばしていくことで、計量の 1-parameter family
27 が手に入る。この族に対する Seiberg–Witten 方程式を考えることがポイントである。

28 この考え方を一般化すると、複数の曲面が 4 次元多様体に埋め込まれているときに、できるだけ独立
29 に引き伸ばすことで、計量の高次元の族が得られる。この族に伴った Seiberg–Witten 方程式の族を考
30 察することで、曲面の配位に制約をかけることができる（筆者 [74, 75]）。この計量の族の構成は、反自
31 己双対方程式の族に対する考察の中で Frøyshov [44] も行っている。また微分同相写像と adjunction
32 不等式の議論の組み合わせとしては、Baraglia の [9] がある。また筆者の [75] では、上で述べた種数
33 の十分低い曲面の引き伸ばしに伴う Seiberg–Witten 方程式の解の消滅を系統的に利用し、コホモロ
34 ジカルな不変量を定義した。これは 6.1 節で説明した Kronheimer の議論 [90]、すなわちシンプレク
35 ティック形式に関する摂動を用いて、摂動 Seiberg–Witten 方程式の解の消滅に基づきコホモロジ
36 カルな不変量が定義できる仕組みとパラレルである。

37 また、Kronheimer–Mrowka–Ozsváth–Szabó による exact triangle の論文 [82]（や F. Lin による
38 その Pin(2)-モノポール版 [101]）では、これにかなり近い考え方で計量の 2-parameter family を考

1 えている．普通の Floer ホモロジーの構成には 1-parameter family の情報までが（不変性の証明のた
2 めに）必要だが，やはり幾何学的な由来のある計量の 2-parameter を考えることで，Floer ホモロジー
3 の計算公式を得ているのである．この考え方のさらなる高次元の族への一般化として，F. Lin [100]
4 における A_∞ 加群の構造，Bloom [21] や Kronheimer–Mrowka の [87] のスペクトル系列がある．

5 6.3 正スカラー曲率計量の族

6 与えられた可微分多様体 X が（至るところ）正スカラー曲率を持つ計量を許容するか，というのは
7 Riemann 幾何の古典的な問題である（その重要性を表すものとして例えば [67] 参照）．さて，この問
8 題の族版として， X が正スカラー曲率計量を許容するときに，正スカラー曲率計量全体の空間のホモ
9 トピー群を調べる問題が考えられる．高次元では手術理論と指数定理に基づきかなり詳しく調べられ
10 ている（例えば [22]）が，4 次元では手術が高次元同様には上手くいかないため同じ手法は使えない．

11 しかし 4 次元では族の Seiberg–Witten 理論が有効に機能する．これは，正スカラー曲率計量に
12 対して Seiberg–Witten 方程式の解が消滅すること [143] の族への拡張である．可微分多様体 X に
13 対し， $\text{PSC}(X)$ を X 上の正スカラー曲率計量全体の空間とする．まず，Ruberman [131] により，
14 $\text{PSC}(X) \neq \emptyset$ かつ $\pi_0(\text{PSC}(X)) \neq 0$ なる 4 次元多様体 X が存在することが初めて示された．（具体
15 的には， $X = m\mathbb{CP}^2 \# n(-\mathbb{CP}^2)$ という形の 4 次元多様体である．）これは Seiberg–Witten 方程式の
16 1-parameter family によって構成する微分同相写像の不変量を用いるものである．筆者の [76] では，
17 Seiberg–Witten 方程式の 2-parameter family を用いて，可換な微分同相写像の組に対する不変量の
18 非自明性を示し，[131] の手法が使えない範囲でも $\text{PSC}(X)$ が可縮にならない場合があることを示し
19 た．（この不変量は，4 節で説明した [97, 77] の不変量の特別な場合とみなすことができる．）

20 また少々異なる応用として，Baraglia・筆者 [16] は，族の Seiberg–Witten 理論が，与えられた群
21 作用に対して不変な正スカラー曲率計量に対する障害として有効であることを示した．もう少し詳し
22 く述べると，正スカラー曲率計量を持つある具体的な 4 次元多様体 X に具体的な involution が与え
23 られているとき，この involution に対して不変な正スカラー曲率計量が存在しないと示した．（この
24 タイプの定理は，同変指数定理の典型的な応用例（例えば [54]）であるが，非線形の Seiberg–Witten
25 方程式の（同変版でなく）族から出てきたのは面白い．）証明は，一般に空間 X に involution がある
26 と，Borel 構成により，任意の $n \geq 1$ に対して実射影空間 $\mathbb{RP}^n$ 上に X の族ができるが，この族に対
27 する族の Seiberg–Witten 不変量の非消滅を示す，というものである．（もし involution 不変な正スカ
28 ラー曲率計量が存在すると，この計量ごと Borel 構成した族に対する parametrized moduli space が
29 空となり，族の Seiberg–Witten 不変量が自明でなければならない．）

30 7 いくつかの問題

31 族のゲージ理論とその応用に関連するいくつかの問題を述べる．

32 問 2 既約な 4 次元多様体 X であって， $\pi_0(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(X))$ が単射でない例は？

33 例えば $K3$ 曲面はどうか？現時点で $\pi_n(\text{Diff}(K3)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(K3))$ について分かっていること
34 は， $\pi_0(\text{Diff}(K3)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(K3))$ が全射でなく（定理 2.4）， $\pi_1(\text{Diff}(K3)) \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(K3))$
35 が全射でない（定理 2.10）ことだけである．同様に次の問題の答えも分かっていない．

36 問 3 $\pi_n(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X))$ が単射でも全射でもない 4 次元多様体 X と自然数 n の例
37 は？特に $n = 0$ では？

高次ホモトピー群については, $\pi_1(\text{Diff}(S^4)) \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(S^4))$ が単射でないこと (定理 2.9), $\pi_1(\text{Diff}(K3)) \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(K3))$ が全射でないこと (定理 2.10) が分かっているが, これ以上高次のホモトピー群の比較についてはまだ何も分かっていないと思われる:

問 4 $n \geq 2$ に対して $\pi_n(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X))$ が同型でない 4 次元多様体 X の例は?

