

DEHN TWISTS AND NIELSEN REALIZATION IN DIMENSION 4

今野 北斗（東京大学大学院数理科学研究科）

1. 概要

本稿では、4次元多様体に対する Dehn twist と Nielsen 実現問題を扱った論文 [9] の内容を紹介する。結果を一言で言うと、これまで肯定的な結果も否定的な結果もほとんど知られていなかった4次元多様体に対する Nielsen 実現問題を、相当に広範な4次元多様体に対して否定的に解いた、というものである。4次元多様体上の Dehn twist が Nielsen 実現できない写像類の例を与える。また、既に Baraglia 氏との共同研究 [2] で発見していた、4次元における Nielsen 実現問題が滑らかなカテゴリーと位相的なカテゴリーで差が出る現象の例も増やした。

証明には、加藤佑矢 [6] が示していた「involution に対する 10/8 不等式」およびその改良版を用いる。Seiberg–Witten 理論と同変 K 理論が主要なインプットである。

2. 4次元における DEHN TWIST

4次元多様体上の Dehn twist は2次元のそれに比べるとよく知られたものではないと思うので、どのようなものか簡単に説明する。これは Paul Seidel が彼の PhD thesis で用いて以来、シンプレクティック幾何学においてしばしば考察の対象となっている。（シンプレクティック微分同相群と微分同相群のホモトピカルな比較を行う上で基本的な例となっている。）この節の内容の詳細は Seidel のレクチャーノート [14] に委ねる。ちなみにここに書くような Dehn twist の高次元化を初めて導入したのは Arnold [1] のようである。

通常の（2次元の）Dehn twist と同様、4次元の Dehn twist も、4次元多様体の一部でサポートされている微分同相写像で具体的なモデルを与えることができる。まず2次元の Dehn twist を複素幾何的に書くとどういうものであったか思い出す。写像

$$\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}; (z_1, z_2) \mapsto z_1^2 + z_2^2$$

を $\mathbb{C}$ 上の複素1次元のファイバーを持つ族と見なす。この族の $\mathbb{C}$ の原点上のファイバーは nodal singularity をひとつ持つ特異ファイバーで、 $\mathbb{C}$ のその他の点の上のファイバーは滑らかである。この族の $\mathbb{C}$ の原点周りを1周するループに沿ったモノドロミーが Dehn twist の local model を与えるのであった。もう少し詳しく述べると、各正則ファイバーの上には $\mathbb{C}$ の原点上のファイバーの特異点に潰れていく vanishing cycle が乗っているが、この vanishing cycle の近傍にサポートを持つような正則ファイバー上の自己微分同相写像がモノドロミーとして得られる。これが Dehn twist の local model となる。

以上の描像をひとつ複素次元を上げて高次元化しよう。次の写像

$$\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}; (z_1, z_2, z_3) \mapsto z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$$

を考える。これはファイバーが複素2次元の族で、 $\mathbb{C}$ の原点上に nodal singularity がひとつある特異ファイバーを持ち、 $\mathbb{C}$ のその他の点の上のファイバーは滑らかである。この族の $\mathbb{C}$ の原点周りを1周するループに沿ったモノドロミーは、vanishing sphere の近傍にサポートを持つような正則ファイバーの自己微分同相写像である。この微分同相写像を model Dehn twist と呼ぶことにし、と書く。

正則ファイバー内での vanishing sphere の近傍は S^2 の余接束 T^*S^2 と微分同相である。そこで、以下 model Dehn twist τ を T^*S^2 上のコンパクト台の自己微分同相写像とみなす。

一般に、向きづけられた 4 次元多様体 X の中に (-2) -sphere S , すなわち滑らかに埋め込まれた 2 次元球面であって自己交叉が -2 のものが与えられたとき, S の近傍は T^*S^2 と微分同相である. そこで, model Dehn twist $\tau : T^*S^2 \rightarrow T^*S^2$ を S の近傍に移植することで, S の近傍にサポートを持つ X の自己微分同相写像を得ることができる. これを S についての X 上の **Dehn twist** と呼び,

$$T_S : X \rightarrow X$$

と書く.

