CHARACTERISTIC CLASSES VIA 4-DIMENSIONAL GAUGE THEORY

今野 北斗（東京大学大学院数理科学研究科）

1. 序

本稿では，族のゲージ理論に基づく 4 次元多様体束の特性類の研究 (K. [8]) の紹介を行う．

1982 年の Donaldson のブレイクスルー以降，ゲージ理論は，古典的なトポロジーの手法を真に超えた解析的な道具立てを 4 次元トポロジー・幾何学にもたらしてきた．そのゲージ理論の，4 次元多様体の族への拡張が本稿のテーマである．族に対するゲージ理論の最初の著名な研究は，1998 年に始まる Ruberman [12–14] によるものである．Ruberman は，1 次元空間にパラメトライズされた 4 次元多様体の族に対してゲージ理論を展開し，いくつかの興味深い応用を与えた．当然期待される次のステップは，高次元のパラメータ空間でパラメトライズされた族に対するゲージ理論の研究である．しかし，Ruberman の結果や議論の応用に関する研究はその後いくつかなされたものの，一般論の可能性を追求する方向は長らく発展しなかった．その欠を補うべく，講演者 [8] は 4 次元多様体束の特性類をゲージ理論によって構成する研究を行った．その基調を成す哲学は，Mumford–森田–Miller 類に代表される特性類の理論の無限次元化である．

2. ゲージ理論に基づく 4 次元多様体束の特性類

現時点で知られているゲージ理論に基づく 4 次元多様体の族の不変量は，4 次元多様体の自己微分同相写像に対する整数値不変量 (Ruberman [12–14]), spin^c 4 次元多様体の族に対する整数値不変量 (Li–Liu [9]), および本稿の主題である 4 次元多様体束の特性類 (K. [8]) である．

本稿の考察対象は 4 次元多様体の族であるが，多様体の族として最もリーズナブルなクラスのひとつはファイバー束であろう．そしてファイバー束に対するトポロジカルな不変量として最も代表的なものは特性類である．これをゲージ理論を用いて構成したい．族のゲージ理論を用いて 4 次元多様体束の特性類の構成ができるのではないかということは，1990 年ごろから Donaldson [3,4] が示唆していた．ここで述べる講演者の構成 [8] はその一つの実現を与えるものである．構成のアイデアを一言で述べれば，Euler 類の無限次元化を考えることである．すなわち，曲面束の Mumford–森田–Miller 類のような，Euler 類に基づいて定義される多様体束の特性類の構成の無限次元化を行うことにより定義がなされる．$SO(3)$-Yang–Mills 方程式に基づく特性類と Seiberg–Witten 方程式に基づく特性類の 2 種類が定義できるのであるが，基本的には平行しているため，計算例の多い Seiberg–Witten 方程式に基づく特性類のみここでは述べる．X を向き付けられた 4 次元閉多様体とする．$\mathrm{Diff}^+(X)$ を X 上の向きを保つ自己微分同相写像のなす群とする．$\mathfrak{s}$ を X 上のひとつの spin^c 構造の同型類とし，

$$\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s}) := \left\{\, f \in \mathrm{Diff}^+(X) \;\middle|\; f^*\mathfrak{s} = \mathfrak{s} \,\right\}$$

とおく．また，$\mathcal{O}$ を X のひとつのホモロジー的向き (homology orientation)，すなわちベクトル空間 $H^1(X;\mathbb{R}) \oplus H^+(X;\mathbb{R})$ のひとつの向きとする．ここで $H^+(X;\mathbb{R})$ は $H^2(X;\mathbb{R})$ の交叉形式に関して正定値な最大次元の部分空間であり，以下その次元を $b^+(X)$ と書く．$\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s})$ の部分群 $\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s},\mathcal{O})$ を

$$\mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s},\mathcal{O}) := \{\, f \in \mathrm{Diff}(X,\mathfrak{s}) \mid f^*\mathcal{O} = \mathcal{O} \,\}$$

で定める．さて，spin^c 構造（の同型類）$\mathfrak{s}$ に対しては，形式的次元 $d(\mathfrak{s})$ と呼ばれる整数が定まった．これは X の特性数を用いて具体的に書けるもので，$(c_1(\mathfrak{s})^2 - 2\,\chi(X) - 3\mathrm{sign}(X))/4$ で与えられる．($d(\mathfrak{s})$ のゲージ理論的な意味は 3 節で説明する．)