逆の方向として, ゲージ理論で答えられる問題ではないと思われるが, 次のことも気になる:

問 5 4 次元多様体 X と自然数 n であって, $\pi_n(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X))$ が同型な例は?

Freedman 理論に関わるどころでは次が気になる:

問 6 Freedman 理論の族版を行い, 4 次元多様体の位相的ファイバー束の分類を行えないか? 例

えば, Quinn・Perron による 4 次元多様体の位相的写像類群に対する結果 (定理 2.2) のように,

$\pi_n(\text{Homeo}(X))$ ($n > 0$) を 4 次元多様体の何らかのより簡単な不変量で表すことはできないか?

これがもし部分的にでもできると, 族のゲージ理論と合わせて面白い結果が出そうだが, どれくらい難しいのか筆者には見当が付かない.

さて, 最近 Baraglia [12] は, $\pi_1(\text{Diff}(K3))$ の非自明な元を数多く見つけた. これも族の Seiberg-Witten 理論により見つかる例である. これに関しては次が気になる:

問 7 Baraglia による $\pi_1(\text{Diff}(K3))$ の非自明な元の $\pi_1(\text{Diff}(K3)) \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(K3))$ による像は自明か?

もしこれが肯定的に解けると (つまり $\pi_1(\text{Homeo}(K3))$ の中で自明だと), $\pi_1(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(X))$ が単射でないことが $X \neq S^4$ で分かった 4 次元における初めての例となる.

ここからは族のゲージ理論の手法に関する問題を挙げる. 5 節から記号を引用する. 思い出すと, spin^c 4 次元多様体 $(X, \mathfrak{s})$ の族 $E \rightarrow B$ が与えられると, それに伴い実ベクトル束 $H^+(E) \in KO(B)$ と族の指数 $\text{ind } \not{D}_E \in K(B)$ が得られるのだった. non-smoothable な族を detect するこれまでの研究では, $H^+(E)$ の位相的捻れのみが使われており, $\text{ind } \not{D}_E$ の方は B の 1 点に制限して得られる情報しか使っていない.

問 8 族の指数 $\text{ind } \not{D}_E$ の位相的捻れを用いて non-smoothable な族を detect できないか?

$H^+(E)$ を考えるアドバンテージは, これは E が位相的バンドルでも明らかに意味が付くことである. (non-smoothable な族を detect するには, 位相的バンドルでも意味が付く不変量に, 族が滑らかという仮定から制約をかける必要がある.) したがって問 8 へ答えるための最初の一步は族の指数の位相的定義であろうか. 部分的には Novikov の定理 [124] (の一般化 [132, Chapter 3]) によって, $\mathbb{Q}$ 上で族の指数に位相的意味が付く場合があり, これが加藤・中村・筆者の [65] では有効に使われている. これが何かのヒントになるかもしれない.

なお, Baraglia [10] では, $\text{ind } \not{D}_E$ を用いて 4 次元多様体の tautological 類 (Miller-Morita-Mumford 類) に関する制約を得ている.

次に, 素朴な疑問として次は気になる:

問 9 Baraglia による Donaldson の対角化定理の族版 (定理 5.1) において, $\mathbb{Z}/2$ 係数に落とさず, $w_1(H^+(E))$ で決まる $\mathbb{Z}$ の局所系を用いて $\mathbb{Z}/2$ では出ない結果 (特に non-smoothable な族の detect) を出せないか?

Baraglia による Donaldson の対角化定理の族版 (定理 5.1) では, 注意 5.2 で述べたように, $\mathbb{Z}/2$ 係数に落とさず $w_1(H^+(E))$ で決まる $\mathbb{Z}$ の局所系を用いることができる. ただ, 現状で考えられてい

1 族の具体例の non-smoothability は, $\mathbb{Z}/2$ 係数から出てくる制約で detect できる. $\mathbb{Z}$ の局所系が本
2 質的に効いてくる例があると面白いと思う.

3 同様に, コホモロジー理論を変えてどれくらい結果が変わるかという観点からは次の問題もある:

4 問 10 10/8 不等式の族版を用いて non-smoothable な族の detect はできるか?

5 Baraglia [11] は族に対する 10/8 不等式がどのような制約かを書き下しているが, 現状ではこれを
6 用いて non-smoothable な族が detect された結果は知られていない. (加藤・中村・筆者 [65] では,
7 限定的な状況で, K 理論を用いて non-smoothable な族を detect している.) まず難しい点としては,
8 K 理論の向きが 4 次元多様体バンドル E に伴うベクトル束 $H^+(E)$ に入ることが必要となり, これ
9 が実例を作る上で一つの制約である. KO 理論やねじれ K 理論 (例えば [53] 参照) が使える可能性
10 もあるが, 色々な実例を考えると, 族のねじれが上手く K 理論に反映しないという問題もある.