ここで model Dehn twist $\tau : T^*S^2 \rightarrow T^*S^2$ と Dehn twist $T_S : X \rightarrow X$ の基本的な性質をいくつか述べておく. まず τ は T^*S^2 の零切断 S^2 には antipodal map として作用する. このことから, T_S の $H_2(X)$ への作用は $[S]$ に関する reflection, すなわち

$$(1) \quad (T_S)_*(x) = x + 2(x \cdot [S])[S]$$

となるのが分かる. さらに τ はコンパクト台の微分同相群 $\text{Diff}_c(T^*S^2)$ の中で恒等写像にアイソトピックでないことも従うが, 一方で $\tau^2 = \tau \circ \tau$ は $\text{Diff}_c(T^*S^2)$ の中で恒等写像にアイソトピックであると知られている¹. したがって T_S の写像類 $[T_S] \in \pi_0(\text{Diff}(X))$ は位数 2 である.

ちなみに一般次元の球面 S^n の余接束 T^*S^n の上には, 同様に (model) Dehn twist と呼ぶべき自己微分同相写像が定義される. (例えば [1, 7] 参照.) また T^*S^n 上の model Dehn twist は T^*S^n の自然なシンプレクティック構造を保つ, すなわちシンプレクティック微分同相写像となるのであるが, 今回の話ではこの側面は直接関係しない.

上の構成における (-2) -sphere を $(+2)$ -sphere に取り替えることもできる. 向きづけられた 4 次元多様体 X の中に $(+2)$ -sphere, すなわち滑らかに埋め込まれた 2 次元球面であって自己交叉が 2 のものが与えられたとき, 以上の話の向きをひっくり返すことで, S の近傍にサポートされた X 上の自己微分同相写像がやはり手に入る. これも $T_S : X \rightarrow X$ と書き, S についての X 上の Dehn twist と呼ぶことにする. この T_S の写像類もやはり $\pi_0(\text{Diff}(X))$ の中で位数 2 であり, ホモロジー $H_2(X)$ への作用は

$$(2) \quad (T_S)_*(x) = x - 2(x \cdot [S])[S]$$

で与えられる.

3. 主結果 1 : 4 次元における NIELSEN 実現問題の否定解

前節で紹介した 4 次元多様体上の Dehn twist を, Nielsen 実現問題を 4 次元において否定的に解くことに応用しよう. まずは Nielsen 実現問題とはどういう問題であったかを思い出す. X を滑らかな多様体とし, G を写像類群 $\pi_0(\text{Diff}(X))$ の有限部分群とする. このとき, G が **(Nielsen) 実現可能** とは, G が微分同相群 $\text{Diff}(X)$ に持ち上がることで, すなわち自然な全射準同形 $\text{Diff}(X) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}(X))$ が G 上の切断 $s : G \rightarrow \text{Diff}(X)$ を許容することをいう². Nielsen 実現問題とは, どのような G が実現可能かを問う問題である. 写像類群あるいはその部分群は a priori には X に作用していないが, この問題は G が X の変換群として実現できるのはいつかを問うているわけである. G が位数 n の巡回群のときにこの問題を言い換えると, G の生成元を $[f]$ としたとき, G が実現可能なことは, 位数が n の自己微分同相に f がアイソトピックなことと同値である.

元々この問題は X が向きづけられた 2 次元閉多様体の場合に問われていたもので, G が巡回群の場合に Nielsen [12] が肯定的に解き, 最終的に Kerckhoff [8] が一般の有限部分群 G に対して肯定的に解決した. 一方興味深いことに, G が有限という仮定を外して $G = \pi_0(\text{Diff}(X))$ の実現問題を考えると, $\pi_0(\text{Diff}(X))$ は実現できないということが森田茂之 [11] により示されている.

