Diffeomorphism group and gauge theory

今野 北斗 (東京大学)*

1 序：4 次元多様体の微分同相群は特殊か？

4 次元が特殊な次元であるという認識の確立——これは前世紀の多様体の分類理論における主たる達成の一つに数えられるであろう．例えば，4 次元位相閉多様体が可微分構造をひとつでも許容すれば，しばしば無限個の異なる可微分構造を持つ．これは 4 次元以外で起きない現象であることが知られている．さらにこの事実は，4 次元においては，位相的カテゴリーと可微分カテゴリーには著しい差異があることを示している．このように，4 次元とその他の次元との比較を，主に位相的カテゴリーと可微分カテゴリーの差異の観点から調べることが，4 次元多様体論で基本的であった．その道具として，物理学由来の偏微分方程式を 4 次元多様体上で考察するゲージ理論が有効であることも，現在では良く知られている．

他方，多様体のトポロジーにおいて，その自己同型群である微分同相群は基本的な興味の対象である．その研究は現在も急速に発展しつつある．後に触れる Galatius, Randal-Williams らを中心とする高次元多様体の微分同相群の研究は，この十年来のトポロジーの中心的な潮流の一つをなしている．しかし，華々しく発展する他次元に比べ，4 次元多様体の微分同相群に対する知見は，最近までは極めて限られていた．これは 4 次元多様体の分類理論が困難であることと同様の理由，すなわち一種の手術の技法 (Whitney trick) の欠如に由来する．

4 次元多様体の分類理論において，手術の技法の欠如が本質的であることを暴き出し，他次元と真に異なる現象の存立を明らかにする役割を，ゲージ理論が担っていた．同様のストーリーを，微分同相群に対しても期待できないであろうか？すなわち，ゲージ理論を然るべく発展させることで，4 次元多様体の微分同相群が，他次元と異なる性質を持つ興味深い対象であることを示すことはできないだろうか？上で振り返った 4 次元多様体論の発展を踏まえると，位相的カテゴリーと可微分カテゴリーとの差異，すなわち同相群と微分同相群の差異に注目することもまた自然であろう：

問 1.1. 4 以外の次元と比べた際，4 次元多様体の微分同相群のみに対して成立する現象はあるか．その中でも特に，同相群と微分同相群の差異の形で定式化される現象はあるか．

本稿では，この問いに対して現時点までに知られている諸結果を概観する．これらは以下の三つに大別される：

---

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: konno@ms.u-tokyo.ac.jp

第 2 節： 微分同相群の分類空間（多様体のモジュライ空間）のホモロジーの非安定性．Harer 安定性の 4 次元類似の非成立．

第 3 節： 微分同相群のある種の無限性．写像類群，微分同相群（の分類空間）のホモトピー群・ホモロジー群の有限生成性の 4 次元類似の非成立．

第 4 節： エキゾチックな Dehn ツイスト．可縮な多様体の微分同相群と円板の微分同相群の比較に関する結果の 4 次元類似の非成立．

これらは全て，ゲージ理論を 4 次元多様体の族に対して展開する「族のゲージ理論」により証明される

2 ホモロジー的非安定性

2.1 背景：4 次元以外でのホモロジー的安定性

滑らかな多様体 X に対し，$\mathrm{Diff}(X)$ を X の微分同相群とする．$\mathrm{Diff}(X)$ には自然な位相 (C^∞-位相) が入り，位相群となる．その分類空間 $B\mathrm{Diff}(X)$ は，直感的には X と微分同相な多様体全てをパラメトライズしている空間であり，(X と微分同相な) 多様体のモジュライ空間と呼ばれる．フォーマルには，$B\mathrm{Diff}(X)$ は，X をファイバーとする滑らかなファイバー束を分類しているのであった：任意の (良い) 位相空間 B に対し，

$$[B, B\mathrm{Diff}(X)] \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{B \text{ 上の } X \text{ がファイバーのファイバー束 }\}/\cong .$$

X が境界付きの場合は，X の境界の近くで恒等写像であるような微分同相全体のなす群 $\mathrm{Diff}_\partial(X)$ とその分類空間を考える．

多様体のモジュライ空間 $B\mathrm{Diff}(X)$ のトポロジーは基本的研究対象である．その中でも，モジュライ空間のコホモロジーは X をファイバーとするファイバー束の特性類と対応しており，中心的な興味の対象の一つである：

$$H^*(B\mathrm{Diff}(X)) \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{X\text{-バンドルの特性類 }\}.$$

このコホモロジー，あるいは双対的にホモロジー $H_*(B\mathrm{Diff}(X))$ を計算することは基本的な問題であるが，一般には極めて難しい．しかし，多様体を適当に「安定化」すると，驚くべきことに計算ができる場合がある．その鍵が下で説明するホモロジー的安定性である．

以下，W を偶数 $2n$ 次元の境界付きでコンパクトな可微分多様体とする．このとき，W の境界 ∂W に $S^n \times S^n \# \partial W \times [0,1]$（ここで $\#$ は内部連結和）を $\partial W \times \{0\}$ に沿って貼り付けたものを連結和 $W \# S^n \times S^n$ のモデルとして採用する．すると，恒等写像で拡張することで，埋め込み写像

$$s : \mathrm{Diff}_\partial(W) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_\partial(W \# S^n \times S^n)$$

が得られる．s およびそれが誘導する写像は安定化写像と呼ばれる．以下が多様体のモ

ジュライ空間のホモロジー的安定性と呼ばれる結果で，2 次元の場合は Harer [14]，6 次元以上は Galatius–Randal-Williams [12] による：

