

# SEIBERG–WITTEN FLOER HOMOTOPY AND ITS APPLICATIONS

今野 北斗（東京大学大学院数理科学研究科）

## 1. 序

Seiberg–Witten 方程式から生じる Floer 理論的なセッティングに安定ホモトピー論を適用し、 $3 \cdot 4$  次元多様体の情報を取り出す研究 — これを総称し Seiberg–Witten Floer ホモトピー論と呼ぶことにしよう。このような理論の構想は、少なくとも Cohen–Jones–Segal [3] まで遡れるであろうが、本格的な研究は Manolescu の 2003 年の仕事 [24] により幕を開けた。Manolescu は、適当な条件の下、3 次元多様体に対する Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型と呼ばれる “空間に値を取る” 不変量を構成した。出版は前後するが、この仕事の現れる以前から、Kronheimer–Mrowka は、Seiberg–Witten 方程式に基づく Floer ホモロジーであるモノポール Floer ホモロジーを構成していた [19]。Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型は、その（同変）特異ホモロジーを取るとモノポール Floer ホモロジーを復元すると当初から予想されていたものである。比較的最近、この予想は厳密に証明された (Lidman–Manolescu [20])。すなわち、Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型は、“代数值” の不変量であるモノポール Floer ホモロジーの空間レベルへの持ち上げと言える。

4 次元多様体との関係はどうであろうか。既に閉 4 次元多様体に対しては、古田の  $10/8$  不等式 [10]、Bauer と古田による Bauer–Furuta 不変量 [2] の構成により、Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似に安定ホモトピー論を適用する研究は成功を収めていた。Manolescu [24] は、彼の Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型は、Bauer–Furuta 不変量を境界付き 4 次元多様体へ拡張した「相対 Bauer–Furuta 不変量」の受け皿となることを示した。すなわち、標語的には、Manolescu は空間値 (space valued) の TQFT を構成したことになる<sup>1</sup>。

Floer 理論には様々なヴァージョンがあるが、偏微分方程式に基づく空間値 TQFT は、未だに Manolescu の構成したものおよびその拡張 ([13, 14, 29]) しか知られていない。これは Seiberg–Witten 方程式の最大の特長事情、すなわちモジュライ空間のコンパクト性によるところが大きい。そしてこのこと — Floer ホモトピー論の存在 — は、低次元多様体のゲージ理論的研究における、Seiberg–Witten 理論の大きなアドバンテージである。これを活かして、種類を互いに異にする応用が今も生まれつつある。本稿では、まず Manolescu による Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型の構成と、その特徴を振り返る。そして最近現れている低次元トポロジー・幾何学における Seiberg–Witten Floer ホモトピー論の応用を、講演者が関わってきた以下のものを中心に紹介したい：

- (1) 結び目に対する Floer  $K$  理論
- (2) 4 次元多様体上の正スカラー曲率計量への障碍
- (3) 4 次元多様体の微分同相群への応用

## 2. SEIBERG–WITTEN FLOER 安定ホモトピー型の構成

まずは、Manolescu による Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型の構成 [24] のあらましを説明しよう。Y を向きの付いた滑らかな閉 3 次元多様体とし、以下  $b_1(Y) = 0$  と仮定する。（これは Y が有

---

本研究は JSPS 科研費 19K23412, 21K13785 の助成を受けたものである。

<sup>1</sup>4 次元多様体のコボルディズムに対応してモノポール Floer ホモロジー間走る写像も、相対 Bauer–Furuta 不変量に同変特異ホモロジーを適用して復元されると期待されるが、[20] では扱われておらず、2022 年 7 月現在、証明が遂行された文献はまだ存在しない。

理ホモロジー 3 球面であると仮定することと同値である.) さらに  $Y$  に  $\text{spin}^c$  構造  $\mathfrak{t}$  をひとつ与える. Manolescu は,  $(Y, \mathfrak{t})$  上の Seiberg–Witten 方程式を用いて, ある有限 CW 複体 (の安定ホモトピー型)

$$SWF(Y, \mathfrak{t})$$

を構成した. これがこれから説明したい Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型と呼ばれる不変量である. これは  $S^1$  が自然に作用する空間 (の安定ホモトピー型) であり, 安定ホモトピーも全て  $S^1$  同変の範疇で考える. なお, 応用上は  $b_1(Y) = 0$  という仮定は是非外したいのだが, これを外すことは全く自明な問題ではなく, ごく最近に至るまで, Khandhawit–J. Lin–笹平 [13, 14] および笹平–Stoffregen [29] により, この仮定を外す研究が続けられている.

さて,  $SWF(Y, \mathfrak{t})$  の構成の流れをごく乱暴にまとめると次のようになる (図式の各ステップの “ $\mapsto$ ” は普通の意味での写像ではなく, 多くの不定性があるが最終的には安定ホモトピーに吸収される, という類いのものである):

$$\begin{array}{ccc}
(Y, \mathfrak{t}) & & : \text{spin}^c \text{ 有理ホモロジー 3 球面} \\
\downarrow & & \\
S^1 \curvearrowright (CSD : \mathcal{C}(Y, \mathfrak{t}, g) \rightarrow \mathbb{R}) & & : \text{Chern–Simons–Dirac 汎関数} (\leftrightarrow \text{SW 方程式}) \\
\downarrow \text{有限次元近似} & & \\
S^1 \curvearrowright (\mathbb{R} \curvearrowright (\text{有限次元空間})) & & : \text{有限次元の力学系} \\
\downarrow \text{Conley 指数} & & \\
S^1 \curvearrowright SWF(Y, \mathfrak{t}) & & : \text{SW Floer 安定ホモトピー型}
\end{array}$$

この図式の各ステップを, 荒っぽくではあるがもう少し説明しよう. (ただ, ここを飛ばしても具体的応用の説明を読む分には問題はない.)

ステップ 1 (関数空間  $\mathcal{C}(Y, \mathfrak{t}, g)$  と汎関数  $CSD$ ):  $Y$  の上に一つ Riemann 計量  $g$  を取ると,  $Y$  上の “関数空間”  $\mathcal{C}(Y, \mathfrak{t}, g)$  が定まる. (正確には  $\mathcal{C}(Y, \mathfrak{t}, g)$  は次のものである.  $g$  を固定すると,  $\text{spin}^c$  構造  $\mathfrak{t}$  からスピノル束と行列式直線束と呼ばれるベクトル束が得られる.  $\mathcal{C}(Y, \mathfrak{t}, g)$  は, 行列式直線束の  $U(1)$  接続とスピノル束の切断の組の全体のなす空間として定義される.) この関数空間  $\mathcal{C}(Y, \mathfrak{t}, g)$  の上には, Chern–Simons–Dirac 汎関数と呼ばれる汎関数  $CSD : \mathcal{C}(Y, \mathfrak{t}, g) \rightarrow \mathbb{R}$  が乗っている. これは, その勾配ベクトル場の方程式が  $\mathbb{R} \times Y$  上の Seiberg–Witten 方程式になっているようなものである. (ここでは省略するが, 具体的な式で書ける.) なお, Seiberg–Witten 方程式の解のモジュライのコンパクト性から,  $\mathcal{C}(Y, \mathfrak{t}, g)$  の十分大きい半径の ball  $B(\mathcal{C}(Y, \mathfrak{t}, g))$  が存在し,  $CSD$  の全ての臨界点やそれらを結ぶ flow は, ゲージ変換で適当に動かすことでこの ball に入っているようにできる.

