

HIGH-DIMENSIONAL WALL CROSSING AND GLUING IN SEIBERG-WITTEN THEORY

今野 北斗 (東京大学大学院数理科学研究科)

CONTENTS

1. Seiberg-Witten 理論と adjunction 不等式	1
2. Complex of surfaces violating the adjunction inequalities	2
3. 主定理	2
4. 主定理の証明：高次元の wall crossing および gluing	3
References	4

1. SEIBERG-WITTEN 理論と ADJUNCTION 不等式

本講演では、4次元多様体に埋め込まれた曲面の配位を総体的に考え、Seiberg-Witten 理論を用いることで、4次元多様体の新しい不変量を導入する。これを用いて、曲面の配位に対する新たな制約を与える。

まず背景を説明する。4次元多様体 X の整係数2次ホモロジー類 $\alpha \in H_2(X; \mathbb{Z})$ および滑らかに埋め込まれた曲面 $\Sigma \hookrightarrow X$ が $[\Sigma] = \alpha$ を満たすとする。このとき Σ の種数 $g(\Sigma)$ に、 α の言葉で書けるような式で下からの評価を与えよ、という問いは4次元トポロジーのもっとも古典的な問題のひとつである。ゲージ理論は、この問題に対し極めて有効に使われてきた。ゲージ理論、特に Seiberg-Witten 理論を用いた最も代表的な結果は Kronheimer-Mrowka による次の定理 1.1 である。以下、曲面は全て向き付けられた連結な閉曲面とする。向き付けられた4次元閉多様体 X に対し、その交叉形式の正の固有値の個数を $b^+(X)$ と書くことにする。

定理 1.1. (Kronheimer-Mrowka [4]) X を $b^+(X) \geq 2$ なる向き付けられた4次元閉多様体、 $\Sigma \hookrightarrow X$ を $[\Sigma]^2 \geq 0$ なる埋め込まれた曲面とする。 $\mathfrak{s}$ を X 上の spin^c 構造とし、Seiberg-Witten 不変量 $\text{SW}_X(\mathfrak{s})$ が非自明であると仮定する。このとき、不等式

$$\max\{-\chi(\Sigma), 0\} \geq |c_1(\mathfrak{s}) \cdot [\Sigma]| + [\Sigma]^2$$

が成立する。ここで $\chi(\Sigma)$ は Σ の Euler 数 $2g(\Sigma) - 2$ である。

定理 1.1 のような種数に対する不等式はしばしば **adjunction 不等式** と呼ばれる。しかし、Seiberg-Witten 不変量が消えているような4次元多様体は非常に沢山存在する。例えば、 X_i ($i = 1, 2$) を $b^+(X_i) \geq 1$ なる向き付けられた閉4次元多様体とすると、 $X_1 \# X_2$ 上の任意の spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ に対し $\text{SW}_{X_1 \# X_2}(\mathfrak{s}) = 0$ となってしまう。このような多様体に対しては定理 1.1 を使って種数の評価を考察することはできない。さらに、Nouh [7] は、 $\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2$ に対し、adjunction 不等式を破る曲面を無限個のホモロジー類に対して構成している。すなわち、もはや無条件では adjunction 不等式の成立を期待することはできない。そこで目標を、 Σ に対する条件を厳しくし、その条件下で adjunction 不等式を証明するというように問題を一般化することが考えられる。具体的には、 $[\Sigma]$ が与えられたホモロジー類に一致するということに加え、あらかじめ他にも曲面を与えておき、それと Σ とは交わらないという幾何学的な条件を課すことが考えられる。すなわち、ひとつの曲面のみを考えるのではなく、

4次元多様体内の曲面の配位を考察の対象とする。この方面の結果として, Strle [11] によるものと筆者 [3] によるものがある。本講演では, adjunction 不等式を破る曲面を総体的に考えることで, 曲面配位に対する新しい制約を与える。

2. COMPLEX OF SURFACES VIOLATING THE ADJUNCTION INEQUALITIES

与えられた spin^c 4次元多様体の Seiberg-Witten 不変量が自明である場合, §1 で述べたように adjunction 不等式を破る曲面が存在する可能性がある。これらの配位を総体的に考察したい。特に, 曲面たちが交わっているか交わっていないかの情報を, 単体的複体として記述することが有用である。まずその容れ物となる対象が次のものであり, この定義は古田幹雄氏による。

