

Gauge theory and diffeomorphism and homeomorphism groups

今野北斗 (東京大学大学院数理科学研究科)*

1. 序 : Diff vs. Homeo

本稿では、族に対するゲージ理論を用いることで、4次元多様体の同相群・微分同相群のホモトピカルな差を引き出すという最近の研究の動向の紹介を行う。第一の目的は、次の問いの4次元における場合に、ゲージ理論を用いて否定的に答えることである：

問 1.1. X を滑らかな多様体とする。 $\text{Homeo}(X), \text{Diff}(X)$ をそれぞれ X の同相群、微分同相群とする。このとき、包含写像

$$\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$$

は弱ホモトピー同値であるか？(ここで、 $\text{Diff}(X)$ には C^∞ -級 Whitney 位相、 $\text{Homeo}(X)$ には C^0 -級 Whitney 位相が入っているものとする¹.)

この問いの4次元の場合について述べる前に、他の次元の状況を概観しておこう。

- (1) X が3次元以下の向きづけ可能な閉多様体である場合は、問 1.1 の答えは常に Yes であると知られている (例えば [10, 16] 参照)²。このことは、「3次元以下の多様体に対しては、 C^0 と C^∞ に本質的に差がない」というしばしば唱えられるスローガンが、自己同型群のレベルでもある意味成立しているものと思うことができよう。
- (2) 一方、高次元では、問 1.1 の答えはしばしば No である。例えば、エキゾチック球面が存在する次元の一つ下の次元の球面 S^n を考えてみよう。任意の (5次元以上の) エキゾチック球面 $\tilde{S}^{n+1}$ は、円板 D^{n+1} の2つのコピーを境界 S^n 上の自己微分同相写像でひねって貼り合わせて得られることが知られている (h -同境界定理の帰結。例えば [25] Part 1 の最初の小節参照)。その自己微分同相写像の写像類は

$$\text{Ker}(\pi_0(\text{Diff}(S^n)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(S^n)))$$

の非自明な元を与えている。したがって S^n に対して問 1.1 の答えは No である。

(1) の次に考えるべき次元である4次元について述べたいのだが、実はより一般に、4次元以上の多様体 X で、問 1.1 の答えが Yes であると示された例は知られていないと思われる。すなわち、次の (少々大胆な) 予想の反例は、筆者の知る限りまだ見つかっていない：

予想 1.2. 4次元以上の任意の滑らかな多様体 X に対し、問 1.1 の答えは常に No である。すなわち、自然な写像 $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ は弱ホモトピー同値ではない。

* e-mail: konno@ms.u-tokyo.ac.jp

¹ したがって、写像 $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ は、位相空間の間の写像としては、埋め込みではなくただの連続写像である。なお、 X がコンパクト多様体ならば、 $\text{Homeo}(X)$ 上の C^0 -級 Whitney 位相はコンパクト開位相と同じものであった。

² 2次元以下の場合にはより強く、 $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ はホモトピー同値と知られている。3次元の場合に主張を単なるホモトピー同値とした場合に反例があるのか筆者は知らない。

しかし、予想 1.2 で問われている最初の次元である 4 次元において、問 1.1 の答えが No であると実際に示されている多様体の例は、つい最近まで大変少なかった。一昨年 (2019 年)、加藤毅氏・中村信裕氏・筆者 [17] が、この問題に対して族のゲージ理論を応用し始めた。その後複数のグループの研究があり、問 1.1 の答えが No であると確定した 4 次元多様体の例が一気に増えた。すなわち、予想 1.2 をサポートする結果が 4 次元において急増した。2019 年 7 月に、Baraglia 氏 [1] が単連結閉 4 次元多様体に対する大きな結果 (定理 4.6) を出した。その後、 $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ が弱ホモトピー同値でない状況で、実際にどの次数のホモトピー群で差が生じるかという問題の精密化と、あるクラスの非単連結な 4 次元多様体 [20] (中村信裕氏・筆者) や境界付き 4 次元多様体に対する拡張 [21] (谷口正樹氏・筆者) が行われた。

上で触れた精密化された問題について詳しく述べよう：

問 1.3. X を滑らかな 4 次元多様体とする。写像 $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ が弱ホモトピー同値でないとき、ホモトピー群に誘導される準同型

$$\pi_n(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X)) \quad (1)$$

が同型でない $n \geq 0$ をできるだけ多く見つけよ。また、もしある n に対して (1) が同型でないなら、成立しないのは単射性・全射性・その両方のどれか？

恐らく、問 1.3 に答えるのは一般的には難しい。しかし、Baraglia 氏と筆者の共同研究 [4] で、代表的な 4 次元多様体である $K3$ 曲面について、問 1.3 に対する進展があった。