ステップ 2 (有限次元近似): 次に, 上のセッティング (を適当な無限次元部分空間に制限したものの) の有限次元近似を考え, 有限次元の力学系を得よう. これは閉 4 次元の場合に古田 [10], Bauer–古田 [2] が行っていた議論の 3 次元版である. 具体的には次のような議論である. まず, 汎関数  $CSD$  は, 関数空間  $\mathcal{C}(Y, \mathfrak{t}, g)$  への自然なゲージ変換群  $\mathcal{G} = \text{Map}(Y, U(1))$  の作用に関して不変である. ここで, ある部分群  $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$  であって,  $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0 \cong U(1)$  (これは定数関数の分である) かつ  $\mathcal{C}(Y, \mathfrak{t}, g)$  の  $\mathcal{G}_0$  の作用に関する「大域的なスライス」を与えるベクトル空間  $\mathcal{V} \subset \mathcal{C}(Y, \mathfrak{t}, g)$  が存在するようなものを取りることができる. ( $\mathcal{V}$  はまだ無限次元のベクトル空間である.)  $\mathcal{V}$  に制限された汎関数  $CSD|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  の勾配ベクトル場  $\mathcal{X}$  を  $\mathcal{V}$  上で考える. ここで  $\mathcal{V}$  の有限次元部分空間  $V$  を適当に取り, ベクトル場  $\mathcal{X}$  を用いて  $V$  上のあるベクトル場  $X$  を構成する. この  $V$  と  $X$  をそれぞれ  $\mathcal{V}$  と  $\mathcal{X}$  の有限次元近似とみなす.  $V$  の遠方でベクトル場  $X$  をカットオフしてコンパクト台にすることでこのベクトル場を積分でき, その結果  $V$  には  $\mathbb{R}$  が作用し, 有限次元の力学系が得られる.

ステップ 3 (Conley 指数): 一般に, 有限次元空間の上の力学系に対しては, Conley 指数と呼ばれる基点付き空間のホモトピー型を対応させる枠組みがある [4]. ステップ 1 の最後で考えた  $\mathcal{C}(Y, \mathfrak{t}, g)$

の ball の半径を用いて、 $CSD$  の臨界点やそれらを結ぶ flow の情報が反映されるくらい十分大きい  $V$  内の ball  $B(V)$  を取る。この  $B(V)$  に制限した力学系に対して Conley 指数を適用して得られるものが、 $SWF(Y, t)$  の大本となる空間（のホモトピー型） $I(Y, t, g, V)$  である。 $I(Y, t, g, V)$  は、ごく大雑把に直感的に言えば、境界  $\partial B(V)$  においてベクトル場  $X$  を積分した flow が外に向かって逃げていく部分を 1 点に潰すことで得られる空間である。（潰された点が基点となる。）flow が外に逃げていく方向を見ることは、Morse 理論における非安定多様体を考えることに相当し、Conley 指数は、力学系の Morse 理論的な情報を上手く抽出した空間を与える対応と言える。（例えば、有限次元多様体上の一つの Morse 関数を考える。Morse 関数の勾配ベクトル場が誘導する力学系を、ひとつの臨界点の近傍に制限して得られる力学系の Conley 指数を取ると、これはこの臨界点の Morse 指数の次元の球面になることが分かる。）

ステップ 4（不定性の処理）：以上の  $I(Y, t, g, V)$  の構成における不定性（組  $(Y, t)$  のみで決まらない部分）は、計量  $g$  と有限次元近似  $V$  の取り方の 2 種類である。しかしこれらは共に、空間の安定ホモトピー型を考えることに吸収できることが示される。すなわち、あらかじめ  $I(Y, t, g, V)$  に  $g$  と  $V$  に依存して決まるあるベクトル空間（の 1 点コンパクト化）を「desuspend」しておいた対象を  $SWF(Y, t)$  とおくと、 $SWF(Y, t)$  は安定ホモトピー型として well-defined な対象となる。ポイントは、Seiberg–Witten 方程式の非線形項をホモトピーで変形し線型な状況に持ち込むと、前ステップの最後に書いたような Morse 関数の臨界点周りの状況となり、球面が現れることである。

ここで、上でも少し言及したが、Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型が持っている対称性について述べておこう。これらは多くの応用で重要である。まず、Conley 指数  $I(Y, t, g, V)$  には自然に  $S^1$  が作用している。これは、ゲージ変換群  $G = \text{Map}(Y, U(1))$  の中に入っている定数関数分（ $\cong U(1) = S^1$ ）がスライス  $\Sigma$  に作用しており、それが構成の最後まで生き残るからである。安定ホモトピーを考える際には、正確にはこの  $S^1$  の作用を覚えておく必要があり、空間の安定化として許される操作は  $S^1$  の自明実 1 次元表現  $\mathbb{R}$  とスカラー倍による複素 1 次元表現  $\mathbb{C}$  の 1 点コンパクト化を有限回スマッシュ積することのみである。結果、最終的にできた  $SWF(Y, t)$  は、 $S^1$  作用込みの安定ホモトピー型として well-defined となる。

さらに、 $t$  が spin 構造から来ている場合は、より大きい Lie 群

$$\text{Pin}(2) = S^1 \sqcup jS^1 (\subset \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C} = \mathbb{H})$$

が Conley 指数  $I(Y, t, g, V)$  に作用しており、 $SWF(Y, t)$  は  $\text{Pin}(2)$  同変な安定ホモトピー型として well-defined となる。これはスピンな  $3 \cdot 4$  次元多様体上の Seiberg–Witten 方程式の持つ  $\text{Pin}(2)$  対称性の帰結である。このより大きい対称性が多くの応用で本質的となる。

### 3. 相対 BAUER–FURUTA 不変量

Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型は 3 次元多様体の不変量であるが、4 次元多様体との関係も重要である。歴史的にはむしろ、以下説明するように、先に 4 次元における理論があり、Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型はその延長線上にあるべきものとして作られている。

背景は次の Bauer と古田の閉 4 次元多様体に対する仕事である。彼らは、滑らかな閉 4 次元多様体に対し、現在 Bauer–Furuta 不変量と呼ばれる微分位相不変量を定義した [2]。これは、Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似そのものを、不定性を安定ホモトピーに吸収させることで定義される不変量である。Bauer–Furuta 不変量に特異ホモロジーを適用することで Seiberg–Witten 不変量が復元でき、さらに Seiberg–Witten 不変量よりも真に強い情報を持っていることが知られている<sup>2</sup>。

前節で説明した 3 次元多様体に対する Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型は、境界付き 4 次元多様体に対して Bauer–Furuta 不変量を拡張する際の受け皿として用いられる。この拡張された Bauer–Furuta 不変量は相対 Bauer–Furuta 不変量と呼ばれ、この定式化も Manolescu による [24]。多くの面

<sup>2</sup>例えば、 $K3 \# K3$  に対しては Seiberg–Witten 不変量は消えているため、Seiberg–Witten 不変量を用いてその上のエキゾチック構造を detect することはできない。しかし Bauer–Furuta 不変量は消えておらず、これを用いて  $K3 \# K3$  上のエキゾチック構造を detect することができる。

白い応用において, Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型を考えるだけでなく, 相対 Bauer–Furuta 不変量も合わせ考えることが必要である.