¹[7] によると, この事実を指摘したのはゲージ理論で有名な Kronheimer だそうである.

²多様体 X が向きづけられているときは, 普通 $\text{Diff}(X)$ の代わりに向きを保つ微分同相のなす群 $\text{Diff}^+(X)$ を考える. ただし今回の話で出てくる 4 次元多様体 X は全て零でない符号数を持ち, このとき向きをひっくり返す微分同相は存在しないので $\text{Diff}(X) = \text{Diff}^+(X)$ である.

それでは 3 以上の次元における Nielsen 実現問題はどうか。まず肯定的な結果は、例えば X が双曲計量の入った多様体である場合、Mostow の剛性定理から得られる。同様の剛性定理が成立する状況であれば肯定的結果が得られるが、例えば単連結な多様体に対して組織的に使える肯定的な結果は見当たらない。

一方否定的な結果はどうか。Raymond と Scott [13] は、3 以上の任意の次元において、ある nil-manifold X が存在し、 X は位数が 2 の写像類であって Nielsen 実現できないものを許容することを示した。その証明は X の非自明な基本群を本質的に使うものである。上の肯定的な結果と見比べると、Nielsen 実現が成立しないことは、剛性定理の非成立を端的に示すものと捉えることもできるだろう。それでは X が 4 次元の場合、さらに単連結な場合にはどうか。この場合の Nielsen 実現問題については、肯定的な結果も否定的な結果も最近まで知られていなかったが、Baraglia 氏と筆者 [2] および Farb–Looijenga [3] がそれぞれ別の方法で、 X が $K3$ 曲面の場合に Nielsen 実現が不可能な G を許容することを示した。ここでは特に Farb–Looijenga の例に注目する。Farb–Looijenga は、前節で説明した 4 次元多様体上の Dehn twist が、Nielsen 実現できない写像類を与えることを示したのである。しかし、Farb–Looijenga の議論は $K3$ 曲面の交叉形式の形を縦横無尽に用いるもので、他の交叉形式を持つ 4 次元多様体に直ちには拡張できない。

次の結果で、膨大な 4 次元多様体に対して Nielsen 実現問題を否定的に解くことができる。これが本稿の一つ目の主結果である（証明の概要は最後の節で述べる）：

定理 1 (K. [9, Theorem 1.1] (2022)). X を滑らかで向きづけられたスピンの閉 4 次元多様体とし、符合数が零でないと仮定する。 S を X 内の $(+2)$ -あるいは (-2) -sphere とする。このとき、 S についての Dehn twist $T_S : X \rightarrow X$ は、いかなる有限位数の自己微分同相写像ともホモトピックにならない。特に、写像類 $[T_S]$ が生成する $\pi_0(\text{Diff}(X))$ の位数 2 の部分群は Nielsen 実現できない。

定理 1 は、上で述べた Farb–Looijenga [3] の $X = K3$ に対する結果の一般化である。定理 1 から、符合数が零でないスピンの閉 4 次元多様体 X がもし $(+2)$ -あるいは (-2) -sphere を許容すれば、 X に対して Nielsen 実現問題が否定的に解けることになるが、このような X の例は豊富にある：

例 1. $S^2 \times S^2$ は $(+2)$ -sphere も (-2) -sphere も許容するから、 $S^2 \times S^2$ と符合数が零でない任意のスピンの閉 4 次元多様体との連結和に対して Nielsen 実現問題は否定的に解ける。また非自明な連結和分解を持たない 4 次元多様体の例も無限個ある。例えば完全交叉で得られる複素曲面は、 (-2) -sphere を許容する（単連結な）4 次元多様体で、有限個の例外を除き非自明な連結和分解を持たない。完全交叉の例は可算無限個あるが、大体その“半分”³がスピンである。また有限個の例外を除き完全交叉の符合数は零でないので、このようなものかつスピンなものに対して Nielsen 実現問題は否定的に解ける。

