



数学×宇宙
～トポロジーで読み解く時空のかたち～

河野俊丈

東京大学大学院数理科学研究科, Kavli IPMU

2018年12月19日

東京ガーデンテラス紀尾井町 数学セミナー

この講演のテーマ

- (1) 私たちがすんでいる空間は平坦なのか、曲がっているのか？
- (2) 非ユークリッド幾何学の発見は、私たちの空間認識に何をもたらしたか？
- (3) 空間が曲がっているとはどういうことか。それは空間の中にも認識できるのか？
- (4) 一様に広がった空間は全体として、どのようなかたちになりうるのか？ 最新の幾何学の成果から何が分かるか。
- (5) 超弦理論などの先端的な素粒子論はどのような時空のかたちを示唆するか？

古代ギリシャでは大地が球形であることは広く認識されていた



2018年1月31日の皆既月食

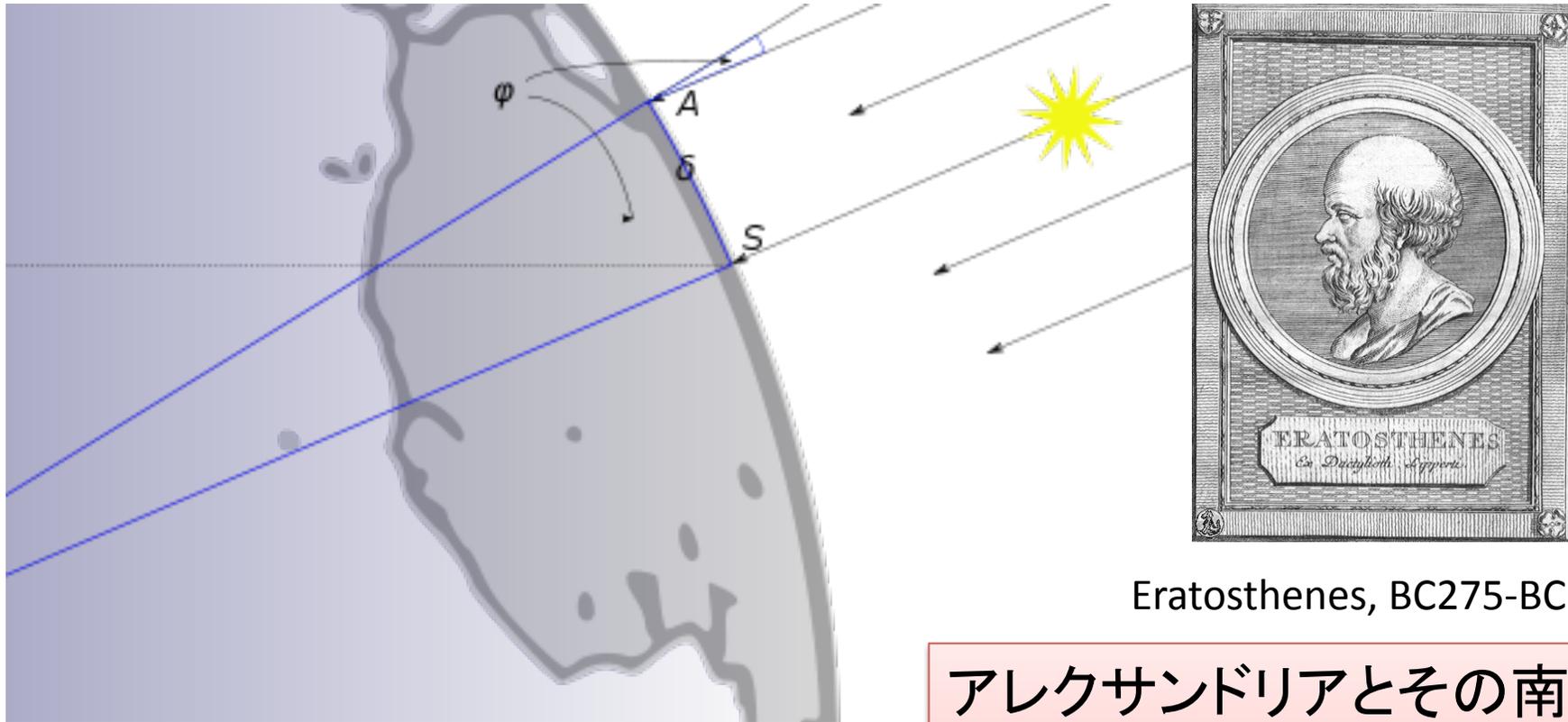
© T. Kohno

月食の連続写真から地球の影を見ることができる



© Tanikawa Plan-net

エラトステネスによる地球の大きさの測定



Eratosthenes, BC275-BC194

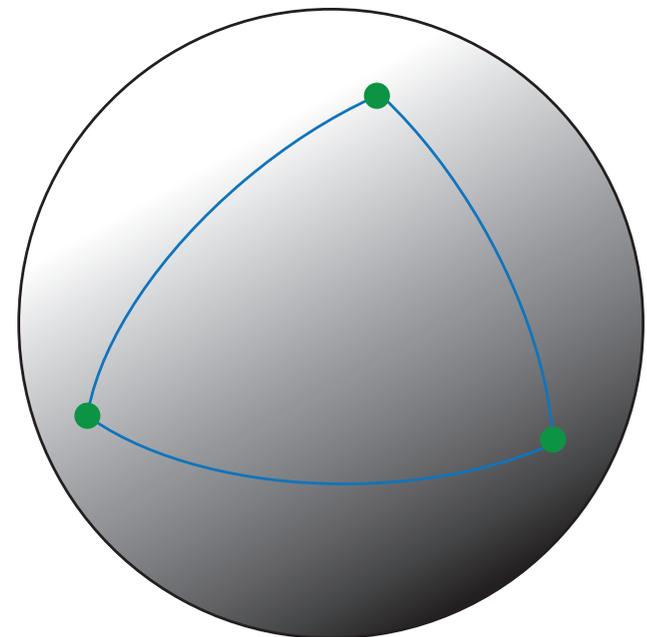
アレクサンドリアとその南にあるシエネでの南中時の太陽の高度差から地球の大きさを求めた。