以上の最近の動きをサーベイすることが本稿の目的である。

本稿の流れは以下の通りである。2 節では、本稿で説明される結果の証明のアイデアを説明するための準備として、従来のゲージ理論を用いて「滑らかになれない 4 次元位相多様体」を検出 (detect) する議論を振り返る。3 節では、本稿の結果の証明の主たるアイデア、すなわち族に対するゲージ理論を用いて「滑らかになれない 4 次元位相多様体束」を検出するストーリーを説明する。4 節では、3 節のアイデアに基づいて得られる問 1.1 に関する結果を述べる。5 節では、より精密化された問 1.3 に関する結果を説明する。6 節では、境界付き 4 次元多様体に族のゲージ理論を展開する試みの一端を述べる。

注意 1.4. 本稿の結果の道具は 4 次元のゲージ理論であるが、一般次元における微分同相群の研究の主要な道具の一つは (一般化された) 森田–Mumford–Miller 類 (MMM 類) である。近年、微分同相群のコホモロジー群およびホモトピー群の計算が、MMM 類を用いて様々な状況で行われている。(例えば [13, 22] 参照。) しかし実は、少なくとも $\mathbb{Q}$ 上では、MMM 類はトポロジカルな範疇でも定義でき、滑らかなバンドルに対しては通常の MMM 類と一致すると知られている [9]。したがって、MMM 類を用いて微分同相群と同相群の差を検出するには $\mathbb{Q}$ 上から抜け出す必要があるが、これまで組織的な計算が遂行されている議論の多くは $\mathbb{Q}$ 上のものであり、容易ではない。

族のゲージ理論を用いる本稿の議論と MMM 類を用いる議論は、微分同相群と同相群の比較に関して言えば次の意味で相補的な方向性を持っている：標語的には、族のゲージ理論から期待される結果は

$$\text{Coker}(\pi_*(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_*(\text{Homeo}(X)))$$

の大きさの“下からの評価”であり，MMM類から期待される結果は

$$\mathrm{Im}(\pi_*(\mathrm{Diff}(X)) \rightarrow \pi_*(\mathrm{Homeo}(X)))$$

の大きさの“下からの評価”である．

2. 背景：ゲージ理論と滑らかになれない4次元位相多様体

我々の手法を説明するために，まずは従来のゲージ理論の典型的な応用である，滑らかになれない位相多様体の検出を振り返ろう．

位相多様体がいつ可微分構造を許容するかということは，多様体のトポロジーにおける最も根本的な問題のひとつである．多様体の次元が3以下の場合，任意の位相多様体は可微分構造を許容する．しかし，4次元以上の任意の次元で，可微分構造を許容しないような位相多様体が存在することが知られている．このような位相多様体は，「滑らかになれない位相多様体」(non-smoothable topological manifold)と呼ばれ，多様体のトポロジーの正統的な興味の対象である．「滑らかになれない位相多様体」がはじめて現れる次元である4次元においては，そのような多様体を検出する上で，ゲージ理論とFreedman理論が強力な方法を与える．実際の議論は以下の3つのステップからなる．

ステップ 1 滑らかな4次元多様体上で，Yang–Mills 反自己双対方程式

$$F_A^+ = 0$$

あるいはSeiberg–Witten 方程式

$$\begin{cases} F_A^+ = \sigma(\Phi, \Phi), \\ \not{D}_A \Phi = 0 \end{cases}$$

という偏微分方程式を立式する．微分方程式を書き下すためには，もちろん多様体の可微分構造が必要である³．

ステップ 2 これらの偏微分方程式の解空間を調べるなどして，4次元多様体の古典的な不変量（典型的には交叉形式）に，何らかの制約がかかることを証明する．Donaldsonの対角化定理 [6] と古田の10/8不等式 [11] が，そのような制約として代表的なものである．

ステップ 3 Freedman理論を用いて，ステップ2で得られた制約を破る4次元位相多様体を構成する．これは滑らかになれない位相多様体の例を与える．

3. アイデア：族のゲージ理論と滑らかになれない位相的4次元多様体束

ここで，前節の議論の族版あるいはファイバー束版を考えよう．すなわち，ゲージ理論の族版を展開して，「滑らかになれないファイバー束」（正確な定義は後の定義 3.1 参照）を検出するのである．これが本稿の内容の主要なアイデアであり，加藤毅氏・中村信裕氏との共同研究 [17] で初めて導入されたものである．「滑らかになれないファイバー束」を検出する議論は，前節同様3つのステップからなる．

³ 本当は，Riemann 計量，適当なLie群 G に対する主 G 束（Yang–Mills のとき）， spin^c 構造（Seiberg–Witten のとき）も必要であるが省略する． spin^c 構造に関しては，3節で族版の議論をするときに技術的に問題になり，“トポロジカルな spin^c 構造”を議論の中で一瞬導入することが応用上必要になる．

ステップ 1 滑らかな4次元多様体束上で, Yang–Mills 反自己双対方程式あるいは Seiberg–Witten 方程式という偏微分方程式の族を立式する. すなわち, fiberwise に偏微分方程式を考える.