定理 2.1 (Harer (1985) [14], Galatius–Randal-Williams (2018) [12])**.** W をコンパクトで滑らかな単連結多様体とし，次元は **4 ではない**偶数次元 $(=: 2n)$ とする．$k \geq 0$ を固定したとき，任意の $N \gg k$ に対し，s が誘導する写像

$$s_* : H_k(B\mathrm{Diff}_\partial(W\#_N S^n \times S^n); \mathbb{Z}) \to H_k(B\mathrm{Diff}_\partial(W\#_{N+1} S^n \times S^n); \mathbb{Z})$$

は同型になる．

この定理により，十分大きな N に対し，$H_k(B\mathrm{Diff}_\partial(W\#_N S^n \times S^n))$ は帰納極限

$$\lim_{N\to+\infty} H_k(B\mathrm{Diff}_\partial(W\#_N S^n \times S^n))$$

と同一視できる．この極限は安定ホモロジーと呼ばれ，ホモトピー論で計算ができる対象となる．$\mathbb{Q}$ 上では明示的に計算され，Mumford–森田–Miller 類で生成される．Madsen–Weiss [36] による Mumford 予想の解決はこれを 2 次元で示すもので，その後 Galatius–Randal-Williams [12] はこれを高次元に拡張した．

2.2 4 次元でのホモロジー的非安定性

このように，4 以外の偶数次元では，多様体の安定化を十分行うと $H_k(B\mathrm{Diff}_\partial(W))$ が計算できる．以下の定理は，4 次元においては，キーステップであったホモロジー的安定性が成立しないことを主張する．ここでは境界付き多様体として閉多様体を puncture したものに対象を限る．すなわち，閉 4 次元多様体 X に対し，$\mathring{X} = X \setminus \mathrm{Int}(D^4)$ を考える．

定理 2.2 (K.–Lin (2022) [23])**.** X を単連結で滑らかな閉 4 次元多様体とする．$k > 0$ を固定したとき，数列 $0 < N_1 < N_2 < \cdots \to +\infty$ が存在し，各 N_i に対して

$$s_* : H_k(B\mathrm{Diff}_\partial(\mathring{X}\#_{N_i} S^2 \times S^2); \mathbb{Z}) \to H_k(B\mathrm{Diff}_\partial(\mathring{X}\#_{N_i+1} S^2 \times S^2); \mathbb{Z})$$

は同型にならない．

すなわち，4 次元以外とは異なり，$S^2 \times S^2$ をいくら連結和していっても，モジュライ空間のホモロジーは安定することがないのである．なお上の定理で，同型を単射あるいは全射に置き換えた主張も成立する．いわば，特性類の生成，消滅が無限回生じているのである．

2.1 節で述べた他次元での状況と比べると，4 次元ではモジュライ空間のホモロジーの計算をホモトピー論に帰着することは困難なことを定理 2.2 は示唆していると言えるだろう．多様体の分類理論と似た現象がここでも起きているわけである．

位相的カテゴリーでは現状以下のことが知られている．2 次元の場合は位相的カテゴリーと可微分カテゴリーに差が無く，Harer [14] の結果から既に同相群の分類空間

$B\mathrm{Homeo}_\partial(W)$ に対するホモロジー的安定性が従う．高次元の場合には Kupers [31] により同様の安定性が位相的カテゴリーで示されている．4 次元でも位相的カテゴリーでの安定性が期待されており進行中の研究もあるようだが，まだ発表されていない．なお，定理 2.2 の証明では，モジュライ空間のホモロジーの非安定な元を具体的に与えているが，これらは全て位相的カテゴリーに移ると自明になる．

2.3　ホモロジー的非安定性の証明

2.3.1　証明の道具：ゲージ理論的特性類

ホモロジー的非安定性（定理 2.2）は，族のゲージ理論を用いて特性類を構成し，計算することで証明される．X を向き付けられた可微分閉 4 次元多様体とし，$k \geq 0$ とする．$\mathrm{Diff}^+(X)$ を向きを保つ微分同相のなす群とする．このとき $\mathbb{Z}/2$ 係数の特性類

$$\mathbb{SW}^k(X) \in H^k(B\mathrm{Diff}^+(X); \mathbb{Z}/2) \tag{1}$$

を定義することができる（正確には $b^+(X) \geq k+2$ という位相的仮定を課す必要がある）．これは，筆者が定義したゲージ理論的特性類 [20] に Ruberman [42] の微分同相に対するある数値的不変量のアイデアを合わせて構成されるものである [*1]．

$\mathbb{SW}^k(X)$ は，ごく大雑把に言えば，ゲージ理論的偏微分方程式である Seiberg–Witten 方程式

$$\begin{cases} F_A^+ = \sigma(\Phi, \Phi), \\ D\!\!\!/_A \Phi = 0 \end{cases}$$

の族の解を数えて定義される．構成を後回しにし先に性質を述べると，この特性類は非安定性特性類である．すなわち安定化写像 s^*（正確にはその有限回の合成）で送ると消滅する．これは，Seiberg–Witten 不変量が適当な連結和 ($\#S^2 \times S^2$ を含む) に対して消滅することの族版である．

2.3.2　特性類の非自明性

我々の目的のためには，この特性類 $\mathbb{SW}^k(X)$ が非自明になるようなファイバー束を見付ける必要がある．そのような族は以下のようにして構成される．これは Ruberman [40] が S^1 上の族の場合に行っていた議論の高次元化である．閉 4 次元多様体 M に対し，$M\#_k S^2 \times S^2$ と言う形の 4 次元多様体を考える．この上の k 個の互いに可換な微分同相 $f_1, \ldots, f_k$ を上手く選ぶ（大まかにいうと，各 $S^2 \times S^2$ のコピー上に台を持ち，そのホモロジーに -1 倍で作用するようなものを取る）．それらの多重写像トーラスは，X の T^k 上の族となる．