地球の外からの視点を使わないで地球が球形であることをどのように認識できるか？



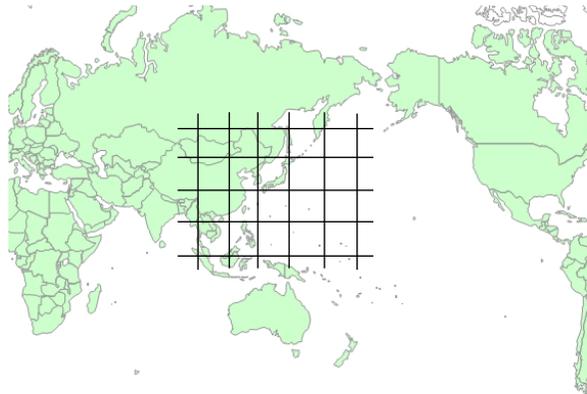
飛行機の航路は球の大円（測地線）

大円で囲まれた三角形（測地三角形）の内角の和は180度よりも大きい。



地球上で距離を測るためには、地図に表したときの縮尺（それぞれの点で縦方向，横方向の縮小率と両者の角度の3つの情報が必要）これを「計量」とよぶ。

計量とは各点で内積を与えること



内積の基本性質

地図に座標を導入する.

座標についての基本ベクトルの内積を
実際の長さを表すように定める.

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = g_{ij}, \quad i, j = 1, 2$$

内積 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$

\mathbf{a}, \mathbf{b} について双線型かつ対称

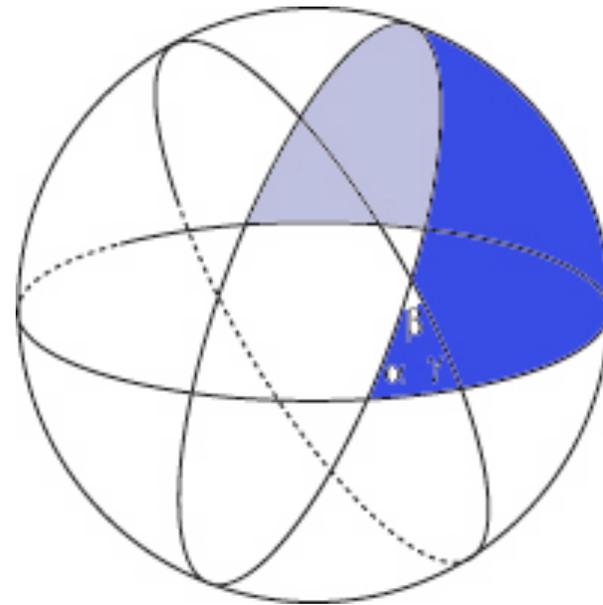
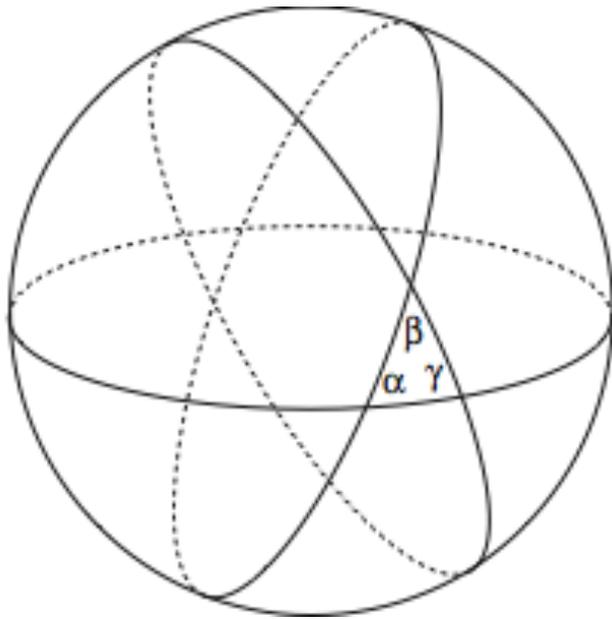
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0,$$

等号は $\mathbf{a} = 0$

$$g_{11}, g_{22}, g_{12}$$

を地図上の関数
とみなす.

球面3角形



球面三角形の面積

$$A = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

右の青く塗った部分の面積は 2α

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

角度は弧度法で表示する.

$$360^\circ = 2\pi$$

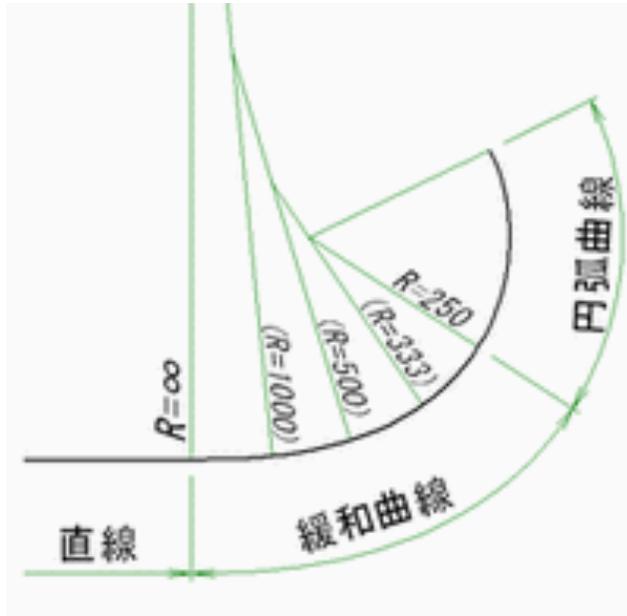
$$180^\circ = \pi$$

曲線の曲率とは？

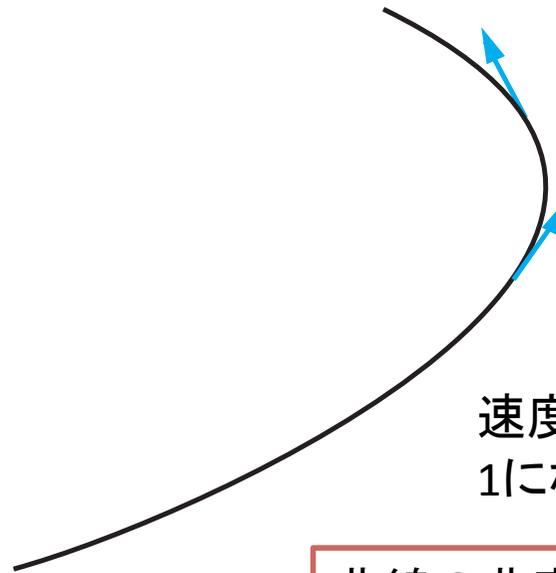
$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