本研究は JSPS 科研費 16J05569 および数物フロンティア・リーディング大学院の助成を受けたものである．

定理 1 (K. [8]). n を非負整数とし，$b^+(X) \geq n+2$ かつ $d(\mathfrak{s}) = -n$ と仮定する．このとき，コホモロジー類

$$\mathbb{SW}(X, \mathfrak{s}) \in H^n(B\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s}); \mathbb{Z}/2)$$

および

$$\mathbb{SW}(X, \mathfrak{s}, \mathcal{O}) \in H^n(B\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s}, \mathcal{O}); \mathbb{Z})$$

を，*Seiberg–Witten* 方程式の n 次元の族を用いて構成できる．

定理 1 の不変量は Seinerg–Witten 不変量の族版である．すなわち，定理 1 において $n=0$ とすると，$\mathbb{SW}(X, \mathfrak{s}, \mathcal{O})$, $\mathbb{SW}(X, \mathfrak{s})$ はそれぞれ通常の Seinerg–Witten 不変量およびその $\bmod 2$ に一致する．

例 1. 定理 1 のコホモロジー類が非自明になるような X の例は存在する．例えば，X が単連結で $\mathfrak{s}$ がスピン構造から来る spin^c 構造の場合 $\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s}) = \mathrm{Diff}^+(X)$ であるが，

$$\mathbb{SW}(K3\#n(S^2 \times S^2), \mathfrak{s}_{\mathrm{spin}}) \neq 0 \text{ in } H^n(B\mathrm{Diff}^+(K3\#n(S^2 \times S^2)); \mathbb{Z}/2)$$

が成立することが確かめられる．ここで $\mathfrak{s}_{\mathrm{spin}}$ は $K3\#n(S^2 \times S^2)$ のスピン構造から来る spin^c 構造である．ここで，$n > 0$ ならば，$K3\#n(S^2 \times S^2)$ に対する従来のゲージ理論的不変量，すなわち Donaldson 不変量や Seiberg–Witten 不変量は消滅している．しかし族に対する不変量は消えていないのである．

定理 1 の証明，すなわち特性類の構成は 4 節で説明する．ここではまず，族のゲージ理論の不変量のひとつの応用例を説明したい．通常のゲージ理論の不変量（Donaldson 不変量・Seiberg–Witten 不変量・Bauer–Furuta 不変量）を用いると，互いに同相であるが微分同相ではない，所謂エキゾチックな 4 次元多様体の 2 対を detect できるのであった．このような現象の族版のひとつの候補として，次のようなものが考えられる．4 次元多様体 X をファイバーとする二つのファイバー束 $X \to E_i \to B$ $(i = 1, 2)$ が与えられたとする．ただし，E_i の構造群 G は X の微分同相群 $\mathrm{Diff}(X)$（あるいはその適当な部分群）とする．このとき，少なくとも論理的には，E_1 と E_2 **が位相的には同型だが滑らかな範疇では同型ではない**可能性がある．より正確には，E_i の構造群を X の同相群 $\mathrm{Homeo}(X)$ に取り替えたとき両者は同型なバンドルだが，G-束としては同型でない可能性がある．そして実際，Ruberman [12] や講演者 [8] の族のゲージ理論の不変量を用いると，そのような現象を detect することができる．（このとき考えている E_i の構造群は，適当な spin^c 構造（の同型類）$\mathfrak{s}$ に対する $\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s})$ である．）族のゲージ理論は，いわば**族としてエキゾチックである**という現象を捉えることができるのである．

ひとつの 4 次元多様体を考えていたときには，「標準的な微分構造」というものは一般には存在しない．しかし，ファイバー束を考えているときは，自明束という標準的な族がある．そこで，上で述べたことの特別な場合として，次のような問いに答えることが，族のゲージ理論の応用の典型的例となると思われる：

問 1. 4 次元多様体をファイバーとするファイバー束であって，位相的には自明だが滑らかな範疇では自明でないものをできるだけ多く見つけよ．

現時点では，Ruberman [12] や講演者の不変量 [8] を用いて detect できているこのような族の例は，S^1 上の族に限る．しかし，族のゲージ理論をさらに拡張することによって，例えばトーラス T^2 上の族であって位相的には自明だが滑らかな範疇では非自明なものを見つけることも可能である．これには Bauer–Furuta 不変量 [2] の族版を用いる必要がある．