注意 1. 定理 1 はスピンの閉 4 次元多様体に対する定理であるが、スピンでない 4 次元多様体に対して類似の主張が成立しないことが、最近の Lee [10] の結果より分かる。実際、 $\mathbb{CP}^2 \# n(-\mathbb{CP}^2)$ （ただし $n \leq 8$ ）内の任意の (± 2) -sphere に関する Dehn twist は、常に滑らかな involution にトポロジカルにアイソトピック（したがってホモトピック）であることが Lee の結果から従う。一方興味深いことに、符合数が零でないスピンの閉 4 次元多様体の blow-up、すなわち $\mathbb{CP}^2$ の向きをひっくり返した $-\mathbb{CP}^2$ を連結和して得られるような非スピンの閉 4 次元多様体を考え、 (± 2) -sphere でなく $-\mathbb{CP}^2$ 内の (-1) -sphere に関する reflection（本質的には $\mathbb{CP}^2$ の複素共役から定まる写像）を考えると、この写像類は Nielsen 実現できないことが分かった。（宮澤仁氏・谷口正樹氏との共同研究。work in progress.）これは非スピンの閉 4 次元多様体に対する Nielsen 実現問題の否定解の初めての例を与える。

4. いくつかの問題

4 次元での Nielsen 実現問題については、これまで Raymond–Scott [13] の nilmanifold と $K3$ 曲面に対してしか否定的結果が無かったことを考えると、定理 1 でかなり理解が前進したと言って良いよ

³完全交叉は、容れ物の $\mathbb{CP}^N$ の次元 N とそれを切る $N-2$ 個の多項式たちの degree $d_1, \dots, d_{N-2}$ で決まるが、 $\sum_{i=1}^{N-2} d_i - (N+1)$ が偶数なときまたそのときに限りスピンとなる。

うに思う。筆者が Baraglia 氏と共同で $K3$ 曲面に対して Nielsen 実現問題を否定的に解いたときは [2], その証明が $K3$ 曲面の特殊事情をフルに使うものであった⁴ので, 4 次元における Nielsen 実現問題の否定解は $K3$ 曲面のような特別な 4 次元多様体に対してしか成立しない珍現象なのであると思うていた。しかしひとたび定理 1 を示すと, どうも 4 次元における Nielsen 実現問題の否定解は珍しい現象では無く, むしろ肯定的結果の少なさが際立つように思える。そこで一つ問題提起をしたい:

問 1. 単連結で滑らかな 4 次元閉多様体 X であって, $\pi_0(\text{Diff}(X))$ の任意の有限部分群が Nielsen 実現できるものはあるか? また $\pi_0(\text{Diff}(X))$ 全体が Nielsen 実現できるものはあるか?

上で述べた状況から, このような X は存在しないのではないかとというのが筆者の予想だが, 今のところそれ以上の根拠はない。

基本的な 4 次元多様体で上の問 1 を考えてみる。現状では, Nielsen 実現問題に対して否定的な結果が得られている単連結 4 次元多様体の (例えば第 2 Betti 数の意味で) 最小の例が $K3$ 曲面である。 $K3$ 曲面より小さい単連結 4 次元多様体, 例えば $X = S^4, \mathbb{CP}^2, S^2 \times S^2$ に対しては, 幾何学的に容易に思いつく $\pi_0(\text{Diff}^+(X))$ の部分群はそもそも有限位数の微分同相で生成されており, 明らかに Nielsen 実現ができる。(例えば $\mathbb{CP}^2$ の複素共役, $S^2 \times S^2$ の成分の入れ替えや, S^2 の赤道に関する reflection の 2 つのコピーの直積など。) これら以外の $\pi_0(\text{Diff}^+(X))$ の部分群を見付けることは難しい問題である。例えば, 交叉形式の自己同型群 $\text{Aut}H_2(X; \mathbb{Z})$ と $\pi_0(\text{Diff}^+(X))$ がどの程度違うのかは現在分かっていない。より詳しく述べると, $X = S^4, \mathbb{CP}^2, S^2 \times S^2$ に対して, 自然な準同形