速度ベクトル

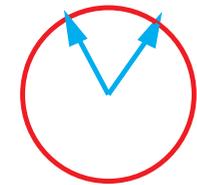
$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$



線路の曲がり具合は曲率半径Rで表される



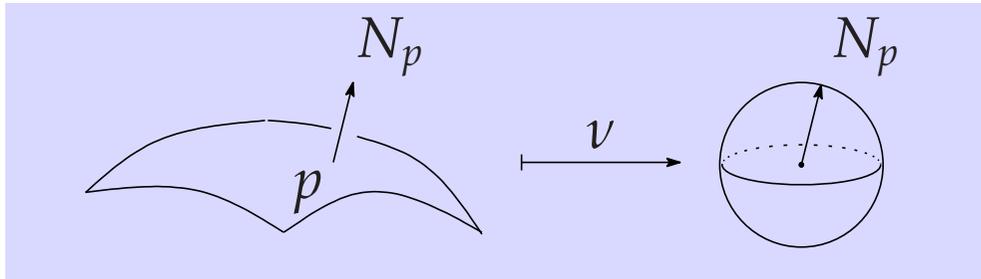
速度ベクトルの大きさが1になるようにパラメータ表示



曲線の曲率は長さ1の青い矢印の始点の移動距離と右の円上の終点の移動距離の比

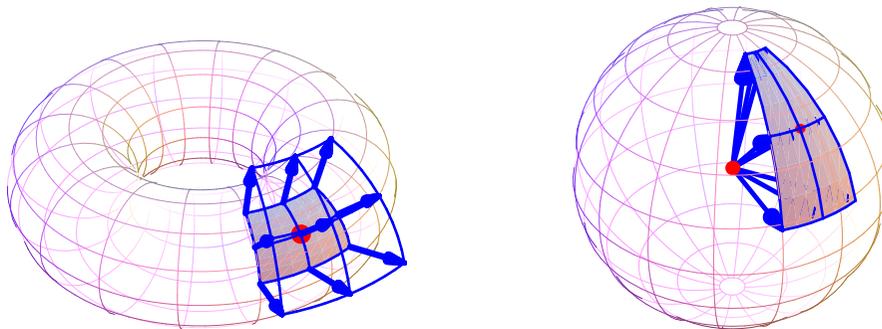
半径Rの円の曲率Kは逆数 $1/R$

曲面のガウス曲率

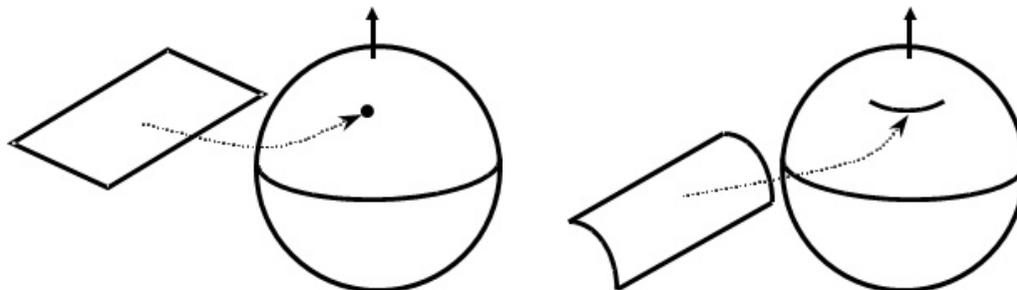


ガウス写像

曲面に垂直で長さ1のベクトルによって球面への写像を構成.



ガウス写像によってうつされる部分の面積比がガウス曲率.
向きが逆になるときは負号をつける.