定義 2.1. (*Furuta*) X を向き付けられた4次元閉多様体とする。このとき, (抽象的) 単体複体 $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X)$ を以下のように定義する。まず頂点の集合 $V(\mathcal{K})$ は自己交叉数がゼロの滑らかに埋め込まれた曲面の全体とする。すなわち $V(\mathcal{K}) := \{ \Sigma \hookrightarrow X \mid [\Sigma]^2 = 0 \}$ 。以下 $(\Sigma \hookrightarrow X) \in V(\mathcal{K})$ を単に Σ と略記する。そして $k \geq 1$ に対し, $(k+1)$ 個の頂点の集合 $\Sigma_0, \dots, \Sigma_k \in V(\mathcal{K})$ が k -単体を張ることを, $\Sigma_0, \dots, \Sigma_k$ のいずれの2つも互いに交わらないこととして定義する。 $\mathcal{K}(X)$ を X の *complex of surfaces*¹ と呼ぶことにする。

次に, adjunction 不等式を破る曲面全てからなる単体複体を考える。

定義 2.2. $(K.)$ $\mathfrak{s}$ を X 上の spin^c 構造とする。ここで, *complex of surfaces violating the adjunction inequality* $\mathcal{K}_V = \mathcal{K}_V(X, \mathfrak{s})$ を, 頂点の集合を

$$V(\mathcal{K}_V) := \{ \Sigma \in V(\mathcal{K}) \mid \max\{-\chi(\Sigma), 0\} < |c_1(\mathfrak{s}) \cdot [\Sigma]| \}$$

として得られる $\mathcal{K}(X)$ の部分複体として定義する。ただし単体複体の構造は, $\Sigma_0, \dots, \Sigma_k \in V(\mathcal{K}_V)$ が k -単体を張ることを, $\Sigma_0, \dots, \Sigma_k$ が $\mathcal{K}$ において k -単体を張ることと定める。

$\mathcal{K}$ や $\mathcal{K}_V$ には弱位相で帰納的に位相を入れる。これらは頂点の集合が非可算無限個ある巨大な空間であるが, 応用上興味深いものであることが分かった。それが次に紹介する主定理である。

3. 主定理

向き付けられた閉4次元多様体 X 上の spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ に対し, $d(\mathfrak{s}) := (c_1(\mathfrak{s})^2 - 2\chi(X) - 3\text{sign}(X))/4$ とおく。(これは Seiberg-Witten 方程式の解のモジュライ空間の形式的次元と呼ばれる。) 次の定理が主結果である。

定理 3.1. $(K.)$ Z を $b^+(Z) \geq 2$ なる向き付けられた閉4次元多様体とし, $\mathfrak{s}_Z$ をその上の spin^c 構造とする。 $\text{SW}_Z(\mathfrak{s}_Z) \neq 0$ および $d(\mathfrak{s}_Z) = 0$ と仮定する。

$$\begin{aligned} X &:= Z \# m\mathbb{CP}^2 \# n(-\mathbb{CP}^2) = Z \# (\#_{p=1}^m \mathbb{CP}_p^2) \# (\#_{q=1}^n (-\mathbb{CP}_q^2)) \quad (m \geq 1, n \geq 4m), \\ \mathfrak{s} &:= \mathfrak{s}_Z \# (\#_{p=1}^m \mathfrak{s}_p^+) \# (\#_{q=1}^n \mathfrak{s}_q^-) \end{aligned}$$

とおく。ただし, $\mathfrak{s}_p^+, \mathfrak{s}_q^-$ はそれぞれ $c_1(\mathfrak{s}_p^+), c_1(\mathfrak{s}_q^-)$ が $H_2(\mathbb{CP}_p^2; \mathbb{Z}), H_2(-\mathbb{CP}_q^2; \mathbb{Z})$ の生成元となるような spin^c 構造とする。このとき

$$H_{m-1}(\mathcal{K}_V(X, \mathfrak{s}); \mathbb{Z}) \neq 0$$

が成立する。

¹complex of surfaces は 2次元トポロジーにおける Harvey [2] の complex of curves の4次元のアナロジーであるが, ここでは, complex of surfaces の定義においては曲面のアイソトピー類ではなく曲面そのものを頂点に採用することにする。