注意 1. このような興味深い例を detect するために必要な範疇における族の Bauer–Furuta 不変量の定式化だけであれば，講演者の特性類 [8] 以上の大きな困難はなく理論構成が進む．しかし，期待し得る範囲で可能な限り一般的に定式化を行おうとすると，gerbe と呼ばれるスタックの一種が自然に現れる．これは通常の（すなわちパラメトライズされていない）ゲージ理論には現れないものであり，理論構成自体も興味深い問題となる．

注意 2. 族の Seiberg–Witten 理論を用いて，4 次元多様体の上の正スカラー曲率計量のなす空間のトポロジーを調べることができる．これは Ruberman [14] および K. [7] で行われていたが，定理 1 の特

性類を用いて議論することもできる．$\mathrm{PSC}(X)$ を 4 次元多様体 X 上の正スカラー曲率計量のなす空間とする．定理 1 の状況で $\mathbb{SW}(X,\mathfrak{s}) \neq 0$ が示せてさらに $\mathrm{PSC}(X)$ が空でなければ，$\pi_i(\mathrm{PSC}(X))$ が少なくともひとつの $i \in \{0,\dots,n-1\}$ に対して非自明なこと，特に $\mathrm{PSC}(X)$ が可縮でないことが従う．

3. パラメータ付きモジュライ空間

ここで族のゲージ理論の最も原始的なアイデアを説明する．まず，モジュライ空間の**形式的次元**という概念を定義したい．ゲージ理論において扱われる偏微分方程式（Yang–Mills 反自己双対方程式あるいは Seiberg–Witten 方程式）は，ゲージ群の作用込みで考えると，ある無限次元多様体 $\mathcal{B}$ 上の，ある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ をファイバーとする無限次元のベクトル束 $\mathcal{H} \to \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ の切断

$$s : \mathcal{B} \to \mathcal{E} \tag{1}$$

と見なすことができる．この切断の零点集合 $s^{-1}(0)$ が，方程式の解空間をゲージ群で割ったもの，すなわちモジュライ空間である．ここで，各零点 $x \in s^{-1}(0)$ における s の微分 $ds_x : T_x\mathcal{B} \to \mathcal{H}$ が全射となっている状況を generic ということにする[1]．このとき，（無限次元の）陰関数定理から $s^{-1}(0)$ は多様体になるが，Fredholm 性が，$s^{-1}(0)$ が実は有限次元であることを保証する．

generic な状況において，モジュライ空間の $x \in s^{-1}(0)$ における接空間 $T_x(s^{-1}(0))$ は $\mathrm{Ker}\, ds_x$ に同型で，$\mathrm{Coker}\, ds_x = 0$ だから

$$\dim s^{-1}(0) = \dim \mathrm{Ker}\, ds_x - \dim \mathrm{Coker}\, ds_x \tag{2}$$

である．等式 (2) の左辺は本当は $s^{-1}(0)$ の x の近傍における次元と書くべきであるが，いま考えている状況では実は (2) の右辺は x に依らないのでこのまま書くことにする．等式 (2) の右辺は，Fredholm 作用素 ds_x の（解析的）指数に他ならない．以後 (2) の右辺を $\mathrm{ind}\, s$ と書くことにする．$\mathrm{ind}\, s$ 自体は，s が generic であるか否かに関わらず定義できる．この $\mathrm{ind}\, s$ をモジュライ空間の**形式的次元** と呼ぶ．s が generic であれば，形式的次元は真の次元である．形式的次元は，ゲージ理論の方程式を考察しているトポロジカルな状況だけから定まり，Riemann 計量などの付加データには依らない．そして Atiyah–Singer の指数定理により，特性数を用いて具体的に書くことができる．