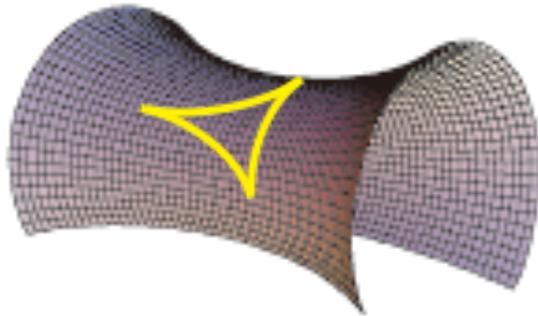


平面の曲率は0

平面をまるめても
曲率は0

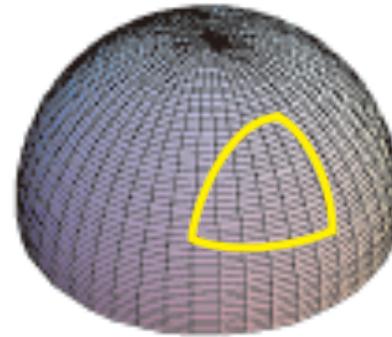
ガウス曲率と3角形の内角の和

3角形の内角の和 < 180度

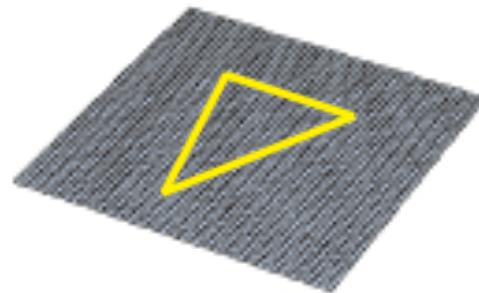


$$K < 0$$

3角形の内角の和 > 180度



$$K > 0$$



$$K = 0$$

3角形の内角の和 = 180度



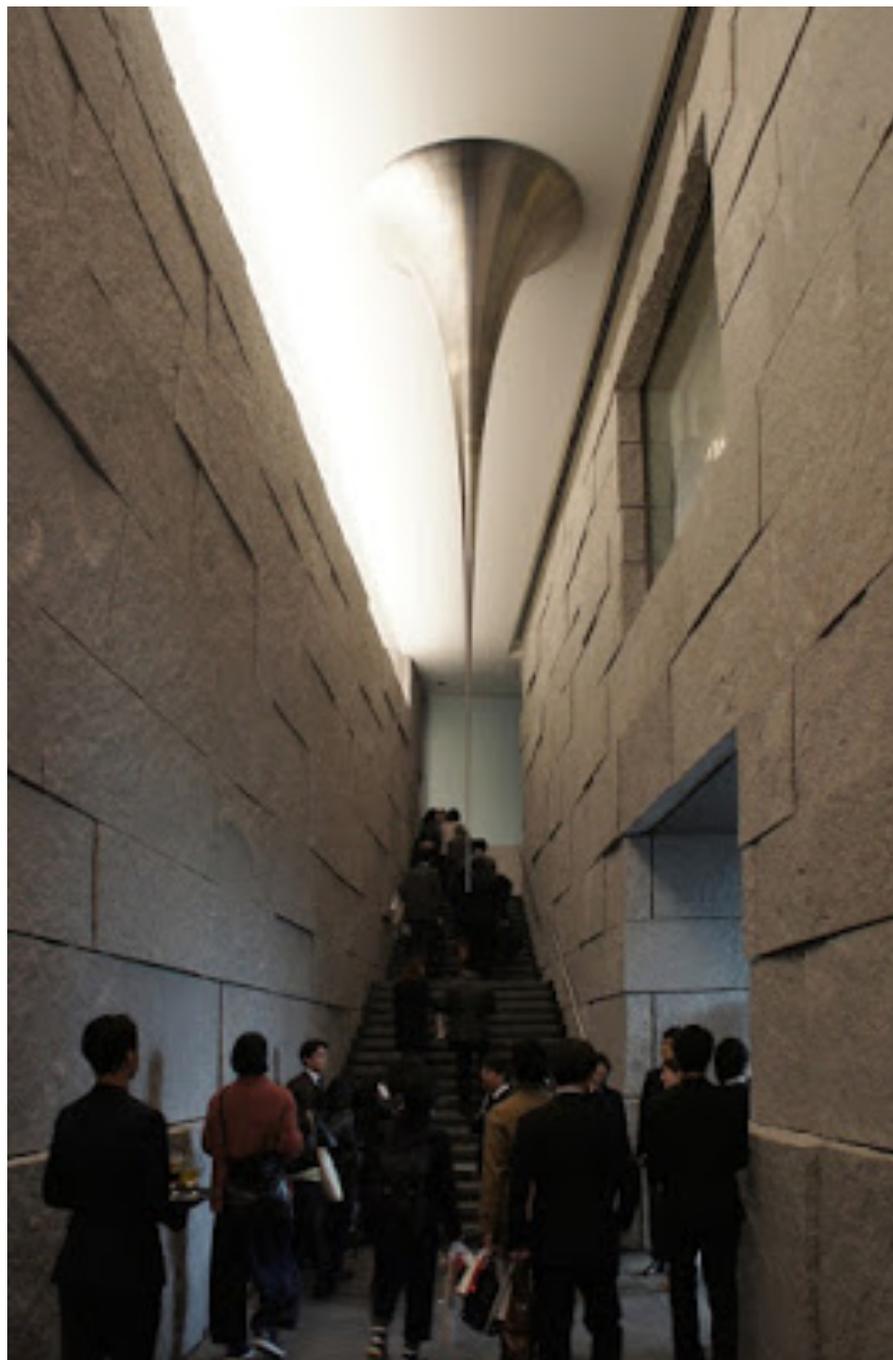
Gauss 1777-1855



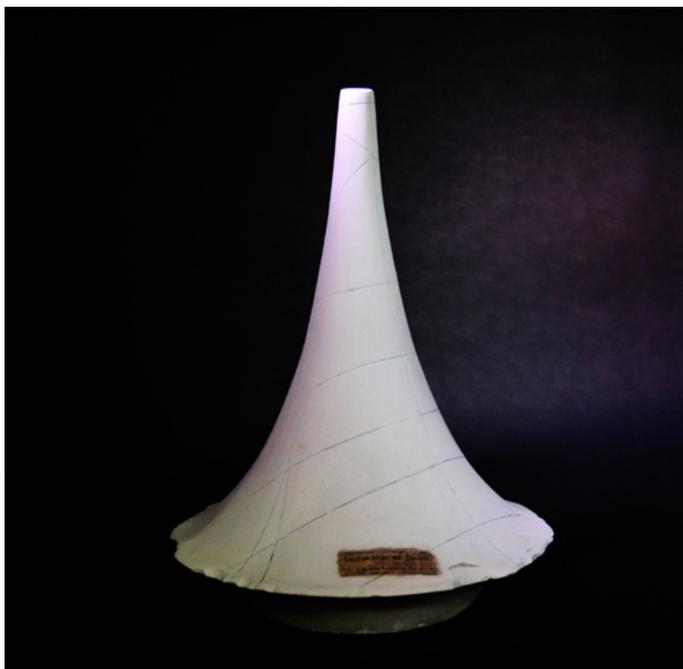
ガウス曲率が負の
一定値をとる曲面
の模型
(東大数理所蔵)