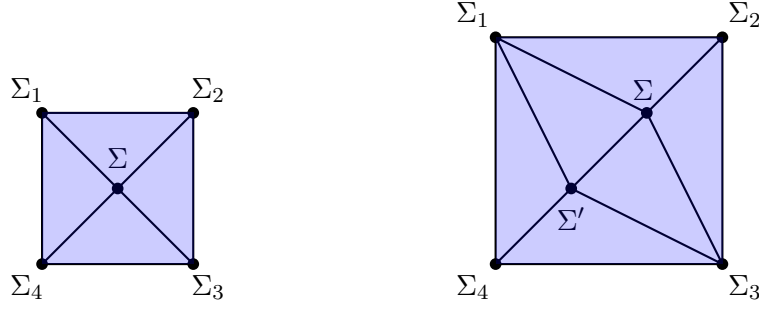


FIGURE 1. Some boundings for γ

実際にはより詳しく, $H_{m-1}(\mathcal{K}_V(X, \mathfrak{s}); \mathbb{Z})$ の非自明な元を具体的に与えることができる.

ここで, なぜ $H_*(\mathcal{K}_V(X, \mathfrak{s}); \mathbb{Z})$ の非自明な元が得られると興味深いかを説明する. 例えば, $\Sigma_1, \dots, \Sigma_4 \in V(\mathcal{K}_V)$ が $\Sigma_i \cap \Sigma_{i+1} = \emptyset$ ($i \in \mathbb{Z}/4$) を満たしているとする. $\mathcal{K}_V$ の 1-サイクル

$$\gamma = \langle \Sigma_1, \Sigma_2 \rangle + \dots + \langle \Sigma_4, \Sigma_1 \rangle$$

のホモロジー類 $[\gamma]$ が $H_1(\mathcal{K}_V; \mathbb{Z})$ で非自明であると仮定する. このとき, $\Sigma \cap \Sigma_i = \emptyset$ ($i \in \mathbb{Z}/4$) なる $\Sigma \in V(\mathcal{K})$ に対し, $\{\langle \Sigma, \Sigma_i, \Sigma_{i+1} \rangle\}_{i \in \mathbb{Z}/4}$ はこの 1-サイクルの “錐” のような 2-サイクルを与える. (図 1 を見よ.) もしも $\Sigma \in V(\mathcal{K}_V)$ ならこの “錐” は $\mathcal{K}_V$ に入るため $[\gamma] = 0$ in $H_1(\mathcal{K}_V; \mathbb{Z})$ となって我々の仮定に矛盾するから, $\Sigma \notin V(\mathcal{K}_V)$ となる. すなわち, $\Sigma \cap \Sigma_i = \emptyset$ ($i \in \mathbb{Z}/4$) なる曲面 Σ に対する adjunction 不等式が得られる. (これは, $\bigcup_i \Sigma_i$ の近傍を X から除いた開多様体の中に埋め込まれた曲面に対し adjunction 不等式が成立することと同値である.)

定理 3.1 の多様体 X は, その上の任意の spin^c 構造に関して Seiberg-Witten 不変量は消えており, Seiberg-Witten 不変量の精密化である Bauer-Furuta 不変量が消えているような多様体のクラスも含む. このような多様体に対する adjunction 不等式の導出は, 講演者が知る限り Strle [11] の結果および講演者の [3] 以外にはなく, かつ定理 3.1 の結果はこれらには含まれない.

同様の議論で, 例えば $\Sigma, \Sigma' \in V(\mathcal{K})$ が

$$\Sigma \cap \Sigma_i = \emptyset \ (i = 1, 2, 3), \ \Sigma' \cap \Sigma_i = \emptyset \ (i = 1, 3, 4), \ \Sigma \cap \Sigma' = \emptyset,$$

を満たしていれば, Σ あるいは Σ' の少なくとも一方に対しては adjunction 不等式が成立することが分かる. (図 1 を見よ.) このように, γ が $\mathcal{K}$ 内で bound するチェーンを任意にとると, そのチェーンを構成している曲面たちの少なくともひとつに対しては adjunction 不等式が得られる. 以上の議論で, ひとたび $H_*(\mathcal{K}_V; \mathbb{Z})$ の非自明な元が見つかり, 無限個の曲面配位に対する種数の制限が得られることになる.

4. 主定理の証明：高次元の WALL CROSSING および GLUING

定理 3.1 の証明, すなわち $\mathcal{K}_V$ の非自明なホモロジー類が detect できることの証明は次の 2 つのパートからなる.