相対 Bauer–Furuta 不変量のインプットとアウトプットを少し説明しよう.  $Y_0, Y_1$  を, 向きの付いた滑らかな閉 3 次元多様体とし, 共に  $b_1(Y_i) = 0$  を満たすとする. さらに各  $Y_i$  上には  $\text{spin}^c$  構造  $\mathfrak{t}_i$  をひとつ固定する.  $(X, \mathfrak{s})$  を,  $(Y_0, \mathfrak{t}_0)$  から  $(Y_1, \mathfrak{t}_1)$  への滑らかで向きの付いたコンパクトな  $\text{spin}^c$  構造も込めたコボルディズムとする. 以下, 簡単のため  $b_1(X) = 0$  と仮定する (が, 3 次元多様体に対する  $b_1(Y) = 0$  という仮定とは違い, これは本質的な制約ではない). このとき, 相対 Bauer–Furuta 不変量は, ある有限次元ベクトル空間  $V_X, W_W$  に対し,

$$BF(X, \mathfrak{s}) : V_X^+ \wedge SWF(Y_0, \mathfrak{t}_0) \rightarrow W_X^+ \wedge SWF(Y_1, \mathfrak{t}_1)$$

という形の安定写像 (stable map) として定式化される. (ここで  $V_X^+, W_X^+$  は  $V_X, W_X$  の 1 点コンパクト化である.) すなわち,  $SWF(Y_i, \mathfrak{t}_i)$  たちは安定ホモトピー型として well-defined なのであるが, その代表元の空間をひとつ固定すると,  $BF(X, \mathfrak{s})$  はある (基点を保つ) 連続写像で代表できる. また対称性については,  $BF(X, \mathfrak{s})$  は  $S^1$  同変連続写像 (の安定化) で, もし  $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}_i$  が全てスピン構造から来している場合,  $\text{Pin}(2)$  同変連続写像 (の安定化) になる.  $V_X, W_X$  は  $\text{spin}^c$  構造の付与された 4 次元多様体  $(X, \mathfrak{s})$  のある関数空間の有限次元近似として生じるものであり, これらの (正確には  $S^1$  あるいは  $\text{Pin}(2)$  表現のタイプごとの) 次元の差は指数定理で計算でき,  $(X, \mathfrak{s})$  のある特性数となる.

$BF(X, \mathfrak{s})$  の構成は, 大まかに言えば次のようなものである. まず,  $V_X, W_X$  のパートは,  $X$  上の Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似として得られる. 適当な双対を考えることで  $Y_0 = \emptyset$  の状況に帰着する. (ただし  $Y_1$  は有理ホモロジー 3 球面の非交和になることを許す.) そして,  $SWF(Y_1)$  のパートへの写像は, 「 $X$  上の関数空間の元を  $Y$  上の関数空間の元に制限する」写像の有限次元近似として得られるものである. ごく荒っぽく標語的にまとめると,

$BF(X, \mathfrak{s}) = ((X \text{ 上の Seiberg–Witten 方程式}) \times (\text{境界への制限})) \text{ の有限次元近似}$   
である.

#### 4. SEIBERG–WITTEN FLOER ホモトピー論のアドバンテージ

既に述べたように, Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型はモノポール Floer ホモロジーを復元することが示されている<sup>3</sup>[20]. それに留まらず, Seiberg–Witten Floer ホモトピー論には, 従来の Floer ホモロジー論 (特にモノポール Floer ホモロジー) と比較したとき, いくつかのアドバンテージがある. それをここで列挙しよう<sup>4</sup>:

**利点 1**: ordinary コホモロジーだけでなく, 一般コホモロジーを適用できる.

**利点 2**: 横断正則性の問題がない. その帰結として, 種々の群作用の情報を取り入れたり理論の変種を考えるのがやりやすい.

**利点 3**: Seiberg–Witten 方程式に基づく Floer 理論的な枠組みから生じる不変量たちを統一的に扱える.

これらをもう少し説明しよう. まず利点 1 は, 他の利点と比較したとき, 原理的なレベルで決定的なものと言える. 元々 Floer ホモロジーは, 無限次元多様体 (2 節の記号で言えば  $\mathcal{C}(Y, \mathfrak{t}, g)$  あるいはそのゲージ群の作用によるスライス  $\mathcal{V}$ ) の上の然るべき汎関数 (2 節の記号で言えば  $CSD$ ) を考え, 標語的にはそれに対する Morse ホモロジー的な構成を実行することで得られるものである. これは, 考えている無限次元多様体の, “ $\infty/2$  次数の” ordinary (コ) ホモロジーを考えていることにあたる. しかし, 単に特異ホモロジーや他の一般コホモロジー理論, 例えば  $K$  理論をこの無限次元多様体に適用しても意味のある情報は得られない. (関数空間  $\mathcal{C}(Y, \mathfrak{t}, g)$  や  $\mathcal{V}$  はただのベクトル空間なので, トポロジ的に面白い情報は持っていない.) しかし, ひとたび Floer ホモトピー型  $SWF(Y, \mathfrak{t})$  が手に入ると, これに一般コホモロジー理論を適用することで意味のある情報を引き出すことができる. 例えば  $SWF(Y, \mathfrak{t})$  に  $K$  理論を適用すると, “Seiberg–Witten Floer  $K$  理論” と呼ぶべき理論が手に入る. こ

<sup>3</sup>Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型が Manolescu の原論文 [24] の方法で定義される  $b_1 = 0$  の範囲では.

<sup>4</sup>ディスアドバンテージも述べておくと, 情報量が多いが故に計算が難しいことが挙げられる.

これは Manolescu によって 2014 年に実行され [26], 古田の 10/8 不等式 [10] が境界付き 4 次元多様体に拡張された。これは、一言で言えば、相対 Bauer–Furuta 不変量に  $\text{Pin}(2)$  同変  $K$  理論を適用することで得られるものである。Floer  $K$  理論は、低次元多様体に対して定義されている他の Floer 理論であるインスタントン Floer ホモロジー, Heegaard Floer ホモロジーには現時点では対応物が全く存在しない。

利点 2 は、利点 1 と比べると技術的であるが、実際上は無視できない点である。Floer ホモロジーの構成の際には、種々の横断正則性の問題が発生する。Floer ホモロジーは、上で述べたように、無限次元の Morse ホモロジー的な構成であるため、臨界点での横断正則性や勾配流の横断正則性 (Morse–Smale 条件) が必要となり、それを達成するための摂動を考察するのが技術的に重い。しかし、2 節で説明した Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型  $SWF(Y, t)$  の構成から想像される通り、 $SWF(Y, t)$  の構成では、横断正則性を気にする場面は全くなく、何ら摂動を取る必要がない。このため  $SWF(Y, t)$  の構成は、モノポール Floer ホモロジーの構成に比べると、技術的にはずっと簡明である<sup>5</sup>。このことの大きなメリットとして、群作用の効果を理論に取り込みやすいことが挙げられる。横断正則性と群作用に対する同変性は一般に相性が悪い。(前者は generic にものを作る必要があるのに対し、後者はある程度 canonical にものを作る必要があるからである。)  $SWF(Y, t)$  には横断正則性の問題がないため、理論に群作用を入れることが容易である。このことの重要な応用として、スピンな 3 次元多様体上の Seiberg–Witten 方程式に対する  $\text{Pin}(2)$  対称性を取り入れた、“ $\text{Pin}(2)$  同変 Seiberg–Witten Floer ホモロジー”を構成し、それを用いて三角形分割予想を否定的に解いた Manolescu の重要な仕事が挙げられる [27]。尤も、その後 F. Lin [22] により、技術的により複雑であるが、モノポール Floer ホモロジーに  $\text{Pin}(2)$  対称性を取り込んだ理論が作られ、これも三角形分割予想の否定解を与えることが確かめられた。このように、利点 1 に比べると原理的に既存の Floer ホモロジーで解決できないかは微妙な場合があるが、群作用を Floer ホモロジーに取り込むことはより困難であることが普通である。