11 また, 族に対するゲージ理論は, 族の底空間が多様体であるということを必要としていない. (注
12 意 5.1 参照.) しかし今ある応用は全て, 底空間が滑らかな多様体の場合の考察のみから得られている.

13 問 11 族の底空間が多様体で無くても良いという自由度を用いて Diff と Homeo の比較へ応用で
14 きないか?

15 ここで, 族に対する理論と同変理論の関係について述べよう. 一般に, 空間 X に群 G の作用があ
16 ると, 分類空間 BG 上の X の族が Borel 構成で得られる. したがって族に対する制約を得ると, 自
17 動的に群作用に対する制約をも得られる. 中村 [120], Baraglia [8], 加藤・中村・筆者 [65] では, 族
18 のゲージ理論による制約を用いて, 4 次元多様体の上の non-smoothable な位相的群作用を detect し
19 ている. 一方, Liu-中村 [107], 中村 [119], 清野 [71], 加藤 (佑) [66] らは, 同変ゲージ理論やその
20 変種により non-smoothable な位相的群作用を detect している. これらの non-smoothable な位相的
21 群作用から Borel 構成で得られる族は, 全て non-smoothable な族の候補である. これらの内どれく
22 らいが実際に non-smoothable な族なのだろうか? 同変理論では non-smoothable な族を detect でき
23 ないため, これは非自明な問いである. 一方, 同変理論の方が, 族の理論よりもある意味で「精密」で
24 ある. 例えば, 群作用としては非自明だが Borel 構成で対応する族は自明な状況を, 実際に同変ゲー
25 ジ理論やその変種により detect できる ([13], [79]). 以上の状況を問いとしてまとめておく:

26 問 12 族のゲージ理論と同変ゲージ理論はどの程度違うのか?

27 これに関連して次の問題もある. 2 次元トポロジーでは, Nielsen 実現問題, すなわち自然な全射
28 $\mathrm{Diff}(X) \rightarrow \pi_0(\mathrm{Diff}(X))$ に (与えられた $\pi_0(\mathrm{Diff}(X))$ の部分群上で) 切断があるかという問題は基本
29 的であった [68, 116]. 当然 4 次元でも同様の問題を考えることができる. 現状では $K3$ 曲面に対する
30 詳しい研究 (Giansiracusa [51], Giansiracusa-Kupers-Tshishiku [52], Baraglia・筆者 [14], Farb-
31 Looijenga [35]) と, より一般のスピン 4 次元多様体に対する筆者 [78] の研究がある. しかし今の
32 ところ族のゲージ理論を用いた応用はない. ([14] では通常のゲージ理論, [78] では加藤 (佑) [66] の
33 involution に対する Seiberg-Witten 理論から来る帰結を用いている.)

34 問 13 族のゲージ理論の Nielsen 実現問題への組織的な応用は?

35 Nielsen 実現問題の変種として, 交叉形式の自己同型群への自然な写像 $\mathrm{Diff}(X) \rightarrow \mathrm{Aut}(H^2(X; \mathbb{Z}))$
36 が, その像の部分群の上でいつ切断を持つかという問題も考えられる. この問題には Baraglia [8, 11]
37 の族のゲージ理論によるアプローチ, Baraglia-Hekmati [13] の同変ゲージ理論によるアプローチが
38 ある. 中村 [120] の族のゲージ理論による議論も, この問題に対する結果とみなすことが可能である.

- 1 また最近 Lee [95, 96] が del Pezzo 曲面に対してこの問題を詳しく調べている。
 2 残りでは、やや漠然としているが、大きな問題をいくつか述べる。
 3 問 14 族のゲージ理論の境界付き 4 次元多様体への拡張、およびその応用は？
 4 2.8 節, 5.3 節で説明したように、境界付き 4 次元多様体の族であって、境界に制限すると 3 次元多
 5 様体の自明な族になるものについては、谷口・筆者の研究 [81] がある。また、3 次元多様体の族が非
 6 自明な場合には、最近の笹平–Stoffregen [134] の仕事で、族に対する Seiberg–Witten Floer 安定ホ
 7 モトピー型が構成された。これからこういった応用が出てくるかは今後の研究が待たれる。問 12 で
 8 述べたように、族に対する理論と同変理論には類似性や関係がある。同変 Floer 理論、あるいはもっ
 9 と広く群作用の情報を取り入れた Floer 理論は、3 次元多様体の Floer 理論に限っても既に（特に最
 10 近）かなり多くの研究がある。例えば [56, 64, 58, 99, 63, 62, 93, 3, 59, 57, 28, 13, 79]。これらは
 11 問 14 を考えるヒントを与えるかもしれない。
 12 最後に、さらに漠然とした、全く未開拓の問題を述べて終わりとしたい。これまで考えてきたファ
 13 イバー束は、多様体の滑らかな族である。一方、多様体の族というとき、底空間の上のある点で特異
 14 になるようなものを考えることもできる。例えば Riemann 面の退化族については、小平邦彦による
 15 楕円曲線の退化族の研究 [72] 以降の膨大な蓄積がある。
 16 問 15 ゲージ理論を 4 次元多様体の特異な族に対して展開できるか？
 17 以下はヒントになるだろうか？ Fintushel–Stern [37], 福本–古田 [46], LeBrun [94] らの orbifold 上
 18 のゲージ理論, Kronheimer–Mrowka の構造定理に至る道 [83, 86, 85] とその 3 次元版である特異イン
 19 スタントン Floer ホモロジーとその変種 (Kronheimer–Mrowka [88], Collin [24], Collin–Steer [25]),
 20 Echeverria [33], Daemi–Scaduto [26, 27], 井森 [61] による特異インスタントン Floer ホモロジーの
 21 最近の発展。
 22 謝辞 推敲作業の長引く筆者に対し本稿の完成をお待ち下さった編集部の皆様、また貴重なお時間
 23 を割いて草稿に目を通し、その内容について貴重なコメントを下された、古田幹雄氏、中村信裕氏、谷
 24 口正樹氏、そして査読者の方々に、この場を借りて感謝申し上げます。