$$(3) \quad \pi_0(\text{Diff}^+(X)) \rightarrow \text{Aut}H_2(X; \mathbb{Z})$$

が全射であることはすぐに分かるが, これが単射かは知られていない⁵。これは例えるならば, $K3$ 曲面の上のエキゾチック構造を見付けることは数十年前からできているが, $S^4, \mathbb{CP}^2, S^2 \times S^2$ の上のエキゾチック構造の存在がまだ未解決なことに似ている。ゲージ理論的手法は交叉形式に引っかけものが主であるため, 交叉形式が小さい 4 次元多様体に対して否定的な結果を出すのが難しいのである。もしも $X = S^4, \mathbb{CP}^2, S^2 \times S^2$ のいずれかに対し準同形 (3) が単射であれば, 常に Nielsen 実現ができるという結論となるが, どのように示すのか筆者には想像が付かない。 $X = S^4, \mathbb{CP}^2, S^2 \times S^2$ に限らず, 準同形 (3) が単射となる 4 次元多様体の例は今のところ一つも知られていない。

問 1 は実際に解くことを目指す問題としては難し過ぎるかもしれないが, もう少し reasonable な問題として次を挙げたい:

問 2. 向きづけられた滑らかな 4 次元閉多様体 X と写像類群の部分群 $G \subset \pi_0(\text{Diff}^+(X))$ が与えられたとき, G が Nielsen 実現できるための判定条件を, G の X の交叉形式への作用の言葉で与えよ。

Farb–Looijenga [3] は $K3$ 曲面の位数 2 の部分群に対してこれを解いているが, 現状それが知られている唯一の結果である。

ちなみに, 奇数位数の群に対する Nielsen 実現問題の否定解は 4 次元では今のところ知られていない。これも問題として挙げておく:

問 3. 滑らかな 4 次元閉多様体 X と, 写像類群の奇数位数の有限部分群 $G \subset \pi_0(\text{Diff}(X))$ であって, G が Nielsen 実現できないようなものの例はあるか?

5. 主結果 2: 4 次元における NIELSEN 実現問題に対する C^0 vs. C^∞

次に, 4 次元における Nielsen 実現問題を位相的なカテゴリーで考えたものと滑らかなカテゴリーで考えたものに差が出るという結果を紹介する。これは $K3$ 曲面に対して Baraglia 氏との共同研究 [2] で示したこと一般化である。

⁴ $K3$ 曲面の交叉形式の形と大域的 Torelli の定理を使う。

⁵ $X = S^4$ の場合には, これは $\pi_0(\text{Diff}^+(S^4)) \neq 0$ かどうかが分かっていないということと同値である。もし $\pi_0(\text{Diff}^+(S^4)) \neq 0$ と分かれば, 渡邊忠之 [15] の $\text{Diff}^+(S^4)$ の高次ホモトピー群を見ることによる 4 次元 Smale 予想の反証とは異なる筋道での反証となる。

X を位相 4 次元多様体とする．滑らかなカテゴリーでの定義と同様に，部分群 $G \subset \pi_0(\text{Homeo}(X))$ が与えられたとき，自然な全射準同形 $\text{Homeo}(X) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(X))$ が G 上の切断 $s : G \rightarrow \text{Homeo}(X)$ を持つとき， G は $\text{Homeo}(X)$ に **Nielsen 実現**できるということにする．次が本稿の二つ目の主結果である：

定理 2 (K. [9, Theorem 1.2] (2022)). $m > 0, n \geq 0$ とし， $X = \#_m K3 \#_n S^2 \times S^2$ とおく．このとき， $\pi_0(\text{Diff}(X))$ の位数 2 の部分群 G であって以下の性質を満たすものが存在する：