利点 3 は、理論的に物事を整理する上で、Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型がとても便利な言語を与えているという性格のものである。Seiberg–Witten 方程式から Floer 理論的なアイデアで得られる不変量の中では、それが定義されている範疇において Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型が現状最も強力であり、謂わば universal な不変量である。そのため、Seiberg–Witten Floer 理論的な不変量を互いに比較したり統一的に調べる際に、Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型を用いることですっきりと整理することができる。

以下本稿の残りでは、以上 3 つの利点を活かして実際にどのような応用ができるかを、講演者が関わってきた範囲から 3 つに分けて紹介する。

## 5. 応用 1 : 結び目に対する FLOER $K$ 理論

この節の内容は宮澤仁氏・谷口正樹氏との共同研究 [15] である。これは前節で述べた Seiberg–Witten Floer ホモトピー論の利点 1 (一般コホモロジー理論が適用可能なこと) と利点 2 (群作用との相性の良さ) を活かしたものである。具体的応用が、結び目および  $3 \cdot 4$  次元多様体上の群作用に対して得られる。

まず枠組みを大まかに説明しよう。以下簡単のため、結び目と書いたら、 $S^3$  内の向きのついた結び目のみを考える。結び目  $K$  が与えられると、それに沿った  $S^3$  の二重分岐被覆  $\Sigma(K)$  が得られる。 $\Sigma(K)$  には被覆変換として involution  $\iota_K : \Sigma(K) \rightarrow \Sigma(K)$  が付随している。そこで一般に、3 次元多様体  $Y$  とその上の involution  $\iota : Y \rightarrow Y$  に対し、involution の情報を組み込んだ Floer  $K$  理論を構成しておき、それを  $(Y, \iota) = (\Sigma(K), \iota_K)$  に対して適用することで、結び目  $K$  に対する Floer  $K$  理論を与える、というのが大筋である。これを Seiberg–Witten Floer  $K$  理論を用いて実行し、特に Manolescu の相対版の 10/8 不等式 [26] の変種をこの枠組みで考えることで、結び目が 4 次元多様体の中で張る曲面の情報に対する Floer  $K$  理論的な制約を与えることができる。

<sup>5</sup>モノポール Floer ホモロジーを構成した Kronheimer–Mrowka の教科書 [19] は 800 ページ近い。一方、Conley 指数の理論や解析の証明の一部で他文献を引用しているにせよ、Manolescu の Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型の構成の論文 [24] と相対 Bauer–Furuta 不変量の貼り合わせの論文 [25] を合わせても 100 ページに満たない。

まず設定をもう少し正確に書くことにする． $Y$  を向きづけられた有理ホモロジー 3 球面とし， $\mathfrak{t}$  をその上のひとつのスピン構造とする． $\iota: Y \rightarrow Y$  を滑らかな向きを保つ involution とし，さらに  $\mathfrak{t}$  を保つとする．加えて， $\iota$  の固定点集合  $Y^\iota$  が空で無く，余次元 2 と仮定する．すなわち， $Y^\iota$  は  $Y$  内の link として現れるとする．宮澤氏・谷口氏との共同研究 [15] では，involution の情報を反映した Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型の変種

$$SWF_{\mathbb{Z}/4}(Y, \mathfrak{t}, \iota)$$

を定義した．ここで記号  $\mathbb{Z}/4$  は理論が  $\mathbb{Z}/4$  同変なことを indicate している．以下この対象からどういう応用が引き出せるかを述べたいのだが，その前に  $SWF_{\mathbb{Z}/4}(Y, \mathfrak{t}, \iota)$  の構成を概要を説明しよう．

ベースとなるのは加藤佑矢の仕事 [11] である．スピン閉 4 次元多様体  $X$  に滑らかな involution  $\iota$  が与えられ，その固定点集合が余次元 2 と仮定する<sup>6</sup>．加藤はこのような  $\iota$  を用いて，Seiberg–Witten 方程式上の興味深い involutive な対称性  $I$  を作った．これは， $\iota$  のスピン構造への持ち上げ<sup>7</sup>と，スピン構造の charge conjugation による自己対称性とを抱き合わせて作るものである．面白いところは，この Seiberg–Witten 方程式の対称性  $I$  は，通常の変理論で考察されるものと異なるものである点である．例えば，スピノル束に誘導される対称性は，(通常の変理論なら複素線型に作用するところが) 複素反線型となる．加藤は，この Seiberg–Witten 方程式の involutive な対称性  $I$  の固定点集合に Seiberg–Witten 方程式を制限したものを考え，古田の 10/8 不等式の議論 [10] をこの固定点部分に対して適用することで， $\iota$  の交叉形式への作用への強力な制約を得た．ただし，加藤の対称性  $I$  は  $\text{Pin}(2)$  全体と可換で無いので，古田の議論における  $\text{Pin}(2)$  対称性をそのまま使うことはできない．しかしこの対称性  $I$  は  $j \in \text{Pin}(2)$  とは可換なため， $j$  が生成する  $\langle j \rangle \cong \mathbb{Z}/4$  同変な  $K$  理論を考察することで“10/8 不等式の (ひとつの) involution 版”とでも言うべきものを得ている．

上で述べた Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型の変種  $SWF_{\mathbb{Z}/4}(Y, \mathfrak{t}, \iota)$  は，一言で言えば加藤の議論の 3 次元版である．すなわち，加藤の議論と同様に， $\iota: Y \rightarrow Y$  から Seiberg–Witten 方程式の involutive な対称性  $I$  を作り，2 節で説明した Manolescu による Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型の構成を  $I$  の不変部分に制限して実行する．上の加藤の議論と同様の事情で，理論全体は  $\text{Pin}(2)$  でなく  $\mathbb{Z}/4$  同変になっている．このようにして得られるものが  $SWF_{\mathbb{Z}/4}(Y, \mathfrak{t}, \iota)$  である．ここで，Seiberg–Witten Floer ホモトピー論では横断正則性を気にしなくて良いため， $I$  不変部分を取る操作は，何ら怖いこともなく，機械的に行えることに注意されたい (4 節の利点 2)．

ここで， $SWF_{\mathbb{Z}/4}(Y, \mathfrak{t}, \iota)$  に  $K$  理論を適用しよう．その前に，Manolescu [26] の相対 10/8 不等式に説明を加えよう．古田の 10/8 不等式 [10] は 4 次元多様体の数値的不変量に対する不等式であるので，その相対版のためには，境界の 3 次元多様体のある数値的不変量が必要と想定される．Manolescu は，彼が  $\kappa(Y, \mathfrak{t})$  と書くスピン 3 次元多様体の有理数値不変量を導入し，これを境界からの補正項とすることで相対 10/8 不等式を定式化した．この  $\kappa(Y, \mathfrak{t})$  は，Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型の  $S^1$  不変部分を全体に埋め込む包含写像

$$SWF(Y, \mathfrak{t})^{S^1} \hookrightarrow SWF(Y, \mathfrak{t})$$

が  $\text{Pin}(2)$  同変  $K$  理論に誘導する写像を用いて定義されるもので，モジュライ空間に基づく従来のゲージ理論の描像で言えば可約解の情報を  $K$  理論的に引き出したものである．また， $S^1$  同変 ordinary コホモロジーで言えば Frøyshov 不変量 (後述) に相当する．