注 釈

- 25 1) 正確には交叉形式と Kirby–Siebenmann 不変量で
 26 決まる。
 27 2) 時系列としては 2.5 節, 2.6 節, 2.7 節の結果が定
 28 理 2.10 より先である。
 29 3) さらに正確に述べると、普通はスピンの構造, spin^c 構
 30 造の定義には $SO(n)$ の二重被覆を用いるが、ここでは
 31 その代わりに、行列式が正の n 次正方実行列のなす Lie
 32 群 $GL^+(n, \mathbb{R})$ の二重被覆を用いてスピンの構造, spin^c
 33 構造を定義する。ある Riemann 計量に関する等長変
 34 換群ではなく $\text{Diff}(X)$ 全体を考えるために、Riemann
 35 計量を spin^c 構造の定義に使いたくないからである。

文 献

- 36 [1] Mohammed Abouzaid and Andrew J. Blum-
 37 berg. Arnold conjecture and Morava K-theory.
 38 arXiv:2103.01507, 2021.
 39 [2] Selman Akbulut. Isotoping 2-spheres in

- 40 4-manifolds. In Proceedings of the Gökova
 41 Geometry-Topology Conference 2014, pages
 42 264–266. Gökova Geometry/Topology Conference
 43 (GGT), Gökova, 2015.
 44 [3] Antonio Alfieri, Sungkyung Kang, and
 45 András I. Stipsicz. Connected Floer homology of
 46 covering involutions. Math. Ann., 377(3-4):1427–
 47 1452, 2020.
 48 [4] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of
 49 elliptic operators. III. Ann. of Math. (2), 87:546–
 50 604, 1968.
 51 [5] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of
 52 elliptic operators. IV. Ann. of Math. (2), 93:119–
 53 138, 1971.
 54 [6] Dave Auckly, Hee Jung Kim, Paul Melvin, and
 55 Daniel Ruberman. Stable isotopy in four dimen-
 56 sions. J. Lond. Math. Soc. (2), 91(2):439–463,
 57 2015.
 58 [7] Dave Auckly, Hee Jung Kim, Paul Melvin,