---

*1 [20] では，spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ を保つ微分同相群 $\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s})$ を考え，$H^*(B\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s}))$ の元 $\mathbb{SW}^*(X, \mathfrak{s})$ を Seiberg–Witten 方程式の族を用いて定義した．$\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s})$ ではなく $\mathrm{Diff}^+(X)$ 全体を扱うために [42] のアイデアを使う．[42] では，$\mathfrak{s}$ を保つとは限らない微分同相 $f \in \mathrm{Diff}^+(X)$ に対し，数値的不変量 $\mathrm{SW}(X, f) \in \mathbb{Z}/2$ (f によっては $\mathrm{SW}(X, f) \in \mathbb{Z}$) が定義されている．

M を良い性質を満たすシンプレクティック多様体として取っておくと，この T^k 上の族に対し，上で述べた特性類 (1) は非自明になる [*2]．非自明性の証明の核では Baraglia と筆者 [6] による 4 次元多様体の族に対する Seiberg–Witten 不変量の計算公式が使われる．$M\#_k S^2\times S^2$ の族の Seiberg–Witten 不変量の計算を，Seiberg–Witten 方程式の解の貼り合わせにより M の Seiberg–Witten 不変量の計算に帰着させるものである．

ここまでがホモロジー的非安定性定理の証明の中心である．定理の証明を完結させるには，与えられた単連結閉 4 次元多様体 X に対して，数列 $N_i\to+\infty$ と良い性質を満たすシンプレクティック 4 次元多様体の列 M_i であって $X\#_{N_i}S^2\times S^2\cong M_i\#_k S^2\times S^2$ となるものを見付けてくれば良い．これはある種の geography に帰着する．

2.3.3 特性類の構成

特性類 $\mathbb{SW}^k(X)$ の構成のアイデアをもう少し述べよう．Seiberg–Witten 方程式は，X 上の spin^c 構造と呼ばれる位相的データと Riemann 計量を固定すると書き下すことができる．普遍 X 束

$$E := \mathrm{EDiff}^+(X)\times_{\mathrm{Diff}^+(X)} X \to B\mathrm{Diff}^+(X) =: B$$

を考える．E のモノドロミーは X 上の spin^c 構造全体 $\mathrm{Spin}^c(X)$ に作用しているので，$\mathrm{Spin}^c(X)$ がファイバーの族 $\mathrm{Spin}^c(E)\to B$ が誘導される．E 上で Riemann 計量の族を取る．すると，B の各点 b 上のファイバー E_b の上には，計量 g_b と $\mathrm{Spin}^c(E)$ のファイバー $\mathrm{Spin}^c(E_b)$ が乗っている．$\mathrm{Spin}^c(E_b)$ の各元ごとに，計量 g_b に関する Seiberg–Witten 方程式を考えることができる．この方程式の $\mathrm{Spin}^c(E_b)$ に亘った disjoint union を考える．b を動かすと，Seiberg–Witten 方程式の ($\#\mathrm{Spin}^c(X)$ 個の) 組の族が B 上に得られる．

$B = B\mathrm{Diff}^+(X)$ に CW 複体の構造を入れ，B の各 k-cell の上で，上で得られた Seiberg–Witten 方程式の組の族の解（のモジュライ）空間を数えて数を得る [*3]．このようにして B 上のコチェインを作ると，これがコサイクルとなると分かる．そのコホモロジー類が特性類 (1) で，計量の族（や技術上必要な摂動）の取り方に依らないことが示せる．$\mathbb{Z}/2$ 係数にするのは，E のモノドロミーが解（のモジュライ）空間の向き（homology orientation）に非自明に作用するためである．

3 微分同相群の無限性

微分同相群 $\mathrm{Diff}(X)$ およびその分類空間のホモロジー・ホモトピー群は，ほとんどの場合無限群になる．無限群が与えられたとき，その構造に関して最初に問うべきことの一つは，その群が有限生成かどうかであろう．4 次元以外においては，基本群に関する

[*2] M が満たすべき性質を簡単に述べると，M のシンプレクティック構造から来る spin^c 構造以外の spin^c 構造たちに対する Seiberg–Witten 不変量の総和が (charge conjugation で割った後でも) mod 2 で 0 になる，というような性質である．

[*3] 正確には，適当な形式的次元の spin^c 構造だけ選び，また非自明な計算結果を得るために，charge conjugation と呼ばれる $\mathbb{Z}/2$ 対称性で上の構成を「割った」ものを定理 2.2 の証明では用いる．

仮定の下，強力な有限性定理が知られている．例えば，以下の予想には未だ反例がなく，また偶数次元の場合には実際に証明されている (Kupers [32], Bustamante–Krannich–Kupers [8])：

予想 3.1. X を可微分閉多様体とする．$\pi_1(X)$ が有限群かつ $\dim X \neq 4$ であれば，$\pi_k(\mathrm{Diff}(X))$, $H_k(B\mathrm{Diff}(X);\mathbb{Z})$ は全ての $k \geq 0$ に対して有限生成であろう．

この予想の 4 次元類似の反例が見付けられるかは自然な問いであろう．既に述べたように，コンパクト 4 次元多様体は他次元と異なり無限個のエキゾチック構造を持ち得るのだった．予想 3.1 の 4 次元類似の反例を探すことは，この事実—4 次元での一種の無限性–の自己同型群版のアナロジーがあるかを問うていると言えるだろう．$\mathrm{Diff}(X)$ のホモトピー群に対しては，以下の結果がこの方向の初めてのものである：