この Manolescu の議論と同様に， $SWF_{\mathbb{Z}/4}(Y, \mathfrak{t}, \iota)$  に  $\mathbb{Z}/4$  同変  $K$  理論  $K_{\mathbb{Z}/4}$  を適用することで，involution の情報を Floer  $K$  理論的に引き出した有理数値不変量

$$\kappa(Y, \mathfrak{t}, \iota) \in \mathbb{Q}$$

を定義することができる．これを用いると，二つの involution 付きスピン有理ホモロジー 3 球面  $(Y_0, \mathfrak{t}_0, \iota_0), (Y_1, \mathfrak{t}_1, \iota_1)$  の間に滑らかな involution が乗ったスピン 4 次元多様体のコボルディズム  $(X, \mathfrak{s}, \iota_X)$

<sup>6</sup> 本当はもっと弱い仮定で良いのだが，ここでは割愛する．言葉だけ書いておくと，involution が odd type と呼ばれるものであるという仮定である．

<sup>7</sup> 固定点の仮定からこれは自動的に order 4 となる．

が与えられたとき,  $\iota_X$  の交叉形式への作用に対し,  $\kappa(Y_i, \mathfrak{t}_i, \iota_i)$  を補正項として用いた 10/8 不等式型の制約を与えることができる. これは  $\iota_X$  への強い制約を与えており, non-smoothable な位相的 involution を適当な境界付き 4 次元多様体  $X$  の上で detect することができる. これは加藤が閉 4 次元多様体に対して行っていた応用の境界付きの場合のアナログと言える.

以上の枠組みを結び目に適用しよう. 既に述べたように, 結び目  $K$  に沿った  $S^3$  の二重分岐被覆  $\Sigma(K)$  とそれに付随する被覆変換として生じる involution  $\iota_K : \Sigma(K) \rightarrow \Sigma(K)$  を考え,

$$SWF_{\mathbb{Z}/4}(K) := SWF_{\mathbb{Z}/4}(\Sigma(K), \mathfrak{t}, \iota_K),$$

$$\kappa(K) := \kappa(\Sigma(K), \mathfrak{t}, \iota_K) \in \mathbb{Q}$$

と定義する. ここで  $\mathfrak{t}$  は  $\Sigma(K)$  の上のスピン構造で, 一般に  $H^1(\Sigma(K); \mathbb{Z}/2) = 0$  なのでそのようなものは一意的である. このようにして, 「結び目に対する Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型」と「結び目に対する  $\kappa$  不変量」を定義できる. そして, この  $\kappa$  不変量を用いて, 上で説明した, involution に対する 10/8 型の制約を結び目とそれが 4 次元多様体内で張る曲面の言葉に翻訳すると, これは可微分構造由来のとても強い制約となる.

具体的にその制約を述べてみると次のようになる.  $X$  を滑らかで向きづけられた閉 4 次元多様体とし,  $H_1(X; \mathbb{Z}) = 0$  と仮定する.  $X$  から二つの 4 次元 disk をくり抜き, その境界の二つの  $S^3$  の中に結び目  $K, K'$  が与えられたとする.  $S$  を  $X$  内の  $K$  から  $K'$  への滑らかで向きの付いた連結なコボルディズムとする. 基本類  $[S]$  が 2 で割り切れ,  $[S]/2$  が 2 次 Stiefel–Whitney 類  $w_2(X)$  の Poincaré 双対であると仮定する<sup>8</sup>.

**定理 1** (K.–宮澤–谷口 [15] (2021)). 上の設定の下, 次が成立する:

$$(1) \quad -\frac{\sigma(X)}{8} + \frac{9}{32}[S]^2 - \frac{9}{16}\sigma(K') + \frac{9}{16}\sigma(K) \leq b^+(X) + g(S) + \kappa(K') - \kappa(K).$$

ここで  $\sigma(K)$  は結び目  $K$  の符号数と呼ばれる不変量で,  $g(S)$  は  $S$  の種数, また  $\sigma(X)$  は  $X$  の符号数で,  $b^+(X)$  は  $X$  の交叉形式に関して正定値な  $H^2(X; \mathbb{R})$  の部分空間の最大次元である.

これは結び目に対して得られた 10/8 不等式的な制約である. これを用いて, 結び目理論における位相的なカテゴリーと滑らかなカテゴリーとの差を detect することができる.

ひとつ応用を述べよう. 結び目の stabilizing number と呼ばれる 4 次元的な不変量がある. 結び目  $K$  の Arf 不変量と呼ばれる  $\mathbb{Z}/2$  値の不変量が消えているとき, 自然数  $N$  を十分大きく取ることで,  $K \subset S^3 = \partial((\#_N S^2 \times S^2) \setminus D^4)$  は  $(\#_N S^2 \times S^2) \setminus D^4$  の中で null homologous かつ滑らかな 4-disk を bound することが知られている [12]. そこで, そのような  $N$  の最小値を  $\text{sn}(K)$  と書くと, これは結び目  $K$  の自然数値の不変量で, stabilizing number と呼ばれる. 同様に, 4 次元 disk の局所平坦な位相的埋め込みを考えることで, 位相的バージョン  $\text{sn}^{\text{Top}}(K)$  が定義される. 明らかに  $\text{sn}^{\text{Top}}(K) \leq \text{sn}(K)$  が常に成立するが, 最近 Conway と Nagel は, この両不変量  $\text{sn}(K), \text{sn}^{\text{Top}}(K)$  に真に差があるかという問いを提出した [5]. 不等式 (1) を用いて  $\text{sn}(K)$  を下から評価し,  $\text{sn}^{\text{Top}}(K)$  の知られていた上からの評価と合わせると, 次を示すことができる:

**定理 2** (K.–宮澤–谷口 [15]).  $\text{Arf}(K) = 0$  であるような結び目  $K$  で, 以下を満たすものが存在する:

- 次の不等式が成り立つ<sup>9</sup>:

$$0 < \text{sn}^{\text{Top}}(K) < \text{sn}(K).$$

- 任意の正の自然数  $n$  に対して  $0 < \text{sn}(\#_n K)$  で, さらに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{sn}(\#_n K) - \text{sn}^{\text{Top}}(\#_n K)) = \infty$$

が成立する.

<sup>8</sup>これは  $S$  に沿った  $X$  の二重分岐被覆がスピンになるための仮定である.

<sup>9</sup>ここで  $0 < \text{sn}^{\text{Top}}(K)$  という条件が付いているのは, これを外すと古典的によく知られた結果 (位相的にはスライスだが滑らかなカテゴリーではそうでない結び目の存在) に帰着してしまうためである.