ステップ 2 これらの偏微分方程式の族の解空間を調べるなどして, 4次元多様体束の不変量⁴に, 何らかの制約がかかることを証明する. (具体的にどのような制約か, 第4節で一つの例を説明する.)

ステップ 3 Freedman 理論を用いて, ステップ 2 で得られた制約を破る位相的4次元多様体束を構成する. これは滑らかになれない位相的4次元多様体束の例を与える.

滑らかになれない位相的4次元多様体束の存在は, ファイバーの4次元多様体の同相群と微分同相群の間にホモトピカルな差があることを意味している. これを見るために, 「滑らかになれない位相的多様体束」という言葉を明確にしよう.

定義 3.1. ([17]) X を (微分構造を許容する) 位相多様体とする. B を位相空間とし,

$$X \rightarrow E \rightarrow B$$

を位相的なファイバー束とする. すなわち, 構造群が $\text{Homeo}(X)$ であるようなファイバー束とする. X 上のある微分構造に対して, E の構造群が $\text{Diff}(X)$ まで簡約するとき, E を滑らかになれる (**smoothable**) ファイバー束という. X のいかなる微分構造に対しても E の構造群が $\text{Diff}(X)$ に簡約できないときは, E を滑らかになれない (**non-smoothable**) ファイバー束ということにする.

全空間 E が多様体として滑らかにできるか (可微分構造を許容するか) という問題と同時に論じるときは, 区別のため, E が “ファイバー束として滑らかになれる/なれない”, などと言うことにする.

すなわち, 位相的ファイバー束 E の分類写像を $\varphi_E : B \rightarrow B\text{Homeo}(X)$ としたとき, 下の図式の持ち上げ問題が X のいかなる微分構造に対しても解けないとき, E を滑らかになれないファイバー束ということにする:

$$\begin{array}{ccc} & & B\text{Diff}(X) \\ & \nearrow & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\varphi_E} & B\text{Homeo}(X) \end{array}$$

もしも X をファイバーとする滑らかになれないファイバー束が存在すれば, 障害理論から, X のいかなる微分構造に対しても, 写像 $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ が弱ホモトピー同値でないことがただちに従う.

注意 3.2. 上では B は位相空間としたが, B が滑らかな多様体である場合, 「滑らかなファイバー束」のもう一つの自然な定義はより強いものであろう. すなわち, $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff}(X)\}_{\alpha,\beta}$ を B のある開被覆 $\{U_\alpha\}_\alpha$ に対する E の変換関数としたとき, 写像

$$(U_\alpha \cap U_\beta) \times X \rightarrow X ; (b, x) \mapsto g_{\alpha\beta}(b)(x)$$

⁴ 具体的には, 4次元多様体束から誘導される H^+ のバンドルや Dirac 作用素の族の指数のような, Seiberg–Witten 方程式の族を線形化して得られる対象である.

が滑らかであると仮定する定義である。(変換関数にこの滑らかさを課すと、全空間 E は滑らかな多様体になり、射影 $E \rightarrow X$ は滑らかな写像となる。)

しかし実は、 B が滑らかな多様体のとき、位相的ファイバー束 $X \rightarrow E \rightarrow B$ の構造群が $\text{Diff}(X)$ まで簡約していれば、 E を $\text{Diff}(X)$ -束としての同型で取り替えて、 E の変換関数が上の意味で滑らかであるようにできると知られている [28].

注意 3.3. 向きを保つ微分同相写像・同相写像からなる群 $\text{Diff}^+(X)$, $\text{Homeo}^+(X)$ を使わないのが奇妙に映るかもしれないが、それは次の理由による：向きづけられた4次元閉多様体は、符号数がゼロでなければ $\text{Diff}^+(X) = \text{Diff}(X)$, $\text{Homeo}^+(X) = \text{Homeo}(X)$ であり、本稿の例で実際に現れる多様体は全てそのようなものである。そこで最初から $\text{Diff}(X)$, $\text{Homeo}(X)$ を考えることにする。

4. 問 1.1 に対する結果

それでは実際に前節のアイデアで得られた問 1.1 に対する結果を述べる。負定値な E_8 多様体、すなわち、向き付けられた単連結4次元位相閉多様体で交叉形式が負定値 E_8 -格子なものを $-E_8$ と書く。(これは滑らかになれない4次元位相多様体の典型例で、Freedman 理論により存在が保証されるものである。)

定理 4.1. (加藤-K.-中村 [17] (2019)) $3 \leq m \leq 6$ に対し、4次元位相多様体 X を

$$X = 2(-E_8) \# m(S^2 \times S^2)$$

で定義する。(X は $K3 \# (m-3)(S^2 \times S^2)$ と同相なので、可微分多様体の構造を許容する。) このとき、 $\text{Homeo}(X)$ を構造群とするファイバー束

$$X \rightarrow E \rightarrow T^{m-2}$$

であって次の条件を満たすものが存在する：

- (1) 全空間 E は多様体として滑らかにできる。すなわち可微分構造を許容する。
- (2) しかし、 $X \rightarrow E \rightarrow T^{m-2}$ はファイバー束として滑らかにできない。