- (i): 一般に, spin^c 4 次元閉多様体 $(X, \mathfrak{s})$ に対し, コホモロジー類 $\text{SW}^{\text{coh}}(X, \mathfrak{s}) \in H^*(\mathcal{K}_V(X, \mathfrak{s}); \mathbb{Z})$ を構成する.
- (ii): 定理 3.1 の状況で, $H_{m-1}(\mathcal{K}_V(X, \mathfrak{s}); \mathbb{Z})$ のある元に対し, その $\text{SW}^{\text{coh}}(X, \mathfrak{s})$ による evaluation が非自明であることを証明する.

(i) について: コホモロジー類 $\text{SW}^{\text{coh}}(X, \mathfrak{s}) \in H^*(\mathcal{K}_V(X, \mathfrak{s}); \mathbb{Z})$ は Seiberg-Witten 方程式の族を用いて構成される. 形式的次元 $d(\mathfrak{s})$ が非負のときは $\text{SW}^{\text{coh}}(X, \mathfrak{s}) = 0$ と定義する. 意味のある場合は $d(\mathfrak{s})$ が負の場合である. $d(\mathfrak{s}) = -(k+1)$ ($k \geq 0$) とすると, 次数が k のコホモロジー類が構成できる. 以下に構成の概略を述べる.

- (1) X の Riemann 計量 g_0 を固定する. $\mathcal{K}_V$ の向き付けられた k -単体 $\langle \sigma \rangle = \langle \Sigma_0, \dots, \Sigma_k \rangle$ に対し, “ $\Sigma_0, \dots, \Sigma_k$ の近傍を g_0 から引き伸ばす” ことにより得られる計量の族を考える. $\Sigma_0, \dots, \Sigma_k$ はどの 2 つも互いに交わらないから, それぞれの曲面の近傍を独立に引き伸ばすことができ, この構成で Riemann 計量からなる $(k+1)$ -パラメータの族を得る. (この計量の族の構成は Frøyshov [1] で用いられたものである.) これは, g_0 を頂点とする σ の錐の形, すなわち $(k+1)$ 次元の標準単体の形の族である. この族によるパラメータ付けられた Seiberg-Witten 方程式のモジュライ空間の形式的次元は $d(\mathfrak{s}) + (k+1) = 0$ となることに注意する.
- (2) Kronheimer-Mrowka [4] で行われた解析 (の定量的に考察) から, $\Sigma_0, \dots, \Sigma_k$ の少なくともひとつを十分引き伸ばしておく, その計量に対しては Seiberg-Witten 方程式のモジュライ空間は空であると分かる. さらに, 初期計量 g_0 や, k 個以下の曲面の引き伸ばしの途中の計量の族のような次元の低い族の上では, パラメータ付けられたモジュライの形式的次元が負なので, 摂動するとその上でもモジュライは空である. 以上の議論で, パラメータ空間である “ σ の錐” の境界上ではモジュライが空であるという状況が手に入る.
- (3) このことと Seiberg-Witten 方程式のモジュライのコンパクト性を合わせると, 適当な摂動の議論でこのパラメータ付けられたモジュライ空間の数え上げで整数²が得られる.
- (4) 以上で, $\mathcal{K}_V$ の向き付けられた k -単体 $\langle \sigma \rangle = \langle \Sigma_0, \dots, \Sigma_k \rangle$ に整数を対応させることができたので, $\mathcal{K}_V$ 上の k -コチェインを得た. これがさらにコサイクルになることと, 初期計量や摂動などのデータの取り替えによる差がコバウンダリーに吸収できることが, コボルディズムの議論で確かめられる. (この議論の最中に再び Kronheimer-Mrowka [4] の解析の結果を用いる.) これによりコホモロジー類 $\text{SW}^{\text{coh}}(X, \mathfrak{s}) \in H^k(\mathcal{K}_V(X, \mathfrak{s}); \mathbb{Z})$ を得る.

(ii) について: この部分は高次元の wall crossing と gluing を用いることにより証明され, 最も非自明な部分である.

Seiberg-Witten 理論における wall crossing とは, 通常 $b^+ = 1$ の場合に, 計量の適当な 1-パラメータ族に対しパラメータ付けられたモジュライ空間の特異点 (可約解) が検出される現象を指す. [3] において, 講演者は高次元の wall crossing, すなわち一般の $b^+ \geq 1$ なる 4 次元多様体に対する wall crossing を, 埋め込まれた曲面の言葉で捉える研究を行った. (高次元の wall crossing という現象自体は, Li-Liu [5] や中村信裕 [6] の研究がある.)