- G は $\text{Diff}(X)$ に Nielsen 実現できない．さらに強く， G の生成元の代表元はいかなる有限位数の自己微分同相写像にもホモトピックでない．
- $G' \subset \pi_0(\text{Homeo}(X))$ を，自然な写像 $\pi_0(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(X))$ による G の像とすると， G' は非自明群で， $\text{Homeo}(X)$ に Nielsen 実現できる．

定理 2 の二つ目の条件は， G に対応する $\text{Homeo}(X)$ の部分群が位相的な範疇で Nielsen 実現ができるということを言っている．このように，Nielsen 実現問題が解けるかどうかは，位相的なカテゴリーで考えるか滑らかなカテゴリーで考えるかによって答えが変わる場合があるのである．

6. 証明の核

定理 1 と定理 2 の証明のどちらにおいても，以下の定理が主要なインプットである． $\sigma(X)$ を向きづけられた閉 4 次元多様体 X の符号数とし， $b_+(X)$ を X の交叉形式に関する $H_2(X; \mathbb{R})$ の正定値部分空間の最大次元とする．交叉形式の位数 2 の自己同型 $\varphi : H_2(X; \mathbb{Z})/\text{Tor} \rightarrow H_2(X; \mathbb{Z})/\text{Tor}$ に対し， $b_+^\varphi(X)$ (resp. $b_-^\varphi(X)$) を固定部分 $H_2(X; \mathbb{R})^\varphi$ 内の正定値部分空間 (resp. 負定値部分空間) の最大次元とし， $\sigma^\varphi(X) = b_+^\varphi(X) - b_-^\varphi(X)$ とおく．

定理 3 (K. [9, Theorem 1.3] (2022)). X を滑らかで向きの付いた 4 次元閉多様体とする． $\mathfrak{s}$ を X 上のひとつのスピンの構造とする． $g : X \rightarrow X$ を有限位数の微分同相とし， X の向きと $\mathfrak{s}$ を保つと仮定する． $\varphi : H_2(X; \mathbb{Z})/\text{Tor} \rightarrow H_2(X; \mathbb{Z})/\text{Tor}$ を $\varphi = g_*$ で定義したとき， φ の位数は 2 で $\sigma^\varphi(X) \neq \sigma(X)/2$ と仮定する．このとき，

$$(4) \quad -\frac{\sigma(X)}{16} \leq b_+(X) - b_+^\varphi(X)$$

が成立する．さらに，もし $b_+(X) - b_+^\varphi(X) > 0$ であれば，

$$(5) \quad -\frac{\sigma(X)}{16} + 1 \leq b_+(X) - b_+^\varphi(X)$$

が成立する．

定理 3 は，スピン 4 次元多様体 X 上の有限位数の微分同相が交叉形式に誘導する作用に制約を与えるものである．対応する主張を位相的な範疇で考えると容易に反例を作れるので，これは X の可微分構造を真に反映している．定理 3 は有限位数の微分同相に対する主張であるが，形式的な議論で involution の場合に帰着するので，実質的には滑らかな involution に対する制約である．定理 1 と定理 2 の証明はどちらも，もし考えている位数 2 の写像類が有限位数の微分同相で代表できるとすると，写像類の交叉形式への作用を見ることで定理 4 に矛盾する，という背理法が中心である．定理 2 の位相的な Nielsen 実現ができるという部分に関しては，Freedman 理論 [4] による $K3$ の位相的な連結和分解を用いる．また定理 2 における写像類群の部分群 G の構成では，Baraglia 氏との共同研究 [2] で構成した $\pi_0(\text{Diff}(K3)) \rightarrow \text{Aut}(H_2(K3; \mathbb{Z}))$ の像上の切断

$$s : \text{Im}(\pi_0(\text{Diff}(K3)) \rightarrow \text{Aut}(H_2(K3; \mathbb{Z}))) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}(K3))$$