制作:ヤマダ精機

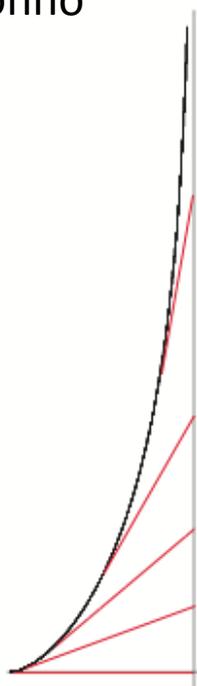
© T. Kohno



オーク表参道のエントランスホール



© T. Kohno



擬球 – 負の定曲率曲面

$$x = \frac{\cos u}{\cosh v}$$

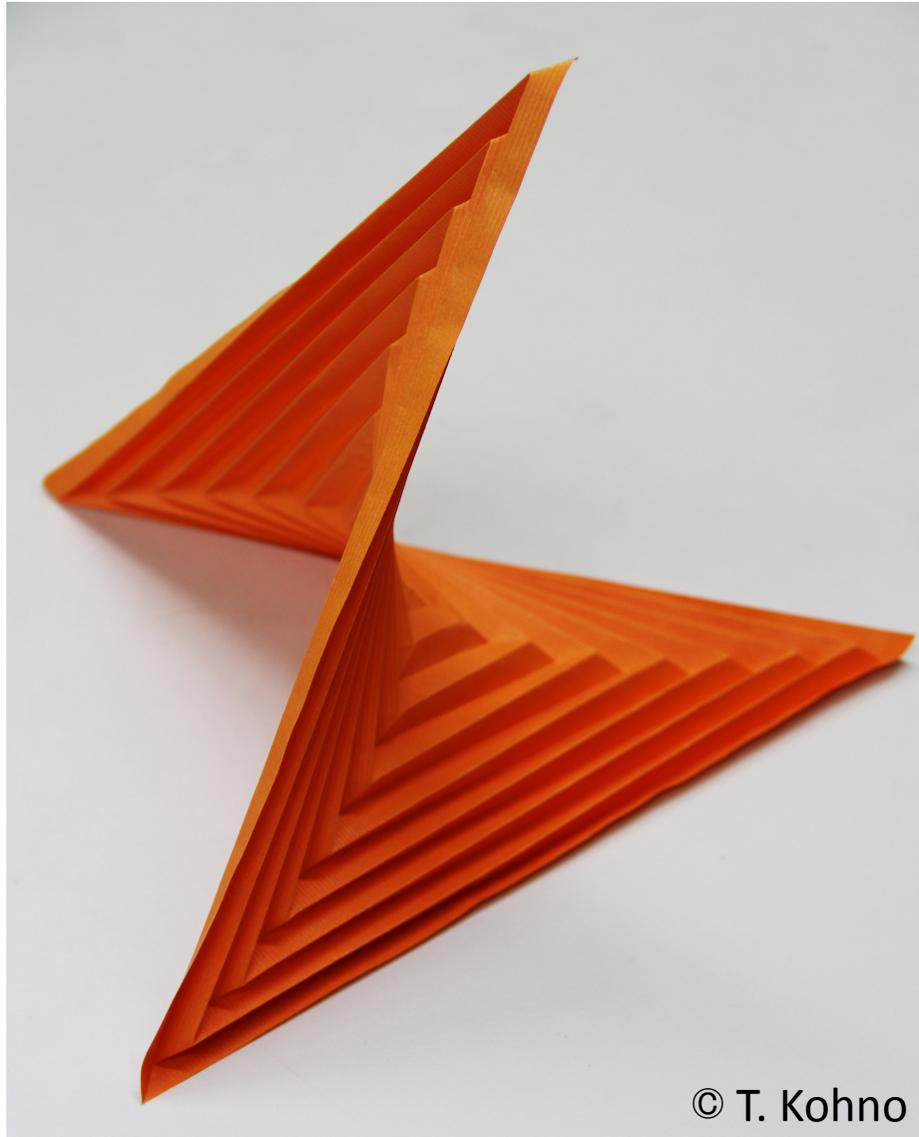
$$y = \frac{\sin u}{\cosh v}$$

$$z = v - \tanh v$$

$$(0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v < \infty)$$

トラクトリクスの回転面

折り紙による双曲放物面



負の曲率をもつ曲面

フラットな平面を折ることによって
近似されている。

交わった2つの放物線が見える。

ユークリッド原論の公理

- 2点を結ぶ直線がただ一つ存在する.
- 直線は両側にいくらでものばせる.

いくら伸ばしても互いに交わらない2直線は平行であるという.

平行線についての第5公準

2直線と交わる1本の直線が同じ側につくる内角の和が2直角よりも小さいならば, 2直線をその側に伸ばせば, どこかで交わる.

平行線についての第5公準は他の公理から証明できるか?

非ユークリッド幾何学の発見

1830年頃, ロバチェフスキーとボヤイによって, 「平行線についての第5公準」は満たさないが, ユークリッド原論の他の公準は満たす幾何学の体系が存在することが示された.

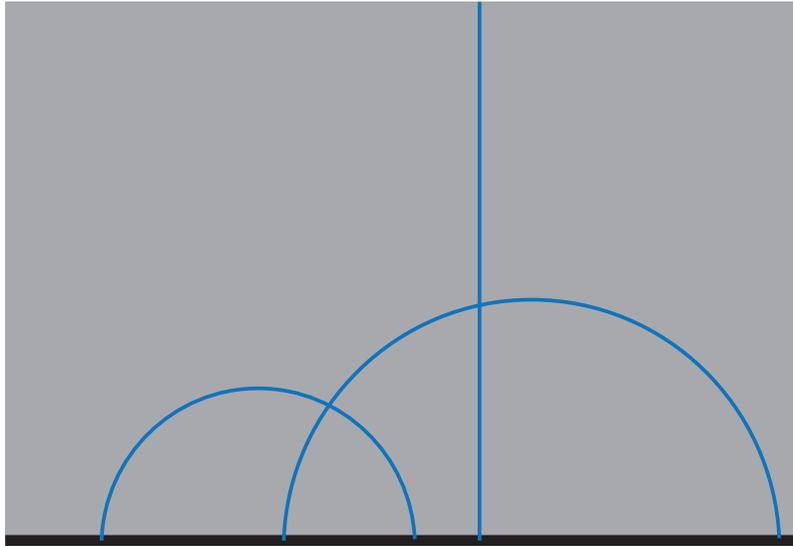


J. Boyai



N. Lobachevsky

非ユークリッド幾何学のモデル



ベルトラミ, ポアンカレ,
クライン, ...