ここで特に $\mathrm{ind}\, s < 0$ の場合を考えてみよう．トポロジカルな問題への応用を考える場合には，方程式の摂動で不変な性質を考えるのが普通であるため，genericity は満たされているとしても一般性は失わない．しかし，形式的次元が負である今は，s が generic であれば，$s^{-1}(0)$ は空である．空なモジュライ空間からは何ら情報が得られない．したがって，形式的次元が負である場合には，通常のゲージ理論は無力である．ここで族を考える必要が生じる．B を有限次元の滑らかな多様体とする[2]．B でパラメトライズされた 4 次元多様体 X の連続族，すなわちファイバー束 $X \to E \to B$ が与えられたとしよう．ただし，ゲージ理論を考察するための設定ごと族として与えられたと仮定する．（例えば，$SU(2)$-Yang–Mills 方程式を考察するなら，$SU(2)$ 束 $P \to X$ の族，Seiberg–Witten 方程式を考察するなら，spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ の族が与えられたとする．）ここで付加データ（例えば Riemann 計量）の族をひとつ固定すると，ゲージ理論の方程式が B 上でパラメトライズされた状況が得られる．つまり，無限次元ベクトル束とその切断 (1) が B 上でパラメトライズされた状況，すなわち

$$s = \bigsqcup_{b\in B} s_b : \bigsqcup_{b\in B} \mathcal{B}_b \to \bigsqcup_{b\in B} \mathcal{E}_b$$

が手に入る．パラメトライズされた切断の零点集合 $s^{-1}(0) = \bigsqcup_{b\in B} s_b^{-1}(0)$ を考えよう．これを**パラメータ付きモジュライ空間 (parameterized moduli space)** という．（族として）generic な状況では，$\dim(s^{-1}(0)) = \mathrm{ind}\, s + \dim B$ である．例えば $\dim B = -\mathrm{ind}\, s$ であれば，$s^{-1}(0)$ は generic には 0 次元多様体であり，非空になり得る．形式的次元が負の状況でパラメータ付きモジュライ空間を用いる，というのが族のゲージ理論の基本的なアイデアである．

---

[1]本当は可約解を避けるための genericity も必要だが，それはここでは省略する．

[2]後々この仮定は外す．パラメトライズされた Fredholm 理論を考える際に，パラメータ空間の滑らかさは過剰な仮定であることが，Atiyah–Singer の族の指数の理論 [1] の教えるところである．

4. 特性類の構成

ここでは，3 節で説明したことを基に，講演者 [8] による 4 次元多様体束の特性類の構成を説明する．その構成の手順の最も基本的な部分は次の 2 ステップにまとめられる．

- **ステップ 1:** 非線形な対象（例えば多様体）の上のある関数空間を考える．（非線形な対象の族が与えられた場合には，関数空間の族を考える．）
- **ステップ 2:** 無限次元多様体の上の無限次元ベクトル束 $\mathcal{H} \to \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ が（ある非線形な対象の上の関数空間として）与えられたとする．さらにこの無限次元ベクトル束の Fredholm 切断 $s : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ が与えられたとする．このとき，零点集合 $s^{-1}(0)$ を考える．

関数空間を取ることは，非線形な対象のある種の線形化である．ステップ 2 における零点集合 $s^{-1}(0)$ は $\mathcal{E}$ の Euler 類の "無限次元ベクトル束の Poincaré 双対" に対応する．「線形化をして Euler 類を取る」操作は，Mumford–森田–Miller 類の構成の類似物で，上の 2 ステップはその無限次元化である．

以下特性類の構成の概略を説明する．まず考察する設定を述べる．X を向き付けられた 4 次元閉多様体，$\mathfrak{s}$ をその上の spin^c 構造の同型類とする．n を非負整数とし，$b^+(X) \geq 2$ かつ $d(\mathfrak{s}) = -n$ と仮定する．B を CW 複体とし，$X \to E \to B$ を構造群が $\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s})$ であるようなファイバー束とする．このとき B 上のコホモロジー類 $\mathbb{SW}(E) \in H^n(B; \mathbb{Z}/2)$ を（関手的に）構成することが目標である．特に $E \to B$ として普遍束 $E\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s}) \to B\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s})$ を取って，$\mathbb{SW}(X, \mathfrak{s}) := \mathbb{SW}(E\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s}))$ とおいたものが定理 1 である[3]．まず n-コチェイン $\mathcal{SW}(E, \sigma) \in C^n(B)$，すなわち準同型 $\mathcal{SW}(E, \sigma) : C_n(B) \to \mathbb{Z}/2$ を定義したい．ここで $C_n(B)$ は $\mathbb{Z}/2$ 係数の胞体チェイン群であり，σ は Seiberg–Witten 方程式を書き下すために必要な非トポロジカルなデータ（摂動の族）である．基本的な（しかしこのままでは不正確な）なアイデアは，生成元 $e \in C_n(B)$ に対して

$$\mathcal{SW}(E, \sigma)(e) := \#(\text{the parameterized moduli space on } e \text{ with respect to } \sigma) \tag{3}$$