注意 3.2 から、もしも全空間 E 自身が多様体として滑らかにできないと分かれば、条件 (2) がただちに出る。条件 (1) は、条件 (2) がそのような自明な方法では導出できないことを保証している。

全空間、ファイバー、底空間の全てが多様体としては滑らかにできるにもかかわらず、ファイバー束としては滑らかにできないという状況があり得ることは、これまで認識すらされていなかったと思われる。族のゲージ理論が非常に微妙な現象を捉えていることが窺えるであろう。

注意 4.2. 定理 4.1 の (1) を示すのには、Kirby–Siebenmann 理論を用いる。(2) が族のゲージ理論を用いる部分である。より詳しく述べると、古田幹雄氏の 10/8 不等式の族版を今の状況において証明し、それを用いることがアイデアである。

注意 4.3. E の構成は、 X 上の可換な自己同相写像 $(m-2)$ 個による (多重) 写像トーラスを考えることでなされる。このような構成を行うと non-smoothable な対象が得られる可能性があるというアイデアは、中村信裕氏の [29, 30] に遡る。([29, 30] では4次元多様体への群作用の non-smoothability を論じている。) この構成のアイデアは、筆者

による正スカラー曲率計量のなす空間のトポロジーの研究 [18] やゲージ理論的特性類の研究 [19] において非自明な例を作る上でも有効に用いられた。

1 節の間 1.1 あるいは予想 1.2 に戻ろう。障害理論により、定理 4.1 の (2) からただちに次が得られる：

系 4.4. (加藤-K.-中村 [17] (2019)) 4次元可微分多様体 X が、ある $n \in \{0, \dots, 3\}$ に対して

$$K3 \# n(S^2 \times S^2)$$

と同相とする。このとき写像 $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ は弱ホモトピー同値ではない。

注意 4.5. この系 4.4 の結果は、 $n > 0$ に対しては、 X が $K3 \# n(S^2 \times S^2)$ と微分同相の場合ですら知られていなかった。(エキゾチック $K3 \# n(S^2 \times S^2)$ の存在は、少なくとも n が偶数のときは知られている。無論、系 4.4 はそういった多様体にも適用できる。) 一方、上の結果の $n = 0$ の場合は、 X が $K3$ と微分同相の場合は Donaldson [8] が示しており、 X が $K3$ と同相な場合は Morgan–Szabó [26] の結果から従う。

加藤氏・中村氏との共同研究 [17] が arXiv 上に出た翌月、Baraglia が系 4.4 を大幅に拡張する以下の結果を証明した：

定理 4.6. (Baraglia [1] (2019)) X を滑らかな向きづけられた単連結 4次元閉多様体であって、交叉形式が不定値かつ符号数の絶対値が 8 より大きいものとする。このとき、 $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ は弱ホモトピー同値でない。

注意 4.7. より詳しくは、自然な写像 $\pi_n(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\text{Homeo}(X))$ がある $n \leq \min\{b^+(X), b^-(X)\} - 1$ で同型でないことが分かる。

この Baraglia の結果から、「ほとんどの単連結 4次元閉多様体に対し、予想 1.2 は正しい」ということが分かったことになる。

恐らく、予想 1.2 が正しいと示せる 4次元多様体の例を単連結な範囲で定理 4.6 以上に増やすのは、現時点で存在する族のゲージ理論のアイデアのみでは難しいと思われる。しかしあるタイプの非単連結 4次元多様体⁵は、[1] の議論では扱えないと思われるが、中村信裕氏の展開していた $\text{Pin}^-(2)$ -モノポール [31, 32] の族版を展開することで扱える。これを中村氏との共同研究で実際に確かめた [20]。

定理 4.6 の証明の方針は前節で述べたアイデアに基づいており、4次元多様体束の構成も [17] と同様であるが、滑らかな 4次元多様体束に対する制約は以下の定理 4.8 (Donaldson の対角化定理の族版) により与えられ、古田の 10/8 不等式の族版を用いる [17] とは異なる。

Donaldson の対角化定理の族版を述べるために記号を準備する。一般に、向き付けられた 4次元閉多様体 X がファイバーの (位相的でも構わない) ファイバー束 $X \rightarrow E \rightarrow B$ に対して、ベクトル束 $\mathbb{R}^{b^+(X)} \rightarrow H^+(E) \rightarrow B$ が同型を除いて一意的に付随する。 $H^+(E)$ は、直感的には、各ファイバーの $H^2(\cdot; \mathbb{R})$ の中の最大次元の正定値部分空間を底空間に沿って連続的に選んで得られるベクトル束である。(そのような選び方の空間は (空で無く) 可縮である。)