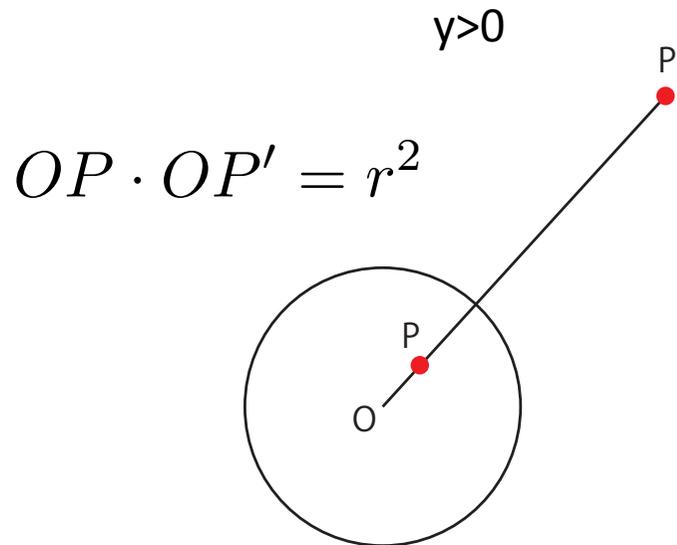
上半平面モデル

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$$

$$g_{12} = 0$$

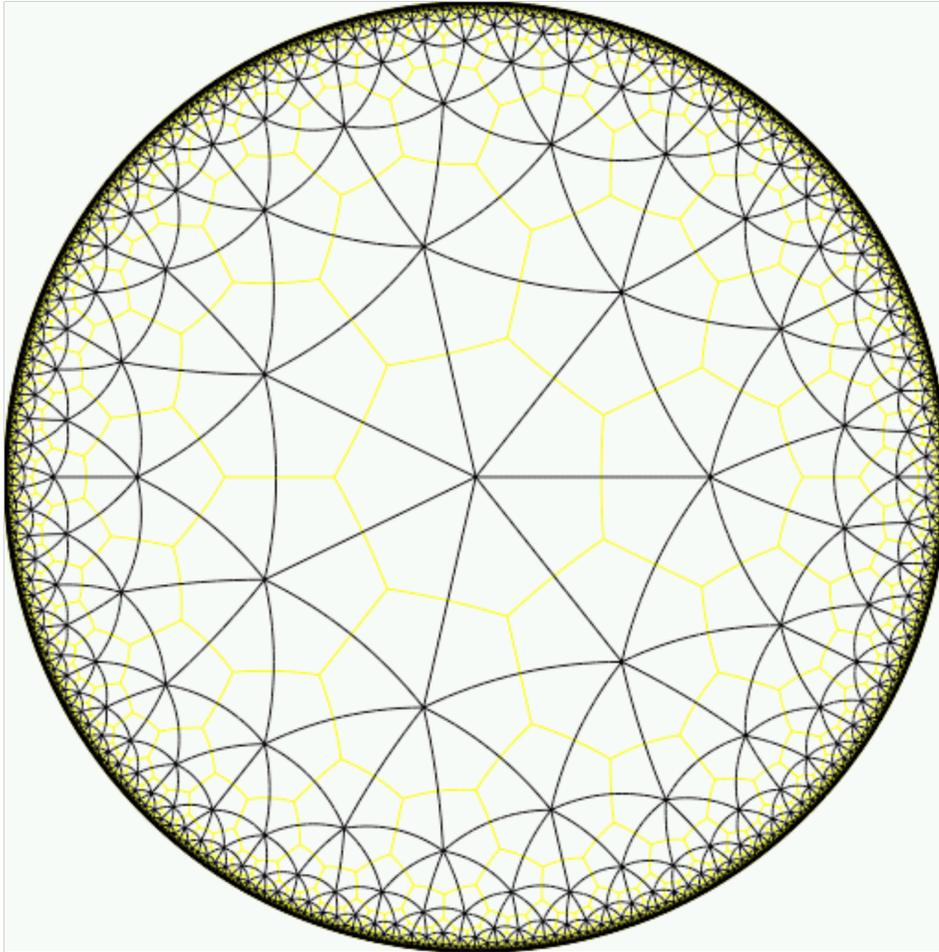
測地線は x軸と直交する半円または
半直線

測地線に関する反転によって距離
は変わらない.



半径 r の円についての反転

双曲幾何のモデル ポアンカレ円板 (双曲平面)