これはすなわち、両不変量  $\text{sn}(K), \text{sn}^{\text{Top}}(K)$  には確かに差があり、しかもその差は無限に発散していくような結び目の列が連結和で作れるということを言っている。定理 2 の主張の中の結び目  $K$  は具体的に取れ、例えばトーラス結び目  $T(3, 11)$  が一番簡単な例である。(無限個のトーラス結び目で例を作ることができる。)

他にも、境界付き 4 次元多様体の中の境界付き曲面の種数の評価に不等式 (1) を応用することもできる。

## 6. 応用 2 : 4 次元多様体上の正スカラー曲率計量への障碍

この節の内容は谷口正樹氏との共同研究 [18] である。これは、4 節で説明した Seiberg–Witten Floer ホモトピー論の利点 3 (Floer 理論的な枠組みから生じる不変量たちを統一的に扱える) ことを利用したものである。

与えられた可微分多様体が正スカラー曲率計量を許容するかは Riemann 幾何の古典的な問題である。5 次元以上で単連結な場合と 3 次元の場合はこの問題は既によく理解されている。高次元の場合は手術理論と指数理論の組み合わせが強力で、3 次元の場合には Perelman の理論がある。4 次元の場合にはこれらの道具が使えず、その代わりに Seiberg–Witten 不変量が強力な障碍を与える。しかし、Seiberg–Witten 不変量が well-defined であるためには  $b_2 > 1$  であることが必要であり、特に  $b_2 = 0$  であるような 4 次元多様体  $X$  に対しては標準的な正スカラー曲率計量の障碍が一つも使えない<sup>10</sup>。

J. Lin は、 $b_2 = 0$  であったとしても、Seiberg–Witten 理論が正スカラー曲率計量の障碍を与え得る状況を見いだした [23]。具体的には、ホモロジーが  $S^1 \times S^3$  のそれと同型であるような滑らかで向きづけられた 4 次元多様体  $X$  に対して、そのような障碍を構成した。このような 4 次元多様体をホモロジー  $S^1 \times S^3$  と呼ぶことにする。Lin のアイデアは次のようなものである。 $X$  をホモロジカルには  $S^3$  のように見える余次元 1 の部分多様体  $Y$  で切り開いて得られる 4 次元多様体  $W$  は、ホモロジカルにはシリンダー  $[0, 1] \times S^3$  のようになる。これの可算無限個のコピーを境界で貼り合わせたもの  $W \cup_Y W \cup_Y W \cup_Y \dots$  を考える。さらにこの左端に、片方向に無限に伸びたシリンダー  $(-\infty, 0] \times Y$  を貼り合わせた 4 次元多様体

$$W_\infty := ((-\infty, 0] \times Y) \cup_Y W \cup_Y W \cup_Y W \cup_Y \dots$$

を考える。これは、左の方はシリンダリカル、右の方は周期的になっているような非コンパクト 4 次元多様体である。もし  $X$  に正スカラー曲率が入るのであれば、それを pull-back することで、 $W_\infty$  の「右半分」に正スカラー曲率が入る。一般には、周期的な端のある非コンパクト 4 次元多様体上では Seiberg–Witten 理論が行えることは期待できない<sup>11</sup>のだが、正スカラー曲率計量が周期的な部分に入っていると、Seiberg–Witten 方程式が正スカラー曲率計量に対しては自明な解 (可約解) しか持たないという重要な性質と合わせることで、 $W_\infty$  上の Seiberg–Witten 理論を展開することができる。 $W_\infty$  上の Seiberg–Witten 方程式の解のモジュライ空間の考察に基づき、Lin はホモロジー  $S^1 \times S^3$  に対する Seiberg–Witten 理論的な正スカラー曲率計量の非自明な障碍として初めてのものを得た。

谷口氏との共同研究 [18] では、この Lin の障碍の「Floer ホモトピーへの持ち上げ」を得た。これは、Seiberg–Witten 理論を用いて上のようなアイデアで正スカラー曲率計量の障碍を得ようとしたとき、原理的に最も強力なものと言える。これは Lin の結果と、また既に谷口氏と行っていた 10/8 不等式の考え方に基づく障碍 [17] を復元する。

この Floer ホモトピーレベルの障碍を説明するには、local equivalence と呼ばれる同値関係に触れる必要がある。これは、スピン有理ホモロジー 3 球面  $(Y, t)$  に対する Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型  $SWF(Y, t)$  たちの間の同値関係である。(正確には、この予稿で説明していないが、 $SWF(Y, t)$  として現れる空間たちの住処の集合<sup>12</sup>があり、その集合における同値関係である。) 本当は一般のスビ

<sup>10</sup>Seiberg–Witten 不変量の他には符合数が標準的な障碍だが、これも  $b_2 = 0$  ならもちろん無力である。

<sup>11</sup>例えば、こういった“境界値”を遠方での境界条件とすれば、そこへ解が指数的減衰で近づいていくのか明らかでない。指数的減衰が無いと、少なくとも通常の Floer 理論 (これはシリンダー上の Seiberg–Witten 理論である) の理論構成をどのように真似すれば良いのか定かでない。

<sup>12</sup> $\text{Pin}(2)$  が作用する空間の適当な安定ホモトピー型の全体。

ン有理ホモロジー 3 球面を考えることができるのだが、以下簡単のため（整）ホモロジー 3 球面の範囲に限定して考える（この場合スピン構造は一意的なので以下記号から落とす）。local equivalence とは、一言で言えば、ホモロジー同境と呼ばれるホモロジー 3 球面の間の同値関係が  $SWF(Y)$  たちに誘導する関係の抽象化である。

まず、ホモロジー 3 球面  $Y_0$  と  $Y_1$  とがホモロジー同境とは、 $Y_0$  と  $Y_1$  の間の滑らかなコボルディズム  $W$  であって、ホモロジカルにはシリンダーのようになっている、すなわち  $H_*(W, Y_i; \mathbb{Z}) = 0$  を満たすものが存在するときを言うのであった。このとき、コボルディズム  $W$  とその逆向き  $-W$  の相対 Bauer–Furuta 不変量の存在は、 $SWF(Y_0)$  と  $SWF(Y_1)$  の間に、ある条件を満たす射が両向きに走ることを意味する。ここである条件とは、「 $SWF(Y_i)$  の  $S^1$  不変部分に制限すると  $\text{Pin}(2)$  ホモトピー同値写像である」という条件（の安定化）である。この条件は、相対 Bauer–Furuta 不変量の  $S^1$  不変部分には Atiyah–Hitchin–Singer 複体が現れること、ホモロジーコボルディズムの交叉形式が自明であることの帰結である。local equivalence とは、この「 $S^1$  不変部分に制限するとホモトピー同値写像である」という条件を満たす射が両向きにあるときに同値と定義することで得られる同値関係である。local equivalence に関する同値類を local equivalence class と呼ぶことにする。

$SWF(Y)$  の local equivalence class は、Seiberg–Witten 理論から来る  $Y$  のホモロジー同境不変量としては、現状理論的に最も universal なものと言える。すなわち、現在知られている Seiberg–Witten 理論由来の全てのホモロジー同境不変量は、 $SWF(Y)$  の local equivalence class から復元される。次の定理がこの節の主結果である：

**定理 3** (K. 谷口 [18] (2021)).  $X$  をホモロジー  $S^1 \times S^3$  とする。  $Y$  を、ホモロジー 3 球面であって、 $H_3(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  を生成するように  $X$  の中に滑らかに埋め込まれていると仮定する。このとき、もし  $X$  が正スカラー曲率計量を許容するならば、 $SWF(Y)$  の local equivalence class が完全に決定できる。具体的には、 $SWF(Y)$  の local equivalence class は、 $X$  のある Seiberg–Witten 理論由来の不変量<sup>13</sup>の次元の球面の安定化である。

既に述べたように、Lin の障碍 [23] および講演者・谷口氏の以前の障碍 [17] は共に定理 3 から復元される。これらの障碍は共に  $Y$  の Frøyshov 不変量と呼ばれる Seiberg–Witten 不変量由来のホモロジー同境不変量の言葉で書かれるものだからである。Lin の障碍および講演者・谷口氏の以前の障碍は見かけ上大きく異なるものだったのであるが、 $SWF(Y)$  の local equivalence class を用いることで統一的に理解できることになった。さらに [17, 23] で扱われていなかった他のホモロジー同境不変量に対しても一斉に制約がかかることになるため、定理 3 は実用上も [17, 23] よりも遙かに強い障碍となっている。