⁵ 単連結な 4次元多様体に、 $S^1 \times Y^3$ や $S^2 \times \Sigma_g$ (ここで Y, Σ_g はそれぞれ閉 3次元多様体と種数 $g \geq 1$ の閉曲面) を連結和したようなもの。

定理 4.8. (Baraglia [1] (2019)) X を滑らかな向き付けられた 4 次元閉多様体とする． $\mathfrak{s}$ を X 上の spin^c 構造とする．コンパクト空間 B 上の spin^c 4 次元多様体の滑らかなファイバー束 $(X, \mathfrak{s}) \rightarrow E \rightarrow B$ に対して，もし $w_{b^+}(X)(H^+(E)) \neq 0$ ならば，

$$c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(X) \leq 0 \quad (2)$$

が成立する．ここで $\sigma(X)$ は X の符号数である．

不等式 (2) の左辺は， $\mathfrak{s}$ に伴う spin^c Dirac 作用素の指数（の定数倍）である． $B = \{\text{pt}\}$ で X が負定値のとき，定理 4.8 の主張は（純代数的な議論（Elkies の定理）と合わせて）Donladoson の対角化定理を復元する．この意味で，定理 4.8 は Donladoson の対角化定理の族への拡張である．

定理 4.8 の証明は，Seiberg–Witten 方程式の族の有限次元近似に S^1 -同変コホモロジーを適用することで得られる．これは，Bauer–Furuta [5] による Donladoson の対角化定理の Seiberg–Witten 方程式の有限次元近似を用いた証明の族版と思える．なお，Baraglia [1] は，スピンの 4 次元多様体の族に対して $\text{Pin}(2)$ -同変コホモロジーを用いた議論も行っており，より精密な結果が得られる．これは Donaldson の Theorems B,C [7] の Seiberg–Witten 方程式による証明の族版とみられる．

5. 問題の精密化：問 1.3 に対する結果

前節までは，4 次元多様体 X に対する $\text{Diff}(X)$ と $\text{Homeo}(X)$ の比較について，写像 $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ が弱ホモトピー同値でない，という結果について論じてきた．しかし， $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ が弱ホモトピー同値でないというのは，二つの空間の差異の識別としてはかなり荒いものである．少なくとも，どの次数のホモトピー群で差が出るのか，ということは当然の疑問であろう．そのような精密化された問い（すなわち問 1.3）に対する結果を紹介する．まず，問 1.3 に対する先行研究を列挙しよう．

定理 5.1. (Donaldson [8] (1990), Morgan–Szabó [26] (1997)) X を $K3$ 曲面とホモトピー同値な滑らかな 4 次元多様体とする．このとき自然な写像

$$\pi_0(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(X))$$

は全射ではない．

定理 5.2. (Ruberman [33] (1998), Baraglia–K. [2] (2018)) X を次のいずれかとする：
 $X = n(K3 \# S^2 \times S^2)$ ($n \geq 2$) あるいは $X = 2n\mathbb{CP}^2 \# m(-\mathbb{CP}^2)$ ($n \geq 2, m \geq 10n + 1$)．
 このとき自然な写像

$$\pi_0(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(X))$$

は単射ではない．

定理 5.1, 定理 5.2 の証明にはゲージ理論が用いられる．特に，Ruberman [33] の結果は S^1 でパラメトライズされた 1 次元の族の Yang–Mills ゲージ理論を用いるものであり，本稿で扱われている内容の先駆けである．[2] はその議論の Seiberg–Witten 方程式版を行い，適用範囲を広げたものである．

さて，定理 5.1, 定理 5.2 は π_0 における比較であったが，1 次以上のホモトピー群で差が出る例はあるのだろうか．筆者の知る限り，4 次元におけるこの問いに対する初めての結果は，渡邊忠之氏による次のものである．これは氏の 4 次元 Smale 予想の否定的解

決を導く理論の帰結である．渡邊氏の証明は Kontsevich 特性類を用いるもので，ゲージ理論による定理 5.1, 定理 5.2 とは全く異なる．

定理 5.3. (渡邊 [34] (2018)) 自然な写像

$$\pi_1(\text{Diff}(S^4)) \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(S^4))$$

は単射ではない．

それでは，1 次以上のホモトピー群で， $\pi_*(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_*(\text{Homeo}(X))$ が全射でないことが示せる場合はあるだろうか？Baraglia 氏と筆者の次の結果は，この問いに対する初めての例を与える．これが本節の主定理である：

定理 5.4. (Baraglia–K. [4] (2019)) 自然な写像

$$\pi_1(\text{Diff}(K3)) \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(K3))$$

は全射ではない．

注意 5.5. $\pi_0(\text{Diff}(K3)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(K3))$ は全射ではない（定理 5.1）が，単射かどうかは未解決である．また $\pi_1(\text{Diff}(K3)) \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(K3))$ が単射かも分かっていない．2 次以上のホモトピー群についても，全く何も知られていないと思われる．