定理 3.2 (Baraglia (2023) [4])**.** $\pi_1(\mathrm{Diff}(K3))$ は有限生成ではない．

より強く，$\pi_1(\mathrm{Diff}(K3))$ は $\mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$ を直和因子に含むことが [4] で示されている．この結果は族の Seiberg–Witten 理論による数値的な不変量を用いて示される．この後 Lin [34] は，全ての楕円曲面や完全交叉を含む，広範なクラスの 4 次元多様体に上の結果を一般化・精密化した．

次に，$B\mathrm{Diff}(X)$ のホモロジーと X の写像類群の無限性について論じよう．4 次元以外での写像類群の有限性については，次の結果が古典的である：

定理 3.3 (Sullivan (1977) [44])**.** X を単連結閉可微分多様体とする．$\dim X \geq 5$ ならば，$\pi_0(\mathrm{Diff}(X))$ は有限生成である．

実際には Sullivan はより強い有限性を示しており，例えば同じ仮定の下 $\pi_0(\mathrm{Diff}(X))$ は有限表示群である [*4]．もちろん 3 次元以下では同様の主張は正しいので，4 次元以外では単連結多様体の写像類群は有限生成ということになる．この類似は 4 次元では成立しない：

定理 3.4 (K. (2023) [22], Baraglia (2023) [5])**.** 写像類群 $\pi_0(\mathrm{Diff}(X))$ が有限生成でないような単連結閉可微分 4 次元多様体 X が存在する．

具体的には，$X = E(n)\#S^2 \times S^2$（ここで $E(n)$ はあるクラスの楕円曲面で，$n \geq 2$）に対し，$\pi_0(\mathrm{Diff}(X))$ は無限生成であると分かる．この結果は，以下のより一般の結果の帰結である：

定理 3.5 (K. (2023) [22])**.** 各 $k \geq 1$ に対し，$H_k(B\mathrm{Diff}(X);\mathbb{Z})$ が有限生成でないような単連結閉可微分 4 次元多様体 X が存在する．

[*4] [44] では 5 次元の場合が明示的に主張されていないが，5 次元でも同様の主張の成立が知られている．

具体的には，$X = E(n)\#_k S^2 \times S^2$ $(n \geq 2)$ に対し，$H_k(B\mathrm{Diff}(X);\mathbb{Z})$ は $(\mathbb{Z}/2)^{\oplus \mathbb{N}}$ を直和因子に含むと分かる．定理 3.5 で $k=1$ とすると定理 3.4 はただちに従う．

ここで位相的カテゴリーとの比較を述べよう．まず，単連結閉 4 次元多様体 X に対しては，$\pi_0(\mathrm{Homeo}(X))$ が有限生成であることは Freedman [10], Quinn [39] の結果から従う [*5]．したがって単連結多様体の写像類群の無限生成性（定理 3.4）は，4 次元可微分カテゴリー特有の現象ということになる．なお，単連結でない場合は，高次元でも 4 次元でも写像類群が無限生成になり得ることは既に知られている（Hatcher [15], Budney–Gabai [7]，渡邉 [46]）．一般の単連結 4 次元位相多様体 X に対する $\pi_k(\mathrm{Homeo}(X))$ $(k>0)$, $H_k(B\mathrm{Homeo}(X))$ $(k>1)$ の有限性生成は，現在まだ証明されていない．

$H_k(B\mathrm{Diff}(X))$ の無限生成性（定理 3.5）の証明もゲージ理論的特性類を用いる．具体的には，ホモロジー的非安定性（定理 2.2）の証明で用いた特性類を精密化して無限個の特性類を定義し，それらの $\mathbb{Z}/2$ 上での一次独立性を示すことによりなされる [*6]．我々の証明における $H_k(B\mathrm{Diff}(X))$ の無限性は，楕円曲面 $E(n)$ が無限個のエキゾチック構造を持つこと（の Seiberg–Witten 理論による証明）に由来する．この無限性を使って族を無限個構成する（定理 2.2 の証明同様の多重写像トーラスを用いる）．それらをゲージ理論的特性類たちで evaluate することで一次独立性を示す，というのが証明の流れである．

Baraglia [5] による定理 3.4 の証明も，[22] の証明の $k=1$ の場合と実質同様の議論による．なお，この節で説明した全ての無限性の証明は，Ruberman [41] による 4 次元多様体の Torelli 群の無限生成性の証明が雛形となっている．Torelli 群についても，高次元・単連結の場合は Sullivan の結果 [44] から有限生成性が知られており，Ruberman [41] の結果も 4 次元特有の現象である．

4 エキゾチックな Dehn ツイスト

4.1 Dehn ツイストの定義

ここでは 4 次元多様体のより具体的な微分同相写像に目を向ける．本稿の主テーマである他次元との対比の側面もあるが，自然で興味深いクラスの微分同相写像について論じるのが主眼である．Y を多様体とし，恒等写像を基点とするループ $\phi : S^1 \to \mathrm{Diff}(Y)$ が与えられたとする．このとき，$Y \times [0,1]$ の境界を各点ごとに固定する微分同相写像が

$$Y \times [0,1] \to Y \times [0,1] \quad ; \quad (y,t) \mapsto (\phi(t)\cdot y, t) \tag{2}$$

で定義される．$Y = S^1$ として，ϕ を S^1 の自身への自然な作用から得られるループとすれば，これは 2 次元トポロジーで基本的な $S^1 \times [0,1]$ 上の Dehn ツイストに他ならない．