と定義する，というものである．$d(\mathfrak{s}) = -n$ かつ $\dim e = n$ なことから，(3) の右辺の中身すなわち e 上のパラメータ付きモジュライ空間は，ゼロ次元の多様体になっていると期待される．さらに，Seiberg–Witten のモジュライのコンパクト性から，これは有限個の点であり，数え上げることができると期待できる．後は $\mathcal{SW}(E, \sigma)$ がコサイクルになっていることを証明し，コホモロジー類 $\mathbb{SW}(E) := [\mathcal{SW}(E, \sigma)]$ が付加データ σ の取り方に依らないと示せばよい．

しかし，(3) の右辺はこのままでは全く意味を持たない．問題点は以下の二つである．第一に，我々の構造群 $\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s})$ は spin^c 4 次元多様体の自己同型群**ではない**ということである．なぜならば，$\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s})$ はあくまで spin^c 構造の同型類 $\mathfrak{s}$ を保つ微分同相全体に過ぎず，spin^c 構造に対応する主 $Spin^c(4)$ 束に作用していないからである．したがって，E の各ファイバーには，spin^c 構造の同型類は付与されているが，spin^c 構造そのものは付与されていない．Seiberg–Witten 方程式を書き下すには spin^c 構造の同型類だけでなく spin^c 構造そのものが必要であるから，Seiberg–Witten 方程式の族を n 胞体 e 上で考え，そこからパラメータ付きモジュライ空間を定義することはアプリオリにはできない．第二の問題点は，B は多様体とは限らない一般の CW 複体 (例えば分類空間 $B\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s})$) であったことに起因する．$B$ が多様体でない場合，パラメータ付きモジュライ空間が多様体の構造を持つと期待する理由は何もない．したがって数え上げをどう定義するかは不分明である．

以上の問題点は以下のように解消される．ひとつめの問題点を解消するには，中村信裕 [10] のトリックを用いる．s を $\mathfrak{s}$ のひとつの代表元とし，$\mathrm{Aut}(X, s)$ を (X, s) の自己同型群としたとき，

$$1 \to \mathscr{G} \to \mathrm{Aut}(X, s) \to \mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s}) \to 1$$

という完全系列を得る．ここで $\mathscr{G}$ はゲージ群である．我々の問題は，E の変換関数が $\mathrm{Aut}(X, s)$ でなく $\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s})$ に値を取っていることだった．そこで，B 上の十分細かい開被覆を取り，E の変換関数を $\mathrm{Aut}(X, s)$ にまで持ち上げる．持ち上げたものはもはやコサイクル条件を満たしていないが，満たしていない具合を表す誤差はゲージ群 $\mathscr{G}$ に値を持つ．そこで，モジュライ空間のようにゲージ群で

[3] E の構造群が $\mathrm{Diff}(X, \mathfrak{s}, \mathcal{O})$ にまで簡約しているときは整係数の $\mathbb{SW}(E) \in H^n(B; \mathbb{Z})$ を対応させることが目標となるが，議論はほぼ同様に進むので以下 $\mathbb{Z}/2$ 係数で考える．

割って得られる対象を B 上で考察する限り，その誤差はゲージ群で割るときに吸収される．したがって，パラメータ付きモジュライ空間は B 上で大域的に定義ができる．

ふたつめの問題を解決するには，仮想近傍（virtual neighborhood）の理論の族版を構成し，それを用いる．所謂 virtual technique は，シンプレクティック幾何学において多くの人々が研究してきたが，ゲージ理論の文脈にそれを持ち込んだのは Ruan [11] である．まずパラメータ付きで無い場合に，仮想近傍のアイデアを説明する．モジュライのコンパクト性を用いると，Seiberg–Witten 方程式に対応する Fredholm 切断 $s : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ の "有限次元近似" を行うことができ，自明束の切断 $\bar{s} : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \times \mathbb{R}^N$ $(N < \infty)$ が得られる．ここで $\mathcal{U}$（これが仮想近傍と呼ばれる）は有限次元多様体で，$\bar{s}^{-1}(0)$ は $s^{-1}(0)$ と "同型" となるようなものである．$\bar{s}$ に関する相対 Euler 類，すなわち $\bar{s}$ による Thom 類の引き戻し

$$e(\mathcal{U}, \bar{s}) := \bar{s}^* \tau(\mathcal{U} \times \mathbb{R}^N \to \mathcal{U}) \in H_c^N(\mathcal{U})$$