を用いる．

不等式 (4) は，加藤佑矢 [6] が示していた「involution に対する 10/8 不等式」から導出される．加藤は，滑らかで向きづけられたスピン 4 次元多様体 X と X 上の適当な条件⁶を満たす滑らかな involution

⁶4 次元スピン多様体上の involution が，スピン構造に位数 4 で持ち上がるというのがその条件である．

$\iota: X \rightarrow X$ が与えられたとき, ι を用いて X 上の Seiberg–Witten 方程式に involutive な対称性を構成した. これは, 通常の変換理論で考えられるものとは異なり, スピン構造の持つ “charge conjugation” と呼ばれる対称性と ι がスピン構造に誘導する対称性とを抱き合わせることで得られるものである. この対称性に関する不変部分を Seiberg–Witten 方程式において取り, その有限次元近似に $\mathbb{Z}/4$ 同変 K 理論を適用し, 古田幹雄の 10/8 不等式 [5] の証明と似た議論を行うことで, 加藤は滑らかな involution に対する強い制約を得た. この加藤の結果と符合数定理を合わせて不等式 (4) が導かれる.

不等式 (5) は, 不等式 (4) を僅かに改善したものであるが, このより強い不等式は Dehn twist に関する結果 (定理 1) を (+2)-sphere と (−2)-sphere のどちらに対しても得るために必要である. これは (+2)-sphere についての Dehn twist と (−2)-sphere についての Dehn twist のホモロジーへの作用が異なることに起因する ((1), (2) 参照).

以下不等式 (5) についてもう少し説明する. Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似を加藤の involution の固定点部分に制限したものがどういう形かをまず述べる. $\tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$ を $\mathbb{Z}/4$ の複素 1 次元表現であって, それぞれ $\mathbb{Z}/4$ の固定した生成元を -1 倍, $\sqrt{-1}$ 倍, $-\sqrt{-1}$ 倍で作用させることで定義されるものとする. また, 有限次元ベクトル空間 V の 1 点コンパクト化を V^+ と書くことにする. ここで V^+ の無限遠点を基点と思うことで V^+ を基点付き空間とみなす. V に $\mathbb{Z}/4$ が線型に作用しているとき, 無限遠点には自明に作用させることで $\mathbb{Z}/4$ 作用を V^+ に拡張する. 以上の準備の下, スピン 4 次元多様体 X に (適当な条件を満たす) 滑らかな involution $\iota: X \rightarrow X$ が与えられたとき, X 上の Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似 (の複素化) を加藤の involution の固定点部分に制限したものは,

$$(6) \quad f: (\tilde{\mathbb{C}}^{m_0} \oplus (\mathbb{C}_+ \oplus \mathbb{C}_-)^{n_0})^+ \rightarrow (\tilde{\mathbb{C}}^{m_1} \oplus (\mathbb{C}_+ \oplus \mathbb{C}_-)^{n_1})^+.$$

という形の基点を保つ $\mathbb{Z}/4$ 同変連続写像となる. ただし $f(0) = 0$ で, m_0, m_1, n_0, n_1 は非負整数で

$$m_1 - m_0 = b_+(X) - b_+^\iota(X), \quad n_0 - n_1 = -\frac{\sigma(X)}{16}$$

を満たすものである. 加藤は, $\mathbb{Z}/4$ 同変 K 理論を用いてある Borsuk–Ulam 型定理⁷を示し, それを上の変換 (6) に適用することで不等式 (4) を得た. 加藤の Borsuk–Ulam 型定理を以下のように改善し同様の議論を行うことで, 不等式 (4) を不等式 (5) に改善できる:

定理 4 (K. [9, Theorem 3.3] (2022)). m_0, m_1, n_0, n_1 は非負整数とし, $m_0 < m_1$ と仮定する. 基点を保つ $\mathbb{Z}/4$ 同変連続写像

$$f: (\tilde{\mathbb{C}}^{m_0} \oplus (\mathbb{C}_+ \oplus \mathbb{C}_-)^{n_0})^+ \rightarrow (\tilde{\mathbb{C}}^{m_1} \oplus (\mathbb{C}_+ \oplus \mathbb{C}_-)^{n_1})^+.$$

であって $f(0) = 0$ を満たすものが存在すると仮定する. このとき

$$(7) \quad n_0 - n_1 + 1 \leq m_1 - m_0$$

が成立する.