- 1 Daniel Ruberman, and Hannah Schwartz. Isotopy
2 of surfaces in 4-manifolds after a single stabiliza-
3 tion. *Adv. Math.*, 341:609–615, 2019.
- 4 [8] David Baraglia. Obstructions to smooth group
5 actions on 4-manifolds from families Seiberg-
6 Witten theory. *Adv. Math.*, 354:106730, 32, 2019.
- 7 [9] David Baraglia. An adjunction inequality ob-
8 struction to isotopy of embedded surfaces in 4-
9 manifolds. *arXiv:2001.04006*, 2020.
- 10 [10] David Baraglia. Tautological classes of def-
11 inite 4-manifolds. to appear in *Geom. Topol.*,
12 *arXiv:2008.04519*, 2020.
- 13 [11] David Baraglia. Constraints on families of
14 smooth 4-manifolds from Bauer-Furuta invariants.
15 *Algebr. Geom. Topol.*, 21(1):317–349, 2021.
- 16 [12] David Baraglia. Non-trivial smooth families of
17 K3 surfaces. *arXiv:2102.06354*, 2021.
- 18 [13] David Baraglia and Pedram Hekmati. Equivariant
19 Seiberg-Witten-Floer cohomology. *arXiv:2108.06855*, 2021.
- 20 [14] David Baraglia and Hokuto Konno. A note
21 on the Nielsen realization problem for K3 sur-
22 faces. to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*,
23 *arXiv:1908.03970*, 2019.
- 24 [15] David Baraglia and Hokuto Konno. On the
25 Bauer-Furuta and Seiberg-Witten invariants of
26 families of 4-manifolds. to appear in *J. Topol.*,
27 *arXiv:1903.01649*, 2019.
- 28 [16] David Baraglia and Hokuto Konno. A glu-
29 ing formula for families Seiberg-Witten invariants.
30 *Geom. Topol.*, 24(3):1381–1456, 2020.
- 31 [17] Stefan Bauer. Refined Seiberg-Witten in-
32 variants. In *Different faces of geometry, vol-
33 ume 3 of Int. Math. Ser. (N. Y.)*, pages 1–46.
34 Kluwer/Plenum, New York, 2004.
- 35 [18] Stefan Bauer. A stable cohomotopy refinement
36 of Seiberg-Witten invariants. II. *Invent. Math.*,
37 155(1):21–40, 2004.
- 38 [19] Stefan Bauer and Mikio Furuta. A stable co-
39 homotopy refinement of Seiberg-Witten invariants.
40 I. *Invent. Math.*, 155(1):1–19, 2004.
- 41 [20] R. İnanç Baykur and Nathan Sumukjian. Round
42 handles, logarithmic transforms and
43 smooth 4-manifolds. *J. Topol.*, 6(1):49–63, 2013.
- 44 [21] Jonathan M. Bloom. A link surgery spec-
45 tral sequence in monopole Floer homology. *Adv.
46 Math.*, 226(4):3216–3281, 2011.
- 47 [22] Boris Botvinnik, Johannes Ebert, and Oscar
48 Randal-Williams. Infinite loop spaces and positive
49 scalar curvature. *Invent. Math.*, 209(3):749–835,
50 2017.
- 51 [23] R. L. Cohen, J. D. S. Jones, and G. B. Se-
52 gal. Floer’s infinite-dimensional Morse theory and
53 homotopy theory. In *The Floer memorial vol-
54 ume, volume 133 of Progr. Math.*, pages 297–325.
55 Birkhäuser, Basel, 1995.
- 56 [24] Olivier Collin. Floer homology for orbifolds
57 and gauge theory knot invariants. In *KNOTS ’96
58 (Tokyo)*, pages 201–212. World Sci. Publ., River
59 Edge, NJ, 1997.
- 60 [25] Olivier Collin and Brian Steer. Instanton
61 Floer homology for knots via 3-orbifolds. *J. Dif-
62 ferential Geom.*, 51(1):149–202, 1999.
- 63 [26] Aliakbar Daemi and Christopher Scaduto.
64 Equivariant aspects of singular instanton Floer ho-
65 mology. *arXiv:1912.08982*, 2019.
- 66 [27] Aliakbar Daemi and Christopher Scaduto.
67 Chern-Simons functional, singular instan-
68 tons, and the four-dimensional clasp number.
69 *arXiv:2007.13160*, 2020.
- 70 [28] Irving Dai, Matthew Hedden, and Abhishek
71 Mallick. Corks, involutions, and Heegaard Floer
72 homology. 2020.
- 73 [29] S. K. Donaldson. An application of gauge the-
74 ory to four-dimensional topology. *J. Differential
75 Geom.*, 18(2):279–315, 1983.
- 76 [30] S. K. Donaldson. Connections, cohomology
77 and the intersection forms of 4-manifolds. *J. Dif-
78 ferential Geom.*, 24(3):275–341, 1986.
- 79 [31] S. K. Donaldson. Polynomial invariants for
80 smooth four-manifolds. *Topology*, 29(3):257–315,
81 1990.
- 82 [32] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer. The
83 geometry of four-manifolds. Oxford Mathematical
84 Monographs. The Clarendon Press, Oxford Uni-
85 versity Press, New York, 1990. Oxford Science
86 Publications.
- 87 [33] Mariano Echeverria. A Generalization
88 of the Tristram-Levine Knot Signatures as
89 a Singular Furuta-Ohta Invariant for Tori.
90 *arXiv:1908.11359*, 2019.
- 91 [34] Noam D. Elkies. A characterization of the $\mathbf{Z}^n$
92 lattice. *Math. Res. Lett.*, 2(3):321–326, 1995.
- 93 [35] Benson Farb and Eduard Looijenga. The
94 Nielsen realization problem for K3 surfaces.
95 *arXiv:2104.08187*, 2021.
- 96 [36] Benson Farb and Dan Margalit. A primer
97 on mapping class groups, volume 49 of Princeton
98 Mathematical Series. Princeton University Press,
99 Princeton, NJ, 2012.
- 100 [37] Ronald Fintushel and Ronald J. Stern. Pseud-
101 ofree orbifolds. *Ann. of Math. (2)*, 122(2):335–364,
102 1985.
- 103 [38] Daniel S. Freed and Karen K. Uhlenbeck. In-
104 stantons and four-manifolds, volume 1 of Mathe-
105 matical Sciences Research Institute Publications.
106 Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- 107 [39] Michael Hartley Freedman. The topology of
108 four-dimensional manifolds. *J. Differential Geom-*
109 *etry*, 17(3):357–453, 1982.
- 110 [40] Robert Friedman and John W. Morgan. On
111 the diffeomorphism types of certain algebraic sur-
112 faces. I. *J. Differential Geom.*, 27(2):297–369,
113 1988.