測地線は無限遠の円周と
直交する円弧

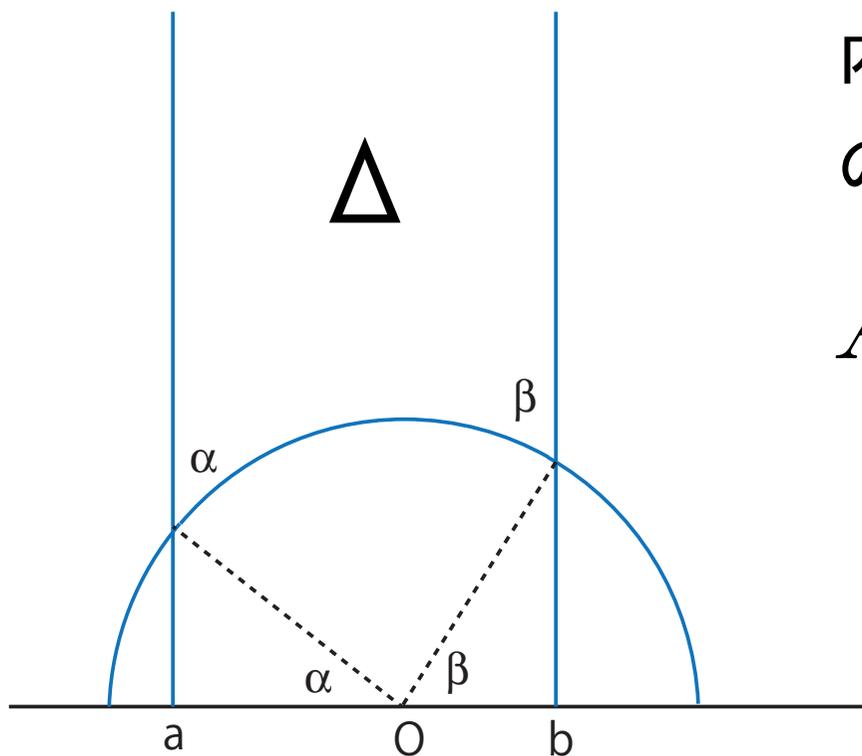
三角形の内角の和は
180度より小さい

$$g_{11} = g_{22} = \frac{4}{(1 - r^2)^2}$$

$$g_{12} = 0$$

単位円の内部に縮尺 $\frac{2}{1 - r^2}$ で距離を入れる。

測地3角形の面積



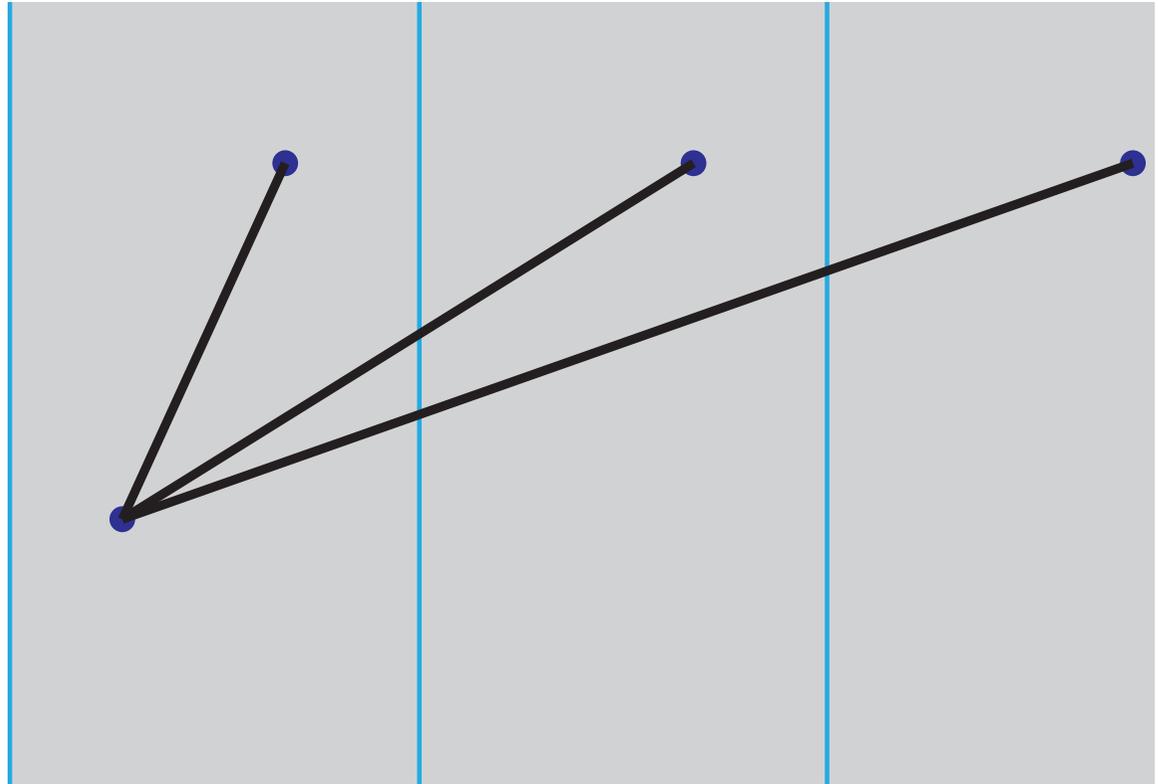
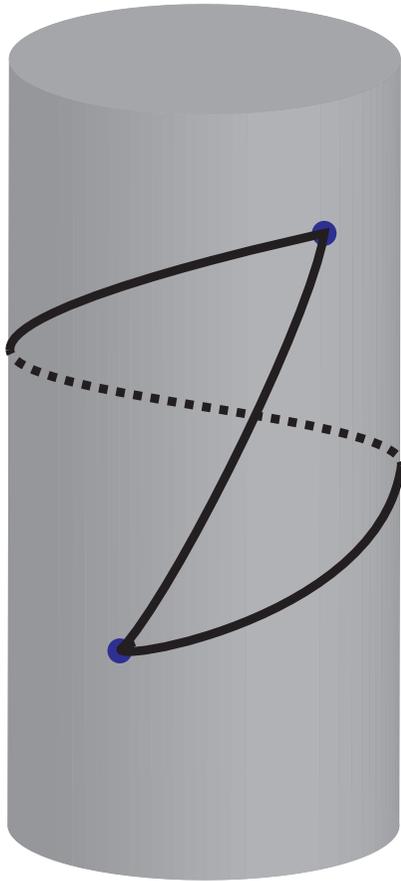
内角 α, β, γ
の測地3角形の面積

$$A = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

領域 Δ の面積

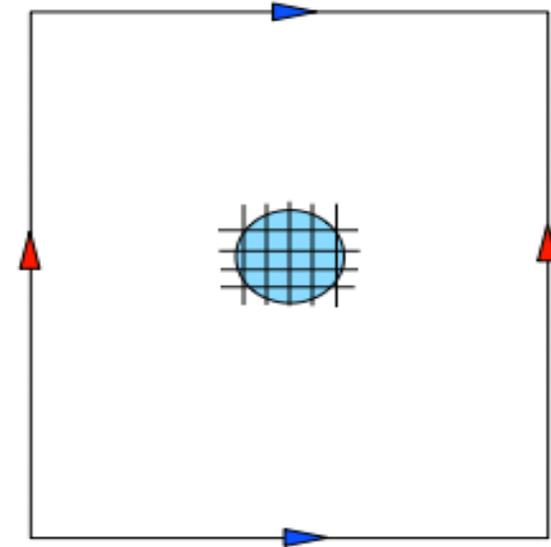
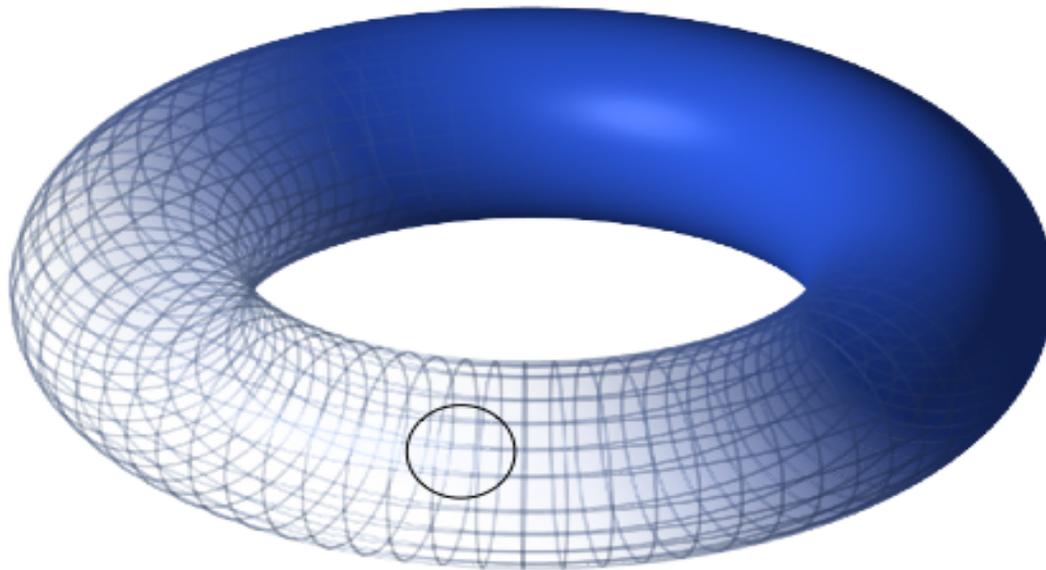
$$\int_a^b \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi - (\alpha + \beta)$$

円柱(シリンダー)の展開図を考えてみよう



シリンダーの各点のまわりはユークリッド平面の一部と同じ構造をもつ.