この微分同相を Y が 3 次元多様体の場合に考えよう．Y が 4 次元多様体 X に埋め込

[*5] 最近 [39] のギャップが [11] で指摘され，同論文でそのギャップが埋められた．

[*6] 無限個の特性類は，$\mathrm{Spin}^c(X)$ を charge conjugation で割った $\mathrm{Spin}^c(X)/(\mathbb{Z}/2)$ への $\mathrm{Diff}^+(X)$ 作用の軌道で添え字付けされる．より一般に，$\mathrm{Diff}^+(X)$-不変な $\mathrm{Spin}^c(X)/(\mathbb{Z}/2)$ の部分集合 $\mathcal{S}$ が与えられるごとに，特性類 $\mathbb{SW}^k(X,\mathcal{S}) \in H^k(B\mathrm{Diff}^+(X);\mathbb{Z}/2)$ が定義される．

まれているとき，Y の管状近傍に上の微分同相 (2) を移植してやれば，X 上の微分同相が得られる．これを **X 上の Y に沿った Dehn ツイスト**と呼ぼう．特に X が Y を境界に持つとき，Y を X の内部に少し押し入れたものに沿った Dehn ツイストは $\mathrm{Diff}_\partial(X)$ の元となる．これを X の**境界 Dehn ツイスト**と呼ぶことにする．

4.2　S^3 に沿った Dehn ツイスト

$Y = S^3$ の場合には，$\pi_1(\mathrm{Diff}(S^3)) \cong \pi_1(\mathrm{SO}(4)) \cong \mathbb{Z}/2$ の生成元に対応するループを用いた Dehn ツイストを考えることができる．これがエキゾチック微分同相になり得ることを Kronheimer–Mrowka は示した．ここで自己微分同相 $f : X \to X$ が**エキゾチック**とは，恒等写像 id_X に位相的にはアイソトピックだが滑らかにはそうでないことを言う．

定理 4.1 (Kronheimer–Mrowka (2020) [28])**.** $K3\#K3$ の連結和の首に沿った Dehn ツイストはエキゾチック微分同相である．

4 次元多様体の上のエキゾチック微分同相の初めての例は Ruberman [40] により 1998 年に構成された．これは族に対するゲージ理論の初めてのトポロジカルな応用でもあり，本稿で述べたほとんどの結果の証明の雛形となる重要なものである．一方，Ruberman の与えたエキゾチック微分同相は，エキゾチック 4 次元多様体を利用するやや複雑なものであった．Dehn ツイストという一見単純に見える微分同相がエキゾチックになるという Kronheimer–Mrowka の結果は，専門家に驚きを与えた．さらにその後 Lin [33] は，この Dehn ツイストの写像類は $S^2 \times S^2$ の連結和を一回行っても非自明なことを示した [*7]．

4.3　Seifert ファイバー空間に沿った Dehn ツイスト

定理 4.1 を見ると S^3 より一般の 3 次元多様体に沿った Dehn ツイストに拡張したくなるが，自然な候補のクラスは Seifert ファイバー空間である．定義からそこには S^1 作用があり，この作用を用いた Dehn ツイストを考えることができる．さらに Seifert ファイバー空間は様々な興味深い 4 次元多様体の境界となる．しかし，S^3 以外の Seifert ファイバー空間に沿った Dehn ツイストが実際に非自明になることの証明は，下で述べる [25] まで待たなければならなかった．

[25] の結果をひとつ述べよう．（例えば Betti 数の意味で）「小さい」4 次元多様体上でエキゾチックな現象の有無を調べるのは，4 次元トポロジーの基本的な問題である．（例えば未解決の 4 次元可微分 Poincaré 予想はその例である．）Dehn ツイストを用いると，エキゾチック微分同相に対するこの問題への一つの解答を与えることができる．以下，境界付き 4 次元多様体 W に対して，$\mathrm{Diff}_\partial(W)$ の元であって，$\mathrm{Homeo}_\partial(W)$ を通して恒等写像にアイソトッピックだが $\mathrm{Diff}_\partial(W)$ を通してそうではないものを**相対的なエキゾチック**

[*7] 単連結 4 次元多様体上のエキゾチック微分同相の写像類は，有限回の安定化 ($S^2 \times S^2$ の連結和) で自明になることが知られているが，それまでに知られていた例は一回の安定化で自明になっていた．Lin の結果は，単連結 4 次元多様体に関するエキゾチックな現象であって，安定化一回で生き残るものの初めての例を与えた．

微分同相写像と呼ぶことにしよう．

定理 4.2 (K.–Mallick–Taniguchi (2023) [25])**.** 可縮なコンパクト可微分 4 次元多様体 W であって，相対的なエキゾチック微分同相写像を許容するものが存在する．

定理 4.2 のエキゾチック微分同相は，以下のように境界 Dehn ツイストとして得られる．一般に，互いに素な自然数 p, q, r に対して定義される

$$\Sigma(p,q,r) := \left\{(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^p + z_2^q + z_3^r = 0\right\} \cap S(\mathbb{C}^3)$$

は，Brieskorn 球面と呼ばれるクラスの 3 次元多様体で，自然に Seifert ファイバー空間になる．この中で，$\Sigma(2,3,13)$ は可縮で滑らかな 4 次元多様体 W の境界になるもののうち最も簡単なものの一つである．このような W の境界 Dehn ツイストが，定理 4.2 のエキゾチック微分同相の例を与える．

定理 4.2 で滑らかなアイソトピーの非存在を示す [25] における議論は，Baraglia の族の対角化定理 [3] を用いたやや間接的なものだった [*8]．より直接的に Dehn ツイストに対する族の Seiberg–Witten 不変量を計算することで，さらに精密な情報を得ることができる．具体的に結果を述べるため，以下の Brieskorn 球面を考える：

$$\begin{cases} \Sigma(6m, 6mk-1, 6mk+1) & (m \geq 1, \text{ and odd } k \geq 1), \\ \Sigma(n, n(6l+3)-1, n(6l+3)+1) & (\text{even } n \geq 2, \text{ and } l \geq 1). \end{cases} \tag{3}$$

これらはある具体的な可縮な可微分 4 次元多様体の境界になることが知られている [9].