定理 3 の証明のアイデアは次のようなものである。Lin [23] の議論は、上で述べたように、左の方はシリンダリカル、右の方は周期的になっているような非コンパクト 4 次元多様体  $W_\infty$  上で Seiberg–Witten 方程式の解のモジュライ空間を考察するものだった。定理 3 の証明はこれを空間レベルに持ち上げる。すなわち、モジュライ空間を考察する代わりに、“相対 Bauer–Furuta 不変量”を  $W_\infty$  上で考察する。相対 Bauer–Furuta 不変量は一般には周期的端がある非コンパクト 4 次元多様体上で考えることができないが、再び周期的端の部分に正スカラー曲率計量が入っていることを利用すると意味が付くことが分かる。 $W_\infty$  の「右の方の」遠方には、再び正スカラー曲率計量が入っていることから、自明な境界条件、すなわち可約解しか存在し得ない。Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型の言葉では（安定化した）球面が空間として現れることになる。 $W_\infty$  と向きを逆にした  $-W_\infty$  上の相対 Bauer–Furuta 不変量を両方考えることで、 $SWF(Y)$  と適当な次元の球面の間に local equivalence が存在することになり証明が終わる。

## 7. 応用 3：4 次元多様体の微分同相群への応用

最後に境界付き 4 次元多様体の微分同相群への応用を述べよう。これは 4 節で説明した Seiberg–Witten Floer ホモトピー論の利点 2（理論の変種の作りやすさ）を利用したものである。まずその前

<sup>13</sup>Mrowka–Ruberman–Saveliev [28] が導入した整数値不変量  $\lambda_{SW}(X)$  の定数倍である。

提となる閉 4 次元多様体についての背景を少しだけ述べる．閉 4 次元多様体の微分同相群を同相群と比較することに関しては，この数年様々な進展が続いた．ここで説明したいことに関係するのは，Baraglia による次の結果 [1] である．それは，ほとんどの単連結な可微分 4 次元閉多様体  $X$  に対し， $X$  の微分同相群  $\text{Diff}(X)$  から同相群  $\text{Homeo}(X)$  への包含写像は弱ホモトピー同値でないというものである．この Baraglia の結果は，4 次元多様体をファイバーとするファイバー束に対する Donaldson の対角化定理の族版を証明することによりなされた．

まず，上の Baraglia の結果を境界付きの場合に拡張した谷口正樹氏との共同研究 [16] を紹介する．これを述べるために，3 次元多様体の Frøyshov 不変量をごく簡単に説明しよう．これは 3 次元多様体に対してゲージ理論により定義される数値的不変量の中でも特に重要なものである．Frøyshov 不変量  $\delta(Y, t)$  は，向き付けられた  $\text{spin}^c$  有理ホモロジー 3 球面  $(Y, t)$  に対する有理数値の不変量である．( $Y$  が整ホモロジー 3 球面ならばその上の  $\text{spin}^c$  構造は一意的なので，記号から落として  $\delta(Y)$  と書く．) 元々 Frøyshov 不変量は，Donaldson の対角化定理の境界付き 4 次元多様体への拡張を行った Frøyshov の 1996 年ごろからの一連の仕事 [7–9] で導入された．Donaldson の対角化定理は，可約解と呼ばれるモジュライ空間の特異点の情報を用いて示される定理であった．3 次元多様体  $Y$  の Frøyshov 不変量は，直感的には， $Y$  上の可約解以外の Seiberg–Witten 方程式の解（既約解）から  $Y$  上の可約解に， $Y \times \mathbb{R}$  上の 4 次元の Seiberg–Witten 方程式を通してどのくらい伝搬があるかを測ることで定義される．Frøyshov 不変量は Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型を用いて再定義することもでき [27]，今回はこれを定義として採用する．その定義は，5 節で説明した  $\kappa$  不変量の定義と平行であり<sup>14</sup>，包含写像  $\text{SWF}(Y, t)^{S^1} \hookrightarrow \text{SWF}(Y, t)$  が  $S^1$  同変コホモロジー  $H_{S^1}^*$  に誘導する写像を用いて定義される．

$X$  を境界のある滑らかで向きづけられた 4 次元多様体とする． $\text{Diff}(X, \partial)$  を境界を pointwise に固定する微分同相写像のなす群とする．同様に境界を固定する同相群  $\text{Homeo}(X, \partial)$  も考える．次の結果が，この節の冒頭で述べた Baraglia の結果の境界付き 4 次元多様体への一つの拡張を与える：

**定理 4** (K. 谷口 [16] (2020)).  $X$  を滑らかな向き付けられた単連結境界付き 4 次元多様体で， $\sigma(X) \leq 0$  かつ交叉形式が不定値とする．境界  $\partial X = Y$  は連結で，整ホモロジー 3 球面であるとする． $\sigma(X) < -8$  かつ  $\delta(Y) \leq 0$ ，あるいは  $X$  がスピンかつ  $-\sigma(X)/8 > \delta(Y)$  と仮定する．このとき，

$$\text{Diff}(X, \partial) \hookrightarrow \text{Homeo}(X, \partial) \quad \text{および} \quad \text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$$

は弱ホモトピー同値でない．より詳しくは，自然な写像  $\pi_n(\text{Diff}(X, \partial)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X, \partial))$  がある  $n \in \{0, \dots, b^+(X) - 1\}$  で同型でないこと， $\pi_n(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X))$  がある  $n \in \{0, \dots, b^+(X)\}$  で同型でないことが分かる．

この定理の証明は，Frøyshov による境界付き 4 次元多様体への Donaldson の対角化定理の拡張のアイデアに沿って，Baraglia の対角化定理の族版を拡張することで得られる．もう少し中身を説明すると， $X$  をファイバーとするファイバー束であって構造群が  $\text{Diff}(X, \partial)$  であるもの<sup>15</sup>に対し，相対 Bauer–Furuta 不変量の族版を定義し，それに  $S^1$  同変コホモロジー  $H_{S^1}^*$  を適用して制約を引き出すというものである．相対的でない同相群  $\text{Homeo}(X)$  と微分同相群  $\text{Diff}(X)$  に対する結果は，相対的な同相群・微分同相群の比較の結果と，任意の 3 次元多様体  $Y$  に対しては  $\text{Diff}(Y) \hookrightarrow \text{Homeo}(Y)$  が弱ホモトピー同値であるという古典的な結果を合わせることで得られる．

上の議論は，4 次元多様体をファイバーとするファイバー束であって，境界に制限すると 3 次元多様体の自明束が現れている状況だけを扱っている．しかし，境界の 3 次元多様体のバンドルも非自明な状況を扱うことができれば，微分同相写像の拡張問題への障碍が得られると見込まれ興味深い．最近，笹平–Stoffregen [29] は， $b_1 > 0$  の 3 次元多様体に対する Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型の定義を行う議論の副産物として，3 次元多様体の族に対する Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型の定義を与えた．これは今のような問題を扱う受け皿として十分な枠組みと期待される．笹平裕史氏との共同研究で，族に対する Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型が，微分同相写像（より一般

<sup>14</sup>順番としては Frøyshov 不変量の方が先である．

<sup>15</sup>正確にはそれがさらに  $\text{spin}^c$  構造の自己同型群にまで持ち上がっている状況を考える必要があるがここでは省略する．