定理 5.4 の証明のあらすじは以下の通りである．まず，族のゲージ理論由来の制約を用いて，滑らかになれない位相的ファイバー束 $K3 \rightarrow E \rightarrow T^2$ を検出する⁶．次に， $K3$ 曲面の大域的 Torelli の定理から得られる結果⁷を用いて，1-骨格 $(T^2)^{(1)}$ 上では（位相的バンドルとして） E と同型になる滑らかなファイバー束 $K3 \rightarrow E' \rightarrow T^2$ を構成する． E と E' の差の障害が， $\text{Coker}(\pi_1(\text{Diff}(K3)) \rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(K3)))$ の非自明な元を与えると確認できる．

ここで一般に， $\pi_*(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_*(\text{Homeo}(X))$ が単射でない・全射でないという，やや代数的に記述される結果を，多様体のトポロジーの王道の問題である，エキゾチック構造の検出・滑らかになれない位相多様体の検出と比較し，整理してみよう：

個々の多様体	多様体の族（ファイバー束）
エキゾチックな多様体	エキゾチックなファイバー束 “ $\leftrightarrow$ ” $\pi_*(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_*(\text{Homeo}(X))$ が単射でない
滑らかにできない位相多様体	滑らかにできない位相的ファイバー束 “ $\leftrightarrow$ ” $\pi_*(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_*(\text{Homeo}(X))$ が全射でない

ここで，底空間 B とファイバー X が等しい二つの滑らかなファイバー束が互いにエキゾチックとは， $\text{Homeo}(X)$ -束としては同型であるが $\text{Diff}(X)$ -束としては同型でない

⁶ 正確には，ここで「滑らかになれない」と言っているのは，定理 3.1 より弱い次の意味である： $K3$ の標準的な微分構造に関する $\text{Diff}(K3)$ に， E の構造群が簡約しない．

⁷ 上で用いた大域的 Torelli の定理から得られる結果とは，自然な写像 $\text{Diff}(K3) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}(K3))$ が像の上で切断を持つ，というものである．（ $K3$ 曲面の大域的 Torelli の定理をこのような結果の証明に用いるアイデアは [14, 15] に負う．）大域的 Torelli の定理は $K3$ 曲面固有の特殊事象であり，一般の 4 次元多様体にはこの議論は適用できない．

ことと定義する。(表の“ $\leftrightarrow$ ”は、完全に1対1に対応するわけではないが、少なくとも底空間が球面なら対応する、くらいの意味である。)表の中身をもう少し説明しよう。

表の一行目、エキゾチックな多様体・ファイバー束は、共に不変量を用いて検出されるものである。例えば、エキゾチックな4次元多様体はしばしばDonaldson不変量・Seiberg–Witten不変量を用いて検出され、渡邊氏 [34] の定理 5.3 は Kontsevich 特性類を用いて S^2 上のエキゾチックな S^4 -束を検出することで証明される。

表の二行目、滑らかにできない多様体・ファイバー束は、共に滑らかな構造から何らかの制約を引き出すことで検出できる。これが2節、3節で述べたことであった。振り返ると、滑らかにできない位相多様体はDonaldsonの対角化定理や古田の10/8不等式という制約を用いて検出され、我々の定理 5.4 は族のSeiberg–Witten方程式由来の制約を用いて滑らかになれないファイバー束を検出することで証明された。

このように比較してみると、 $\pi_*(\text{Diff}(X)) \rightarrow \pi_*(\text{Homeo}(X))$ が単射でない・全射でないという結果とその証明法は、多様体のトポロジーの基本的な問題意識やアイデアを受け継ぐものであることが明瞭であろう。

6. 境界付き4次元多様体に対する議論

Baraglia による Donaldson の対角化定理の族版 (定理 4.8) は強力であり、適用範囲が広い。これを境界付き4次元多様体に広げようと試みるのは自然であろう。境界付き4次元多様体に対する Donaldson の対角化定理の拡張は、Frøyshov の1996年 [12] にはじまる一連の仕事によってなされている。境界付き4次元多様体の族として一番取り扱いやすいのは、境界として現れる3次元多様体の族が自明な場合である。この場合に、Frøyshov のアイデアに沿って Baraglia の定理 4.8 を境界付きの場合に一般化した：

定理 6.1. (K.–谷口 [21] (2020)) X を滑らかな向き付けられた境界付き4次元多様体で、 $b_1(X) = 0$ とする。境界 $\partial X = Y$ は連結で、有理ホモロジー3球面であるとする。 $\mathfrak{s}$ を X 上の spin^c 構造とする。コンパクト空間 B 上の spin^c 4次元多様体の滑らかなファイバー束 $(X, \mathfrak{s}) \rightarrow E \rightarrow B$ に対して、ファイバーごとに境界への制限を行ったものが自明な spin^c 3次元多様体束であると仮定する。このとき、もし $w_{b^+(X)}(H^+(E)) \neq 0$ ならば、

$$(c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(X))/8 \leq \delta(Y, \mathfrak{s}|_Y)$$