定理 4.3 (K.–Lin–Mukherjee–Muñoz-Echániz (2024) [24])**.** Y を (3) のいずれかとし，W を Y を境界に持つ可縮な可微分 4 次元多様体とする．このとき，W の境界 Dehn ツイスト $\tau \in \mathrm{Diff}_\partial(W)$ の任意の冪 τ^n $(n \neq 0)$ は相対的なエキゾチック微分同相であり，さらに D^4 に局所化しない．

ここで微分同相 $f \in \mathrm{Diff}_\partial(W)$ が D^4 に局所化するとは以下のように定義される．滑らかな埋め込み $D^4 \hookrightarrow \mathrm{Int}(W)$ を固定すると，微分同相を恒等写像で拡張することで写像 $i : \mathrm{Diff}_\partial(D^4) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_\partial(W)$ が得られる．ある埋め込み $D^4 \hookrightarrow \mathrm{Int}(W)$ に対して f の写像類が $i_* : \pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(D^4)) \to \pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(W))$ の像に属すとき，f は D^4 に局所化するという．

D^4 への非局所化性から特に，$i : \mathrm{Diff}_\partial(D^4) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_\partial(W)$ が弱ホモトピー同値でないことになるが，高次元（正確には 6 次元以上）では対照的に以下のことが知られている：

定理 4.4 (Galatius–Randal-Williams (2023) [13])**.** W を可縮なコンパクト可微分多様体とし，$n := \dim W \geq 6$ と仮定する．このとき，任意の埋め込み $D^n \hookrightarrow \mathrm{Int}(W)$ に対し，$i : \mathrm{Diff}_\partial(D^n) \hookrightarrow \mathrm{Diff}_\partial(W)$ は弱ホモトピー同値写像である．

[*8] 位相的なアイソトピーの存在は，先行する Orson–Powell [38] に負う．

定理 4.3 は，この 4 次元類似が成立しないことを，具体的な 4 次元多様体と微分同相で示すものである．なお Galatius–Randal-Williams の結果の 4 次元類似の非成立は，[24] とは異なる方法でごく最近 Krushkal–Mukherjee–Powell–Warren [30] も示している．

Seifert ファイバー空間は，多くのシンプレクティック多様体の境界としても自然に現れる．例えば，$\Sigma(p,q,r)$ は対応する Milnor ファイバー

$$M(p,q,r) = \left\{(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^p + z_2^q + z_3^r = \varepsilon\right\} \cap D(\mathbb{C}^3) \quad (\varepsilon \in D(\mathbb{C}) \setminus \{0\}) \tag{4}$$

の境界になる．[25] では，いくつかの Milnor ファイバーの境界 Dehn ツイストが相対的にエキゾチックな微分同相であることを示した．[24] ではそれを拡張し，（モノポール Floer ホモロジーに対する適当な条件を満たす）無限個の Seifert ファイバー空間に対して，それを境界に持つ任意の不定値シンプレクティック充填の境界 Dehn ツイストが無限位数と示した．（シンプレクティック充填が単連結なら，[38] からこれは相対的なエキゾチック微分同相となる．）

これら [24] で得られた結果（より具体的には，Milnor ファイバー $M = M(2,3,7)$ の境界 Dehn ツイストが $\pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(M))$ で無限位数なこと）の帰結として以下のことが分かる：

(i) Milnor ファイバー M に対し，対応する Milnor ファイブレーション [*9] $M \to \tilde{M} \to D^2 \setminus \{0\}$ のモノドロミーとして標準的な写像類 $\mu_M \in \pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(M))$ が定まっていた．これは基本的な対象であるが，以下のように位相的カテゴリーと可微分カテゴリーで異なる性格を持ち得る：モノドロミー μ_M が $\pi_0(\mathrm{Homeo}_\partial(M))$ では有限位数だが，$\pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(M))$ では無限位数であるような Milnor ファイバーが存在する．

(ii) 単連結閉シンプレクティック 4 次元多様体 (M,ω) に対しては，シンプレクティック Torelli 群から $\pi_0(\mathrm{Diff}(M))$ への自然な写像は自明写像であると予想されている [*10]．一方，(convex) 境界付きシンプレクティック 4 次元多様体に対するこの類似は正しくない．

5 その他の事柄

5.1 族のゲージ理論のその他の応用

本稿では，族のゲージ理論の微分同相群への応用の，さらに最近の展開のうちごく一部を述べてきた．他にも触れるべきことは多くある．微分同相群に関するところでは，2022 年 3 月ごろまでの結果を [47] にまとめた．そこでは特に，先駆的な Ruberman の結果 [40] および 4 次元多様体の滑らかな族へのゲージ理論由来の制約を与えた加藤–中村–筆者 [17] の結果，Baraglia [3] の結果，[3] の境界付き 4 次元多様体への拡張についての谷口–筆者 [27] の結果について述べてある．

[*9] $M = M(p,q,r) \subset \mathbb{C}^3$ の表示 (4) を使うと，$(z_1,z_2,z_3) \mapsto z_1^p + z_2^q + z_3^r$ という写像がこのファイブレーション $\tilde{M} \to D^2 \setminus \{0\}$ を与える．