一方, Ruberman ([8], [9], [10]) は, 通常の (つまり $b^+ = 1$ のときの) wall crossing と gluing と呼ばれるテクニックを合わせる研究を行った. gluing はゲージ理論における深い解析的ツールであり, ひとつの典型的な応用はブローアップ公式, すなわち 4 次元多様体のブローアップに対する Seiberg-Witten 不変量や Donaldson 不変量の振る舞いを記述する公式の証明である. Ruberman による議論は, ブローアップ公式の証明に近い議論を, wall crossing に用いる 1-パラメータ族に対して考察したものである. この議論は高次元の族への一般化が可能であり, 前述の高次元の wall crossing と合わせることで, あるパラメータ付けられたモジュライ空間の数え上げが非自明なことを証明できる.

コホモロジー類 $\text{SW}^{\text{coh}}(X, \mathfrak{s})$ を $\mathcal{K}_V$ のあるホモロジー類で evaluate することは, あるパラメータ付けられたモジュライ空間の数え上げを行うことに他ならない. (ホモロジー類を与えることは, どの曲面たちの引き伸ばしからなる族上のモジュライを数え上げるかを指定することにあたる.) ホモロジー類を適切に選ぶことで, モジュライの数え上げが非自明になるような族を指定することができ, これにより evaluation の非自明性が導出される.

REFERENCES

- [1] Kim A. Frøyshov, *An inequality for the h-invariant in instanton Floer theory*, *Topology* **43** (2004), no. 2, 407–432, DOI 10.1016/S0040-9383(03)00049-1. MR2052970 (2005c:57043)

²数え上げで $\mathbb{Z}/2$ でなく $\mathbb{Z}$ の元を得るには, X の homology orientation を固定し, $\langle \sigma \rangle$ の向きを合わせることでパラメータ付けられたモジュライ空間に向きが入ることを用いる.

- [2] W. J. Harvey, *Boundary structure of the modular group*, Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978), Ann. of Math. Stud., vol. 97, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981, pp. 245–251. MR624817
- [3] H. Konno, *Bounds on genus and configurations of embedded surfaces in 4-manifolds*, to appear in the Journal of Topology, available at [arXiv:1507.00139](https://arxiv.org/abs/1507.00139).
- [4] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 6, 797–808, DOI 10.4310/MRL.1994.v1.n6.a14. MR1306022 (96a:57073)
- [5] Tian-Jun Li and Ai-Ko Liu, *Family Seiberg-Witten invariants and wall crossing formulas*, Comm. Anal. Geom. **9** (2001), no. 4, 777–823. MR1868921 (2002k:57074)
- [6] Nobuhiro Nakamura, *The Seiberg-Witten equations for families and diffeomorphisms of 4-manifolds*, Asian J. Math. **7** (2003), no. 1, 133–138. MR2015245 (2004h:57037)
- [7] Mohamed Ait Nouh, *The minimal genus problem in $\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2$* , Algebr. Geom. Topol. **14** (2014), no. 2, 671–686, DOI 10.2140/agt.2014.14.671. MR3159966
- [8] Daniel Ruberman, *An obstruction to smooth isotopy in dimension 4*, Math. Res. Lett. **5** (1998), no. 6, 743–758, DOI 10.4310/MRL.1998.v5.n6.a5. MR1671187 (2000c:57061)
- [9] ———, *A polynomial invariant of diffeomorphisms of 4-manifolds*, Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998), Geom. Topol. Monogr., vol. 2, Geom. Topol. Publ., Coventry, 1999, pp. 473–488 (electronic), DOI 10.2140/gtm.1999.2.473. MR1734421 (2001b:57073)
- [10] ———, *Positive scalar curvature, diffeomorphisms and the Seiberg-Witten invariants*, Geom. Topol. **5** (2001), 895–924 (electronic), DOI 10.2140/gt.2001.5.895. MR1874146 (2002k:57076)
- [11] Sašo Strle, *Bounds on genus and geometric intersections from cylindrical end moduli spaces*, J. Differential Geom. **65** (2003), no. 3, 469–511. MR2064429 (2005c:57042)

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA, MEGURO, TOKYO 153-8914, JAPAN

E-mail address: hkonno@ms.u-tokyo.ac.jp