が成立する。ここで $\delta(Y, \mathfrak{s}|_Y) \in \frac{1}{8}\mathbb{Z}$ は Frøyshov 不変量である。

この定理で $B = \{\text{pt}\}$, X が負定値とすると、Frøyshov の定理を復元する。また $Y = S^3$ とすると Baraglia の定理 4.8 を復元する。Frøyshov 不変量は、Donaldson の対角化定理を境界付き4次元多様体に拡張する際に自然に現れる不変量で、例えば Brieskorn ホモロジー球面などに対しては相当程度計算でき (例えば、 $k \geq 1$ に対して、 $\delta(\Sigma(2, 3, 12k - 5)) = 0$, $\delta(\Sigma(2, 3, 12k - 1)) = 1$ など)、また連結和や向きをひっくり返す操作に対して準同型的に振る舞う。(δ は spin^c 構造にも依るが、整ホモロジー3球面に対しては、 spin^c 構造が一意なので、以下記号から落とす。)

定理 6.1 を使うと、定理 4.6 (「ほとんどの」閉4次元多様体 X に対して $\text{Diff}(X) \hookrightarrow \text{Homeo}(X)$ が弱ホモトピー同値でないこと) が境界付きに拡張できる：

定理 6.2. (K.–谷口 [21] (2020)) X を滑らかな向き付けられた単連結境界付き4次元多様体で、 $\sigma(X) \leq 0$ かつ交叉形式が不定値とする。境界 $\partial X = Y$ は連結で、整ホモ

ロジー 3 球面であるとする. $\sigma(X) < -8$ かつ $\delta(Y) \leq 0$, あるいは X がスピンかつ $-\sigma(X)/8 > \delta(Y)$ と仮定する. このとき,

$$\begin{aligned}\mathrm{Diff}(X, \partial) &\hookrightarrow \mathrm{Homeo}(X, \partial), \\ \mathrm{Diff}(X) &\hookrightarrow \mathrm{Homeo}(X)\end{aligned}$$

は弱ホモトピー同値でない. ここで $\mathrm{Diff}(X, \partial) = \{ f \in \mathrm{Diff}(X) \mid f|_Y = \mathrm{id}_Y \}$ で, $\mathrm{Homeo}(X, \partial)$ も同様に定義される.

注意 6.3. より詳しくは, 自然な写像 $\pi_n(\mathrm{Diff}(X, \partial)) \rightarrow \pi_n(\mathrm{Homeo}(X, \partial))$ がある $n \leq b^+(X) - 1$ で同型でないこと, $\pi_n(\mathrm{Diff}(X)) \rightarrow \pi_n(\mathrm{Homeo}(X))$ がある $n \leq b^+(X)$ で同型でないことが分かる.

定理 6.2 の仮定を満たす具体例は極めて豊富に存在する. (例えば, 楕円曲面 $E(2n)$ の中の Gompf 核 $N(2n)$, およびそれに任意の可縮な滑らかな 4 次元多様体や $\Sigma(2, 3, 5)$ を境界に持つ負定値 E_8 多様体を任意個連結和したものが一つの例である.)

着目すべきは, 定理 6.2 の仮定は, X の微分構造によらない主張であるということである. これは定理 6.2 が, Donaldson の対角化定理 (の境界付きへの拡張) の族版であることの帰結である. (対角化定理も, 微分構造の存在さえあれば交叉形式に制約がかかるという主張であり, どういう微分構造を考えているかは反映しなかった.)

定理 6.2 の証明は, Seiberg–Witten 方程式および X から Y へ接続・スピノルの制限写像のペアの族の有限次元近似に, S^1 -同変コホモロジーを適用することで得られる. この有限次元近似の受け皿として Manolescu の Seiberg–Witten Floer 安定ホモトピー型 [23] を用いる. なお, スピン 4 次元多様体の族に対して $\mathrm{Pin}(2)$ -同変コホモロジーを用いた議論も行うことができ, より精密な結果が得られる. この場合は, Frøyshov 不変量 δ の代わりに, Manolescu の不変量 α, β, γ [24] が現れる.

今後は恐らく, 4 次元多様体の族の境界として現れる 3 次元多様体の族が非自明な場合の研究がひとつの面白い方向性となるであろう.

謝辞 草稿に目を通し, 貴重なコメントを下さった森田陽介氏に感謝する.