[*10] Donaldson による，シンプレクティック Torelli 群が Lagrangian 球面に沿った Dehn ツイストの自乗で生成されるという予想の帰結である．

本稿で述べられなかった族のゲージ理論の位相幾何的応用には以下が含まれる．4 次元多様体の群作用に関する中村の結果 [37] や Baraglia の結果 [1]，Riemann 計量の族を用いた 4 次元多様体内の曲面配位への応用に関する筆者の結果 [18, 21]，Baraglia [2] や飯田–Mukherjee–谷口–筆者 [16] の 4 次元多様体内の曲面への応用，飯田–Mukherjee–谷口–筆者 [16] や Mukherjee–谷口–筆者 [26] の 4 次元多様体内の 3 次元多様体の埋め込みへの応用．

微分幾何的な応用には，正スカラー曲率計量の空間のトポロジーについての Ruberman の結果 [42] と筆者の結果 [19] がある．幾何構造と関わるところでは，シンプレクティック微分同相群と微分同相群の比較についての Kronheimer の議論 [29]，Smirnov の [43] に始まる一連の結果，Lin [34] による結果がある．

5.2 Kontsevich 特性類

4 次元多様体の微分同相群に関する族のゲージ理論以外の最近の大きな流れは，渡邉忠之 [45] による 4 次元 Smale 予想の否定的解決 ($\mathrm{Diff}^+(S^4) \not\simeq \mathrm{SO}(5)$) という決定的な仕事に端を発する．これはゲージ理論とは全く別系統の道具である Kontsevich 特性類を用いるもので，その後も多くの進展がある．[45] 以降の展開のうち特に興味深いものとして，Kontsevich 特性類が「形式的に滑らか」(formally smooth) なファイバー束に対しても well-defined であることを示した Lin–Xie [35] の仕事に触れたい．[35] の結果は，Kontsevich 特性類と族のゲージ理論が検出できる範囲が相補的であることを示唆している．[35] から導かれる標語を一言で言えば，『Kontsevich 特性類は 4 次元多様体のモジュライ空間の中に出現する高次元と類似する部分を検出しており，族のゲージ理論は 4 次元特有の現象を検出している』ということであり，多くの例で実際に確かめられている．

6 今後の課題・展望

4 次元多様体の微分同相群のゲージ理論的研究には，まだ多くの問題が残っている．本稿を読んで気づかれる方も多いと思うが，高次ホモトピー群 $\pi_k(\mathrm{Diff}(X))$ について発表されている結果はまだほとんどない．Auckly–Ruberman は，Ruberman の 1-パラメータ族に関する一連の仕事 [40, 41, 42] を高次ホモトピー群に拡張する結果を多くの集会でアナウンスしている．これがひとつの道しるべとなると期待される．

モジュライ空間のホモロジー $H_*(B\mathrm{Diff}(X))$ については，現状族のゲージ理論で検出している元は全て捻れ元である．$\mathbb{Q}$ 係数でも同様の結果（ホモロジー的非安定性，無限生成性）の成立が期待され，研究が進んでいる．

エキゾチック微分同相写像については, 既約な閉 4 次元多様体上のエキゾチック微分同相はまだ一つも検出されておらず，大きな問題として残っている．

現在未開拓の事柄としては，$\mathrm{Diff}(X)$ の代数構造について，4 次元特有の現象はまだ見つかっていない．$\mathrm{Diff}(X)$ の代数構造をゲージ理論的に調べることでそのような現象を見出すことができるかは興味深い問題である．

また 5.2 節に述べた通り，Kontsevich 特性類と族のゲージ理論による相補的な研究が今後も進んでいくと期待される．これら両面からの研究により，4 次元多様体の微分同相群の理解は，数年前には想像もできないほど進んだと言えるだろう．現時点では予想もできない展開が今後も起きることを期待して筆を擱く．

参考文献

[1] David Baraglia. Obstructions to smooth group actions on 4-manifolds from families Seiberg-Witten theory. *Adv. Math.*, 354:106730, 32, 2019.

[2] David Baraglia. An adjunction inequality obstruction to isotopy of embedded surfaces in 4-manifolds. *arXiv:2001.04006*, 2020. to appear in Math. Res. Lett.

[3] David Baraglia. Constraints on families of smooth 4-manifolds from Bauer-Furuta invariants. *Algebr. Geom. Topol.*, 21(1):317–349, 2021.

[4] David Baraglia. Non-trivial smooth families of $K3$ surfaces. *Math. Ann.*, 387(3-4):1719–1744, 2023.

[5] David Baraglia. On the mapping class groups of simply-connected smooth 4-manifolds. *arXiv:2310.18819*, 2023.

[6] David Baraglia and Hokuto Konno. A gluing formula for families Seiberg-Witten invariants. *Geom. Topol.*, 24(3):1381–1456, 2020.

[7] Ryan Budney and David Gabai. Knotted 3-balls in S^4. *arXiv:1912.09029*, 2021.

[8] Mauricio Bustamante, Manuel Krannich, and Alexander Kupers. Finiteness properties of automorphism spaces of manifolds with finite fundamental group. *arXiv:2103.13468*, 2023.

[9] Andrew J. Casson and John L. Harer. Some homology lens spaces which bound rational homology balls. *Pacific J. Math.*, 96(1):23–36, 1981.

[10] Michael Hartley Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. *J. Differential Geometry*, 17(3):357–453, 1982.

[11] David Gabai, David T. Gay, Daniel Hartman, Vyacheslav Krushkal, and Mark Powell. Pseudo-isotopies of simply connected 4-manifolds. *arXiv:2311.11196*, 2023.