- 1 [41] Robert Friedman and John W. Morgan. On
2 the diffeomorphism types of certain algebraic sur-
3 faces. II. *J. Differential Geom.*, 27(3):371–398,
4 1988.
- 5 [42] Kim A. Frøyshov. The Seiberg-Witten equa-
6 tions and four-manifolds with boundary. *Math.*
7 *Res. Lett.*, 3(3):373–390, 1996.
- 8 [43] Kim A. Frøyshov. Equivariant aspects of
9 Yang-Mills Floer theory. *Topology*, 41(3):525–552,
10 2002.
- 11 [44] Kim A. Frøyshov. An inequality for the h -
12 invariant in instanton Floer theory. *Topology*,
13 43(2):407–432, 2004.
- 14 [45] Kim A. Frøyshov. Monopole Floer homology
15 for rational homology 3-spheres. *Duke Math. J.*,
16 155(3):519–576, 2010.
- 17 [46] Y. Fukumoto and M. Furuta. Homology 3-
18 spheres bounding acyclic 4-manifolds. *Math. Res.*
19 *Lett.*, 7(5-6):757–766, 2000.
- 20 [47] M. Furuta. Monopole equation and the $\frac{11}{8}$ -
21 conjecture. *Math. Res. Lett.*, 8(3):279–291, 2001.
- 22 [48] M. Furuta. Finite dimensional approxima-
23 tions in geometry. In *Proceedings of the Interna-*
24 *tional Congress of Mathematicians, Vol. II (Bei-*
25 *jing, 2002)*, pages 395–403. Higher Ed. Press, Bei-
26 jing, 2002.
- 27 [49] M. Furuta, Y. Kametani, and N. Minami.
28 Stable-homotopy Seiberg-Witten invariants for rat-
29 ional cohomology $K3\#K3$'s. *J. Math. Sci. Univ.*
30 *Tokyo*, 8(1):157–176, 2001.
- 31 [50] Mikio Furuta. Stable homotopy version of
32 Seiberg-Witten invariant. Preprint.
- 33 [51] Jeffrey Giansiracusa. The diffeomorphism
34 group of a $K3$ surface and Nielsen realization. *J.*
35 *Lond. Math. Soc.* (2), 79(3):701–718, 2009.
- 36 [52] Jeffrey Giansiracusa, Alexander Kupers, and
37 Bena Tshishiku. Characteristic classes of bundles
38 of $K3$ manifolds and the Nielsen realization prob-
39 lem. *Tunis. J. Math.*, 3(1):75–92, 2021.
- 40 [53] Kiyonori Gomi. Twisted K -theory and finite-
41 dimensional approximation. *Comm. Math. Phys.*,
42 294(3):863–889, 2010.
- 43 [54] Hao Guo, Varghese Mathai, and Hang Wang.
44 Positive scalar curvature and Poincaré duality
45 for proper actions. *J. Noncommut. Geom.*,
46 13(4):1381–1433, 2019.
- 47 [55] A. E. Hatcher. Linearization in 3-dimensional
48 topology. In *Proceedings of the International*
49 *Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*,
50 pages 463–468. Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980.
- 51 [56] Kristen Hendricks. A rank inequality for the
52 knot Floer homology of double branched covers.
53 *Algebr. Geom. Topol.*, 12(4):2127–2178, 2012.
- 54 [57] Kristen Hendricks, Tye Lidman, and Robert
55 Lipshitz. Rank inequalities for the Heegaard Floer
56 homology of branched covers. 2020.
- 57 [58] Kristen Hendricks, Robert Lipshitz, and
58 Sucharit Sarkar. A flexible construction of equiv-
59 ariant Floer homology and applications. *J. Topol.*,
60 9(4):1153–1236, 2016.
- 61 [59] Kristen Hendricks, Robert Lipshitz, and
62 Sucharit Sarkar. A simplicial construction of G -
63 equivariant Floer homology. *Proc. Lond. Math.*
64 *Soc.* (3), 121(6):1798–1866, 2020.
- 65 [60] Morris W. Hirsch and Barry Mazur. Smooth-
66 ings of piecewise linear manifolds. *Annals of*
67 *Mathematics Studies*, No. 80. Princeton Univer-
68 sity Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo
69 Press, Tokyo, 1974.
- 70 [61] Hayato Imori. Instanton knot invariants with
71 rational holonomy parameters and an application
72 for torus knot groups. arXiv:2108.13998, 2021.
- 73 [62] Sungkyung Kang. $\mathbb{Z}_2$ -equivariant Heegaard
74 Floer cohomology of knots in S^3 as a strong Hee-
75 gaard invariant. 2018.
- 76 [63] Sungkyung Kang. A transverse knot invariant
77 from $\mathbb{Z}_2$ -equivariant Heegaard Floer cohomology.
78 2018.
- 79 [64] Çağrı Karakurt and Tye Lidman. Rank in-
80 equalities for the Heegaard Floer homology of
81 Seifert homology spheres. *Trans. Amer. Math.*
82 *Soc.*, 367(10):7291–7322, 2015.
- 83 [65] Tsuyoshi Kato, Hokuto Konno, and Nobuhiro
84 Nakamura. Rigidity of the mod 2 families Seiberg-
85 Witten invariants and topology of families of
86 spin 4-manifolds. *Compos. Math.*, 157(4):770–
87 808, 2021.
- 88 [66] Yuya Kato. Nonsmoothable actions of $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
89 on spin four-manifolds. *Topology Appl.*, 307:Pa-
90 per No. 107868, 13, 2022.
- 91 [67] Jerry L. Kazdan and F. W. Warner. Scalar
92 curvature and conformal deformation of Riemann-
93 ian structure. *J. Differential Geometry*, 10:113–
94 134, 1975.
- 95 [68] Steven P. Kerckhoff. The Nielsen realization
96 problem. *Ann. of Math.* (2), 117(2):235–265, 1983.
- 97 [69] Tirasana Khandhawit, Jianfeng Lin, and Hi-
98 rofumi Sasahira. Unfolded Seiberg-Witten Floer
99 spectra, I: Definition and invariance. *Geom.*
100 *Topol.*, 22(4):2027–2114, 2018.
- 101 [70] Robion C. Kirby and Laurence C. Sieben-
102 mann. Foundational essays on topological man-
103 ifolds, smoothings, and triangulations. *Annals of*
104 *Mathematics Studies*, No. 88. Princeton Univer-
105 sity Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo
106 Press, Tokyo, 1977. With notes by John Milnor
107 and Michael Atiyah.
- 108 [71] Kazuhiko Kiyono. Nonsmoothable group ac-
109 tions on spin 4-manifolds. *Algebr. Geom. Topol.*,
110 11(3):1345–1359, 2011.
- 111 [72] K. Kodaira. On compact analytic surfaces. II,
112 III. *Ann. of Math.* (2) 77 (1963), 563–626; *ibid.*,
113 78:1–40, 1963.
- 114 [73] K. Kodaira. On the structure of compact com-