定理 4 の結論の不等式 (7) は, 加藤が示した Borsuk–Ulam 型定理における評価より 1 良くなっており, これがそのまま不等式 (4) と不等式 (5) の違いに反映されている. 定理 4 も加藤の議論同様やはり $\mathbb{Z}/4$ 同変 K 理論を用いて示されるのだが, 表現環 $R(\mathbb{Z}/4)$ 全体の構造を用いることで評価を 1 得ることができる.

注意 2. 本稿の主題からは外れるが次のことは言及する価値があると思われる: Borsuk–Ulam 型の定理 4 を用いると, 古田の 10/8 不等式 [5] を, Seiberg–Witten 方程式の $\mathbb{Z}/4$ 対称性のみを用いて示することができる. 元々の古田の証明は Seiberg–Witten 方程式のより大きい対称性, $\text{Pin}(2)$ 対称性を用いて示されていたのであるが, その部分群の $\mathbb{Z}/4$ を用いるだけで 10/8 不等式が示されるのは興味深い.

⁷定理 4 において, 仮定の $m_0 < m_1$ を除き, 結論の不等式 (7) の左辺を $n_0 - n_1$ にしたもの.

REFERENCES

- [1] V. I. Arnol'd, *Some remarks on symplectic monodromy of Milnor fibrations*, The Floer memorial volume, 1995, pp. 99–103. MR1362824
- [2] David Baraglia and Hokuto Konno, *A note on the Nielsen realization problem for K3 surfaces*, arXiv:1908.03970 (2019). to appear in Proc. Amer. Math. Soc.
- [3] Benson Farb and Eduard Looijenga, *The Nielsen realization problem for K3 surfaces*, arXiv:2104.08187 (2021). to appear in J. Differential Geom.
- [4] Michael Hartley Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geometry **17** (1982), no. 3, 357–453. MR679066
- [5] M. Furuta, *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$ -conjecture*, Math. Res. Lett. **8** (2001), no. 3, 279–291. MR1839478
- [6] Yuya Kato, *Nonsmoothable actions of $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ on spin four-manifolds*, Topology Appl. **307** (2022), Paper No. 107868, 13. MR4365044
- [7] Ailsa Keating and Oscar Randal-Williams, *On the order of Dehn twists*, arXiv:2104.13154 (2021).
- [8] Steven P. Kerckhoff, *The Nielsen realization problem*, Ann. of Math. (2) **117** (1983), no. 2, 235–265. MR690845
- [9] Hokuto Konno, *Dehn twists and the Nielsen realization problem for spin 4-manifolds*, arXiv:2203.11631 (2022).
- [10] Seraphina Eun Bi Lee, *Isotopy classes of involutions of del Pezzo surfaces*, arXiv:2202.10616 (2022).
- [11] Shigeyuki Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, Invent. Math. **90** (1987), no. 3, 551–577. MR914849
- [12] Jakob Nielsen, *Abbildungsklassen endlicher Ordnung*, Acta Math. **75** (1943), 23–115. MR13306
- [13] Frank Raymond and Leonard L. Scott, *Failure of Nielsen's theorem in higher dimensions*, Arch. Math. (Basel) **29** (1977), no. 6, 643–654. MR467773
- [14] Paul Seidel, *Lectures on four-dimensional Dehn twists*, Symplectic 4-manifolds and algebraic surfaces, 2008, pp. 231–267. MR2441414
- [15] Tadayuki Watanabe, *Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of $\text{Diff}(S^4)$* , arXiv:1812.02448 (2018).