[12] Søren Galatius and Oscar Randal-Williams. Homological stability for moduli spaces of high dimensional manifolds. I. *J. Amer. Math. Soc.*, 31(1):215–264, 2018.

[13] Søren Galatius and Oscar Randal-Williams. The Alexander trick for homology spheres. *arXiv:2308.15607*, 2023.

[14] John L. Harer. Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 121(2):215–249, 1985.

[15] A. E. Hatcher. Concordance spaces, higher simple-homotopy theory, and applications. In *Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 1*, volume XXXII of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 3–21. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1978.

[16] Nobuo Iida, Hokuto Konno, Anubhav Mukherjee, and Masaki Taniguchi. Diffeomorphisms of 4-manifolds with boundary and exotic embeddings. *arXiv:2203.14878*, 2022.

[17] Tsuyoshi Kato, Hokuto Konno, and Nobuhiro Nakamura. Rigidity of the mod 2 families

Seiberg-Witten invariants and topology of families of spin 4-manifolds. *Compos. Math.*, 157(4):770–808, 2021.

[18] Hokuto Konno. Bounds on genus and configurations of embedded surfaces in 4-manifolds. *J. Topol.*, 9(4):1130–1152, 2016.

[19] Hokuto Konno. Positive scalar curvature and higher-dimensional families of Seiberg-Witten equations. *J. Topol.*, 12(4):1246–1265, 2019.

[20] Hokuto Konno. Characteristic classes via 4-dimensional gauge theory. *Geom. Topol.*, 25(2):711–773, 2021.

[21] Hokuto Konno. A cohomological Seiberg-Witten invariant emerging from the adjunction inequality. *J. Topol.*, 15(1):108–167, 2022.

[22] Hokuto Konno. The homology of moduli spaces of 4-manifolds may be infinitely generated. *arXiv:2310.18695*, 2023.

[23] Hokuto Konno and Jianfeng Lin. Homological instability for moduli spaces of smooth 4-manifolds. *arXiv:2211.03043*, 2022.

[24] Hokuto Konno, Jianfeng Lin, Anubhav Mukherjee, and Juan Muñoz-Echániz. On four-dimensional Dehn twists and Seifert fibrations. *preprint*, 2024.

[25] Hokuto Konno, Abhishek Mallick, and Masaki Taniguchi. Exotic Dehn twists on 4-manifolds. *arXiv:2306.08607*, 2023.

[26] Hokuto Konno, Anubhav Mukherjee, and Masaki Taniguchi. Exotic codimension-1 submanifolds in 4-manifolds and stabilizations. *arXiv:2210.05029*, 2022.

[27] Hokuto Konno and Masaki Taniguchi. The groups of diffeomorphisms and homeomorphisms of 4-manifolds with boundary. *Adv. Math.*, 409:Paper No. 108627, 58, 2022.

[28] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka. The Dehn twist on a sum of two $K3$ surfaces. *Math. Res. Lett.*, 27(6):1767–1783, 2020.

[29] Peter Kronheimer. Some non-trivial families of symplectic structures. *preprint*.

[30] Vyacheslav Krushkal, Anubhav Mukherjee, Mark Powell, and Terrin Warren. Corks for exotic diffeomorphisms. *arXiv:2407.04696*, 2024.

[31] Alexander Kupers. Proving homological stability for homeomorphisms of manifolds. *arXiv:1510.02456*, 2016.

[32] Alexander Kupers. Some finiteness results for groups of automorphisms of manifolds. *Geom. Topol.*, 23(5):2277–2333, 2019.

[33] Jianfeng Lin. Isotopy of the Dehn twist on K3#K3 after a single stabilization. *arXiv:2003.03925*, 2020.

[34] Jianfeng Lin. The family Seiberg-Witten invariant and nonsymplectic loops of diffeomorphisms. *arXiv:2208.12082*, 2022.

[35] Jianfeng Lin and Yi Xie. Configuration space integrals and formal smooth structures. *arXiv:2310.14156*, 2023.

[36] Ib Madsen and Michael Weiss. The stable moduli space of Riemann surfaces: Mumford's conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 165(3):843–941, 2007.

[37] Nobuhiro Nakamura. The Seiberg-Witten equations for families and diffeomorphisms of 4-manifolds. *Asian J. Math.*, 7(1):133–138, 2003.

[38] Patrick Orson and Mark Powell. Mapping class groups of simply connected 4-manifolds with boundary. *arXiv:2207.05986*, 2022.

[39] Frank Quinn. Isotopy of 4-manifolds. *J. Differential Geom.*, 24(3):343–372, 1986.

[40] Daniel Ruberman. An obstruction to smooth isotopy in dimension 4. *Math. Res. Lett.*, 5(6):743–758, 1998.

[41] Daniel Ruberman. A polynomial invariant of diffeomorphisms of 4-manifolds. In *Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998)*, volume 2 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 473–488. Geom. Topol. Publ., Coventry, 1999.

[42] Daniel Ruberman. Positive scalar curvature, diffeomorphisms and the Seiberg-Witten invariants. *Geom. Topol.*, 5:895–924, 2001.

[43] Gleb Smirnov. From flops to diffeomorphism groups. *Geom. Topol.*, 26(2):875–898, 2022.

[44] Dennis Sullivan. Infinitesimal computations in topology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (47):269–331, 1977.

[45] Tadayuki Watanabe. Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of $\mathrm{Diff}(S^4)$. *arXiv:1812.02448*, 2018.

[46] Tadayuki Watanabe. Theta-graph and diffeomorphisms of some 4-manifolds. *arXiv:2005.09545*, 2023.

[47] 今野北斗. 族のゲージ理論. 『数学』論説，*to appear.*