- plex analytic surfaces. I. Amer. J. Math., 86:751–798, 1964.
- [74] Hokuto Konno. Bounds on genus and configurations of embedded surfaces in 4-manifolds. J. Topol., 9(4):1130–1152, 2016.
- [75] Hokuto Konno. A cohomological Seiberg-Witten invariant emerging from the adjunction inequality. to appear in J. Topol., arXiv:1704.05859, 2017.
- [76] Hokuto Konno. Positive scalar curvature and higher-dimensional families of Seiberg-Witten equations. J. Topol., 12(4):1246–1265, 2019.
- [77] Hokuto Konno. Characteristic classes via 4-dimensional gauge theory. Geom. Topol., 25(2):711–773, 2021.
- [78] Hokuto Konno. Dehn twists and the Nielsen realization problem for spin 4-manifolds. arXiv:2203.11631, 2022.
- [79] Hokuto Konno, Jin Miyazawa, and Masaki Taniguchi. Involutions, knots, and Floer K-theory. arXiv:2110.09258, 2021.
- [80] Hokuto Konno and Nobuhiro Nakamura. Constraints on families of smooth 4-manifolds from $\text{Pin}^-(2)$ -monopole. to appear in Algebr. Geom. Topol., arXiv:2003.12517, 2020.
- [81] Hokuto Konno and Masaki Taniguchi. The groups of diffeomorphisms and homeomorphisms of 4-manifolds with boundary. arXiv:2010.00340.
- [82] P. Kronheimer, T. Mrowka, P. Ozsváth, and Z. Szabó. Monopoles and lens space surgeries. Ann. of Math. (2), 165(2):457–546, 2007.
- [83] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka. Gauge theory for embedded surfaces. I. Topology, 32(4):773–826, 1993.
- [84] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka. The genus of embedded surfaces in the projective plane. Math. Res. Lett., 1(6):797–808, 1994.
- [85] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka. Embedded surfaces and the structure of Donaldson’s polynomial invariants. J. Differential Geom., 41(3):573–734, 1995.
- [86] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka. Gauge theory for embedded surfaces. II. Topology, 34(1):37–97, 1995.
- [87] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka. Khovanov homology is an unknot-detector. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., (113):97–208, 2011.
- [88] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka. Knot homology groups from instantons. J. Topol., 4(4):835–918, 2011.
- [89] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka. The Dehn twist on a sum of two $K3$ surfaces. Math. Res. Lett., 27(6):1767–1783, 2020.
- [90] Peter Kronheimer. Some non-trivial families of symplectic structures.
- [91] Peter Kronheimer and Tomasz Mrowka. Monopoles and three-manifolds, volume 10 of New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [92] Peter B. Kronheimer and Ciprian Manolescu. Periodic Floer pro-spectra from the Seiberg-Witten equations. arXiv:math/0203243, 2002.
- [93] Tim Large. Equivariant Floer theory and double covers of three-manifolds. 2019.
- [94] Claude Lebrun. Edges, orbifolds, and Seiberg-Witten theory. J. Math. Soc. Japan, 67(3):979–1021, 2015.
- [95] Seraphina Eun Bi Lee. The Nielsen realization problem for high degree del Pezzo surfaces. arXiv:2112.13500, 2021.
- [96] Seraphina Eun Bi Lee. Isotopy classes of involutions of del Pezzo surfaces. arXiv:2202.10616, 2022.
- [97] Tian-Jun Li and Ai-Ko Liu. Family Seiberg-Witten invariants and wall crossing formulas. Comm. Anal. Geom., 9(4):777–823, 2001.
- [98] Tye Lidman and Ciprian Manolescu. The equivalence of two Seiberg-Witten Floer homologies. Astérisque, (399):vii+220, 2018.
- [99] Tye Lidman and Ciprian Manolescu. Floer homology and covering spaces. Geom. Topol., 22(5):2817–2838, 2018.
- [100] Francesco Lin. $\text{Pin}(2)$ -monopole Floer homology, higher compositions and connected sums. J. Topol., 10(4):921–969, 2017.
- [101] Francesco Lin. The surgery exact triangle in $\text{Pin}(2)$ -monopole Floer homology. Algebr. Geom. Topol., 17(5):2915–2960, 2017.
- [102] Francesco Lin. A Morse-Bott approach to monopole Floer homology and the triangulation conjecture. Mem. Amer. Math. Soc., 255(1221):v+162, 2018.
- [103] Jianfeng Lin. Isotopy of the dehn twist on $K3\#K3$ after a single stabilization. arXiv:2003.03925, 2020.
- [104] Jianfeng Lin and Anubhav Mukherjee. Family Bauer-Furuta invariant, Exotic Surfaces and Smale’s conjecture. arXiv:2110.09686, 2021.
- [105] Jianfeng Lin, Daniel Ruberman, and Nikolai Saveliev. On the Frøyshov invariant and monopole Lefschetz number. 2018.
- [106] Robert Lipshitz and Sucharit Sarkar. A Khovanov stable homotopy type. J. Amer. Math. Soc., 27(4):983–1042, 2014.
- [107] Ximin Liu and Nobuhiro Nakamura. Pseudofree $\mathbb{Z}/3$ -actions on $K3$ surfaces. Proc. Amer. Math. Soc., 135(3):903–910, 2007.
- [108] Ciprian Manolescu. Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type of three-manifolds with $b_1 = 0$. Geom. Topol., 7:889–932, 2003.
- [109] Ciprian Manolescu. On the intersection forms of spin four-manifolds with boundary. Math. Ann., 359(3-4):695–728, 2014.