に 3 次元多様体の族) の 4 次元への拡張問題に対して実際に有効であることが確かめられつつある。現時点で確かめられた結果の一部をインフォーマルにまとめると：

**定理 5** (K.-笹平 (2022)). 族に対する Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型を用いて次の状況を detect できる：ある可微分閉 3 次元多様体  $Y$ ,  $Y$  を境界に持つ可縮な可微分 4 次元多様体  $X$ ,  $Y$  の上の微分同相写像  $f : Y \rightarrow Y$  であって,  $f$  は  $X$  に同相写像としては拡張するが微分同相写像としては拡張しない。

この定理の主張のような  $(X, Y, f)$  はコルクと呼ばれ, 4 次元トポロジーで盛んに研究されているものである。現時点で族に対する Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型を用いて detect できているコルクの例は Heegaard Floer ホモロジーの枠組みを用いて Dai–Hedden–Mallick [6] が detect しているものと同じだが, 証明が相当に異なるので, これまでに扱えなかった例が見つかる可能性もあると考えられる。また, Heegaard Floer ホモロジーとの比較を考えると, 次に述べる  $\text{Pin}(2)$  対称性の利用により, Heegaard Floer ホモロジーでは引き出せない情報が捉えられる見込みは非常に高いと思われる。(Heegaard Floer ホモロジーでは  $\text{Pin}(2)$  対称性をフルに扱う手段が現状まだ無い。) これはコルクよりもむしろ, 交叉形式の大きい 4 次元多様体への微分同相写像の拡張問題への応用が念頭にある。

まず, 族に対する Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型を用いて, Frøyshov 不変量をも 3 次元多様体の族に対して定義できることが笹平氏との共同研究で確かめられた。これは 3 次元多様体上の微分同相写像の 4 次元多様体への拡張の障碍を与えている。また, スピンな 3 次元多様体に対しては, Manolescu が  $\text{Pin}(2)$  同変コホモロジーを用いた Frøyshov 不変量の変種  $\alpha, \beta, \gamma$  を定義しており [27], これは Frøyshov 不変量と異なり,  $(b^+ \leq 2$  である限り) 負定値とは限らない境界付き 4 次元多様体の交叉形式への制約を与えている [21]<sup>16</sup>。これらの不変量  $\alpha, \beta, \gamma$  の族版も, やはり同様に定式化できることが分かった。これを用いると, 3 次元多様体上の微分同相の拡張問題に対して, 族版の Frøyshov 不変量をも超える情報が手に入る。これら族版の Frøyshov 型不変量たちを整備していくことは, 自然で面白い問題になると考えている。

## REFERENCES

- [1] David Baraglia, *Constraints on families of smooth 4-manifolds from Bauer-Furuta invariants*, Algebr. Geom. Topol. **21** (2021), no. 1, 317–349. MR4224743
- [2] Stefan Bauer and Mikio Furuta, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. I*, Invent. Math. **155** (2004), no. 1, 1–19. MR2025298
- [3] R. L. Cohen, J. D. S. Jones, and G. B. Segal, *Floer’s infinite-dimensional Morse theory and homotopy theory*, The Floer memorial volume, 1995, pp. 297–325. MR1362832
- [4] Charles Conley, *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 38, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1978. MR511133
- [5] Anthony Conway and Matthias Nagel, *Stably slice disks of links*, J. Topol. **13** (2020), no. 3, 1261–1301. MR4125756
- [6] Irving Dai, Matthew Hedden, and Abhishek Mallick, *Corks, involutions, and Heegaard Floer homology* (2020), available at [arXiv:2002.02326](https://arxiv.org/abs/2002.02326).
- [7] Kim A. Frøyshov, *The Seiberg-Witten equations and four-manifolds with boundary*, Math. Res. Lett. **3** (1996), no. 3, 373–390. MR1397685
- [8] ———, *Equivariant aspects of Yang-Mills Floer theory*, Topology **41** (2002), no. 3, 525–552. MR1910040
- [9] ———, *Monopole Floer homology for rational homology 3-spheres*, Duke Math. J. **155** (2010), no. 3, 519–576. MR2738582
- [10] M. Furuta, *Monopole equation and the  $\frac{11}{8}$ -conjecture*, Math. Res. Lett. **8** (2001), no. 3, 279–291. MR1839478
- [11] Yuya Kato, *Nonsmoothable actions of  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  on spin four-manifolds*, Topology Appl. **307** (2022), Paper No. 107868, 13. MR4365044
- [12] Louis H. Kauffman, *On knots*, Annals of Mathematics Studies, vol. 115, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987. MR907872
- [13] Tirasan Khandhawit, Jianfeng Lin, and Hirofumi Sasahira, *Unfolded Seiberg-Witten Floer spectra, I: Definition and invariance*, Geom. Topol. **22** (2018), no. 4, 2027–2114. MR3784516

<sup>16</sup>これは Donaldson の Theorems B, C の境界付き版を Seiberg–Witten 理論で定式化したものである。

- [14] ———, *Unfolded seiberg-witten floer spectra, ii: Relative invariants and the gluing theorem* (2018), available at [arXiv:1809.09151](#). to appear in J. Differential Geom.
- [15] Hokuto Konno, Jin Miyazawa, and Masaki Taniguchi, *Involutions, knots, and Floer K-theory*, arXiv:2110.09258 (2021).
- [16] Hokuto Konno and Masaki Taniguchi, *The groups of diffeomorphisms and homeomorphisms of 4-manifolds with boundary*, arXiv:2010.00340.
- [17] ———, *Positive scalar curvature and 10/8-type inequalities on 4-manifolds with periodic ends*, Invent. Math. **222** (2020), no. 3, 833–880. MR4169052
- [18] ———, *Positive scalar curvature and homology cobordism invariants*, arXiv:2104.10860 (2021).
- [19] Peter Kronheimer and Tomasz Mrowka, *Monopoles and three-manifolds*, New Mathematical Monographs, vol. 10, Cambridge University Press, Cambridge, 2007. MR2388043
- [20] Tye Lidman and Ciprian Manolescu, *The equivalence of two Seiberg-Witten Floer homologies*, Astérisque **399** (2018), vii+220. MR3818611
- [21] Francesco Lin, *The surgery exact triangle in Pin(2)-monopole Floer homology*, Algebr. Geom. Topol. **17** (2017), no. 5, 2915–2960. MR3704248
- [22] ———, *A Morse-Bott approach to monopole Floer homology and the triangulation conjecture*, Mem. Amer. Math. Soc. **255** (2018), no. 1221, v+162. MR3827053
- [23] Jianfeng Lin, *The Seiberg-Witten equations on end-periodic manifolds and an obstruction to positive scalar curvature metrics*, J. Topol. **12** (2019), no. 2, 328–371. MR3911569
- [24] Ciprian Manolescu, *Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type of three-manifolds with  $b_1 = 0$* , Geom. Topol. **7** (2003), 889–932. MR2026550
- [25] ———, *A gluing theorem for the relative Bauer-Furuta invariants*, J. Differential Geom. **76** (2007), no. 1, 117–153. MR2312050
- [26] ———, *On the intersection forms of spin four-manifolds with boundary*, Math. Ann. **359** (2014), no. 3-4, 695–728. MR3231012
- [27] ———, *Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **29** (2016), no. 1, 147–176. MR3402697
- [28] Tomasz Mrowka, Daniel Ruberman, and Nikolai Saveliev, *Seiberg-Witten equations, end-periodic Dirac operators, and a lift of Rohlin’s invariant*, J. Differential Geom. **88** (2011), no. 2, 333–377. MR2838269
- [29] Hirofumi Sasahira and Matthew Stoffregen, *Seiberg-Witten Floer spectra for  $b_1 > 0$* , arXiv:2103.16536 (2021).