を考える．（$s^{-1}(0)$ のコンパクト性から，$e(\mathcal{U}, \bar{s})$ はコンパクト台のコホモロジー類となることが確かめられる．）これは，"無限次元ベクトル束 $\mathcal{E} \to \mathcal{B}$ の Euler 類" の有限次元近似による実現である．横断正則性が確保され $\bar{s}^{-1}(0) \cong s^{-1}(0)$ が多様体のときであれば，基本類 $[\bar{s}^{-1}(0)]$ の Poincaré 双対にあたるものが $e(\mathcal{U}, \bar{s})$ であり，モジュライの数え上げ $\#s^{-1}(0)$ に相当するものがペアリング $\langle e(\mathcal{U}, \bar{s}), [\mathcal{U}]_{BM} \rangle \in \mathbb{Z}/2$ or $\mathbb{Z}$ である．($\mathcal{U}$ は一般には非コンパクトなので，Borel–Moore の意味での基本類を取ってある．）ここで重要なことは，基本類 $[\bar{s}^{-1}(0)]$ を定義するためには横断正則性が必要であるが，コホモロジー類 $e(\mathcal{U}, \bar{s})$ の定義には横断正則性は何ら必要ないということである．そこで，パラメータ空間 B が滑らかな構造を持っていない場合でも，$e(\mathcal{U}, \bar{s})$ のパラメータ付き版を考えることはできる．これを用いてパラメータ付きモジュライ空間の数え上げに相当する数を取り出し，(3) の右辺をその数に置き換える．これが $\mathcal{SW}(E, \sigma)$ の正しい定義であり，このようにすると期待していた理論構成が全て上手く進むことが証明できる．以上が $\mathbb{SW}(E)$ の構成の骨子である．

References

[1] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators. IV*, Ann. of Math. (2) **93** (1971), 119–138.

[2] Stefan Bauer and Mikio Furuta, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. I*, Invent. Math. **155** (2004), no. 1, 1–19.

[3] S. K. Donaldson, *Yang-Mills invariants of four-manifolds*, Geometry of low-dimensional manifolds, 1, (Durham, 1989), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 150, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, 5–40.

[4] S. K. Donaldson, *The Seiberg-Witten equations and* 4*-manifold topology*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **33** (1996), no. 1, 45–70.

[5] Hokuto Konno, *Bounds on genus and configurations of embedded surfaces in 4-manifolds*, J. Topol. **9** (2016), no. 4, 1130–1152.

[6] Hokuto Konno, *A cohomological Seiberg-Witten invariant emerging from the adjunction inequality*, arXiv:1704.05859.

[7] Hokuto Konno, *Positive scalar curvature and higher-dimensional families of Seiberg-Witten equations*, arXiv:1707.08974.

[8] Hokuto Konno, *Characteristic classes via 4-dimensional gauge theory*, arxiv:1803.09833.

[9] Tian-Jun Li and Ai-Ko Liu, *Family Seiberg-Witten invariants and wall crossing formulas*, Comm. Anal. Geom. **9** (2001), no. 4, 777–823.

[10] Nobuhiro Nakamura, *The Seiberg-Witten equations for families and diffeomorphisms of 4-manifolds*, Asian J. Math. **7** (2003), no. 1, 133–138.

[11] Yongbin Ruan, *Virtual neighborhoods and the monopole equations, Topics in symplectic 4- manifolds* (Irvine, CA, 1996), First Int. Press Lect. Ser., I, Int. Press, Cambridge, MA, 1998, pp. 101–116.

[12] Daniel Ruberman, *An obstruction to smooth isotopy in dimension* 4, Math. Res. Lett. **5** (1998), no. 6, 743–758.

[13] Daniel Ruberman, *A polynomial invariant of diffeomorphisms of 4-manifolds*, Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998), Geom. Topol. Monogr., vol. 2, pp. 473–488.

[14] Daniel Ruberman, *Positive scalar curvature, diffeomorphisms and the Seiberg-Witten invariants*, Geom. Topol. **5** (2001), 895–924.