参考文献

- [1] D. Baraglia, *Constraints on families of smooth 4-manifolds from Bauer-Furuta invariants*, arXiv:1907.03949.
- [2] D. Baraglia and H. Konno, *A gluing formula for families Seiberg-Witten invariants*, Geom. Topol. **24** (2020), no. 3, 1381–1456.
- [3] D. Baraglia and H. Konno, *On the Bauer-Furuta and Seiberg-Witten invariants of families of 4-manifolds*, arXiv:1903.01649.
- [4] D. Baraglia and H. Konno, *A note on the Nielsen realization problem for K3 surfaces*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.
- [5] S. Bauer and M. Furuta, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. I*, Invent. Math. **155** (2004), no. 1, 1–19.
- [6] S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four-dimensional topology*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 2, 279–315.
- [7] S. K. Donaldson, *Connections, cohomology and the intersection forms of 4-manifolds*, J. Differential Geom. **24** (1986), no. 3, 275–341.
- [8] S. K. Donaldson, *Polynomial invariants for smooth four-manifolds*, Topology **29** (1990), no. 3, 257–315.

- [9] J. Ebert and O. Randal-Williams, *Generalised Miller-Morita-Mumford classes for block bundles and topological bundles*, *Algebr. Geom. Topol.* **19** (4) (2019) 2099–2150.
- [10] B. Farb and D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, Princeton Mathematical Series, vol. 49, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [11] M. Furuta, *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$ -conjecture*, *Math. Res. Lett.* **8** (2001), no. 3, 279–291.
- [12] K. Frøyshov, *The Seiberg-Witten equations and four-manifolds with boundary*, *Math. Res. Lett.* **3** (1996), no. 3, 373–390.
- [13] S. Galatius and O. Randal-Williams, *Moduli spaces of manifolds: a user’s guide*, arXiv:1811.08151.
- [14] J. Giansiracusa, *The diffeomorphism group of a K3 surface and Nielsen realization*, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **79** (2009), no. 3, 701–718.
- [15] J. Giansiracusa, A. Kupers, B. Tshishiku, *Characteristic classes of bundles of K3 manifolds and the Nielsen realization problem*, arXiv:1907.07782.
- [16] A. E. Hatcher, *Linearization in 3-dimensional topology*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978), Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980, pp. 463–468.
- [17] T. Kato, H. Konno, and N. Nakamura, *Rigidity of the mod 2 families Seiberg-Witten invariants and topology of families of spin 4-manifolds*, to appear in *Compos. Math.*
- [18] H. Konno, *Positive scalar curvature and higher-dimensional families of Seiberg-Witten equations*, *J. Topol.* **12** (2019), no. 4, 1246–1265.
- [19] H. Konno, *Characteristic classes via 4-dimensional gauge theory*, to appear in *Geom. Topol.*
- [20] H. Konno, N. Nakamura, *Constraints on families of smooth 4-manifolds from $\text{Pin}^-(2)$ -monopole*, arXiv:2003.12517
- [21] H. Konno, M. Taniguchi, *The groups of diffeomorphisms and homeomorphisms of 4-manifolds with boundary*, arXiv:2010.00340
- [22] A. Kupers, *Some finiteness results for groups of automorphisms of manifolds*, arXiv:1612.09475.
- [23] C. Manolescu, *Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type of three-manifolds with $b_1 = 0$* , *Geom. Topol.* **7** (2003), 889–932.
- [24] C. Manolescu, *$\text{Pin}(2)$ -equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture*, *J. Amer. Math. Soc.* **29** (2016), no. 1, 147–176.
- [25] J. Milnor, *Collected papers of John Milnor. III. Differential Topology*, American Mathematical Society, Providence (2007).
- [26] J. Morgan and Z. Szabó, *Homotopy K3 surfaces and mod 2 Seiberg-Witten invariants*, *Math. Res. Lett.* **4** (1997), no. 1, 17–21.
- [27] S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, *Invent. Math.*, **90** (3):551–577, 1987.
- [28] C. Müller, C. Wockel, *Equivalences of smooth and continuous principal bundles with infinite-dimensional structure group*, *Adv. Geom.* **9** (2009), no. 4, 605–626.
- [29] N. Nakamura, *The Seiberg-Witten equations for families and diffeomorphisms of 4-manifolds*, *Asian J. Math.* **7** (2003), no. 1, 133–138.
- [30] N. Nakamura, *Smoothability of $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -actions on 4-manifolds*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **138** (2010), no. 8, 2973–2978.
- [31] N. Nakamura, *$\text{Pin}^-(2)$ -monopole equations and intersection forms with local coefficients of 4-manifolds*, *Math. Ann.* **357** (2013), pp 915–939.
- [32] N. Nakamura, *$\text{Pin}^-(2)$ -monopole invariants*, *J. Differ. Geom.* **101**, Number 3 (2015), 507–549.
- [33] D. Ruberman, *An obstruction to smooth isotopy in dimension 4*, *Math. Res. Lett.* **5** (1998), no. 6, 743–758.
- [34] T. Watanabe, *Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of $\text{Diff}(S^4)$* , arXiv:1812.02448.