- [110] Ciprian Manolescu. Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture. *J. Amer. Math. Soc.*, 29(1):147–176, 2016.
- [111] Ciprian Manolescu and Sucharit Sarkar. A knot Floer stable homotopy type. *arXiv:2108.13566*, 2021.
- [112] Takao Matumoto. On diffeomorphisms of a $K3$ surface. In *Algebraic and topological theories* (Kinosaki, 1984), pages 616–621. Kinokuniya, Tokyo, 1986.
- [113] John Milnor. *Collected papers of John Milnor. III*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. Differential topology.
- [114] Edwin E. Moise. Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung. *Ann. of Math. (2)*, 56:96–114, 1952.
- [115] John W. Morgan. *The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds*, volume 44 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [116] Shigeyuki Morita. Characteristic classes of surface bundles. *Invent. Math.*, 90(3):551–577, 1987.
- [117] Christoph Müller and Christoph Wockel. Equivalences of smooth and continuous principal bundles with infinite-dimensional structure group. *Adv. Geom.*, 9(4):605–626, 2009.
- [118] Nobuhiro Nakamura. The Seiberg-Witten equations for families and diffeomorphisms of 4-manifolds. *Asian J. Math.*, 7(1):133–138, 2003.
- [119] Nobuhiro Nakamura. Bauer-Furuta invariants under $\mathbb{Z}_2$ -actions. *Math. Z.*, 262(1):219–233, 2009.
- [120] Nobuhiro Nakamura. Smoothability of $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -actions on 4-manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(8):2973–2978, 2010.
- [121] Nobuhiro Nakamura. Pin $^-(2)$ -monopole equations and intersection forms with local coefficients of four-manifolds. *Math. Ann.*, 357(3):915–939, 2013.
- [122] Nobuhiro Nakamura. Pin $^-(2)$ -monopole invariants. *J. Differential Geom.*, 101(3):507–549, 2015.
- [123] Liviu I. Nicolaescu. Notes on Seiberg-Witten theory, volume 28 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [124] S. P. Novikov. Topological invariance of rational classes of Pontrjagin. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 163:298–300, 1965.
- [125] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó. Absolutely graded Floer homologies and intersection forms for four-manifolds with boundary. *Adv. Math.*, 173(2):179–261, 2003.
- [126] B. Perron. Pseudo-isotopies et isotopies en dimension quatre dans la catégorie topologique. *Topology*, 25(4):381–397, 1986.
- [127] Frank Quinn. Isotopy of 4-manifolds. *J. Differential Geom.*, 24(3):343–372, 1986.
- [128] T. Radó. Über den Begriff der Riemannschen Fläche. *Acta Litt. Sci. Szeged*, 2:101–121, 1925.
- [129] Daniel Ruberman. An obstruction to smooth isotopy in dimension 4. *Math. Res. Lett.*, 5(6):743–758, 1998.
- [130] Daniel Ruberman. A polynomial invariant of diffeomorphisms of 4-manifolds. In *Proceedings of the Kirbyfest* (Berkeley, CA, 1998), volume 2 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 473–488. *Geom. Topol. Publ.*, Coventry, 1999.
- [131] Daniel Ruberman. Positive scalar curvature, diffeomorphisms and the Seiberg-Witten invariants. *Geom. Topol.*, 5:895–924, 2001.
- [132] Yuli Rudyak. *Piecewise linear structures on topological manifolds*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2016.
- [133] Taketo Sano. A Bar-Natan homotopy type. *arXiv:2102.07529*, 2021.
- [134] Hirofumi Sasahira and Matthew Stoffregen. Seiberg-Witten Floer spectra for $b_1 > 0$. *arXiv:2103.16536*, 2021.
- [135] Gleb Smirnov. From flops to diffeomorphism groups. to appear in *Geom. Topol.*, *arXiv:2002.01233*, 2020.
- [136] Gleb Smirnov. Seidel’s theorem via gauge theory. *arXiv:2010.03361*, 2020.
- [137] Gleb Smirnov. Symplectic mapping class groups of $K3$ surfaces and Seiberg-Witten invariants. *arXiv:2102.10811*, 2021.
- [138] Markus Szymik. Characteristic cohomotopy classes for families of 4-manifolds. *Forum Math.*, 22(3):509–523, 2010.
- [139] Clifford H. Taubes. $SW \Rightarrow Gr$: from the Seiberg-Witten equations to pseudo-holomorphic curves. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(3):845–918, 1996.
- [140] Clifford Henry Taubes. More constraints on symplectic forms from Seiberg-Witten invariants. *Math. Res. Lett.*, 2(1):9–13, 1995.
- [141] C. T. C. Wall. Diffeomorphisms of 4-manifolds. *J. London Math. Soc.*, 39:131–140, 1964.
- [142] Tadayuki Watanabe. Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of $Diff(S^4)$. *arXiv:1812.02448*, 2018.
- [143] Edward Witten. Monopoles and four-manifolds. *Math. Res. Lett.*, 1(6):769–796, 1994.
- [144] 古田 幹雄. Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似. 総合講演・企画特別講演アブストラクト, 1998(Autumn-Meeting1):1–11, 1998.
- [145] 深谷賢治. ゲージ理論とトポロジー. シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995.