トーラスの幾何構造

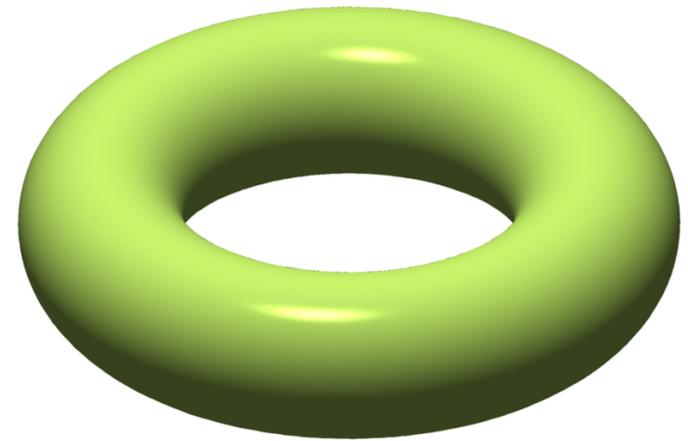
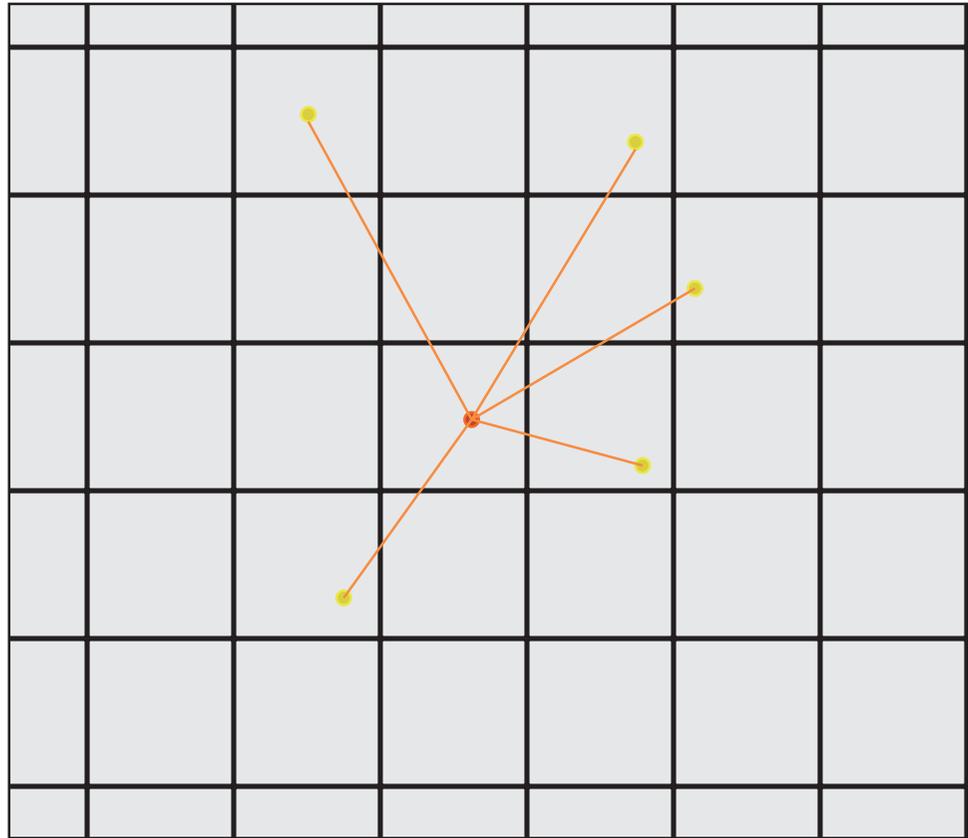


トーラスは右のような展開図によって距離をさだめるとどの点のまわりも平面の円の内部と合同になる。

トーラスの局所ユークリッド幾何構造

トーラスはフラットな構造をもつ

トーラスの幾何構造のモデル

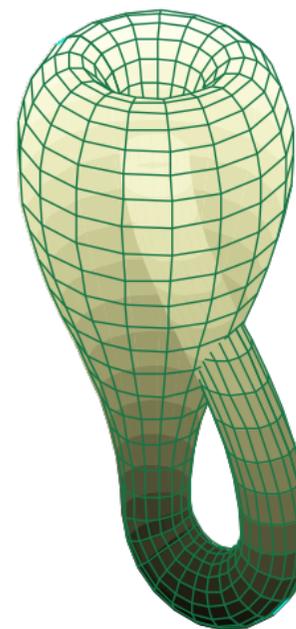
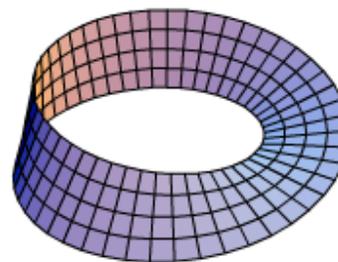
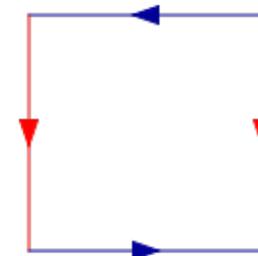
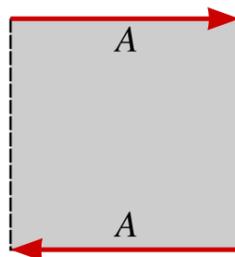


ユークリッド平面はトーラスの幾何構造のモデルである。
トーラスからモデルとなる平面を再現するには、トーラスの
一点について、そこに到達する「光源」すべてを観測すれば
よい。

局所ユークリッド曲面

局所的にユークリッド平面と合同な完備な曲面は次の5通りに分類される.

- 1 ユークリッド平面
- 2 シリンダー
- 3 トーラス
- 4 開いたメビウスの帯
- 5 クラインのつぼ



完備とは測地線がどこまでものばせること(端がない)
トーラスとクラインのつぼはコンパクト(有限な広がり)



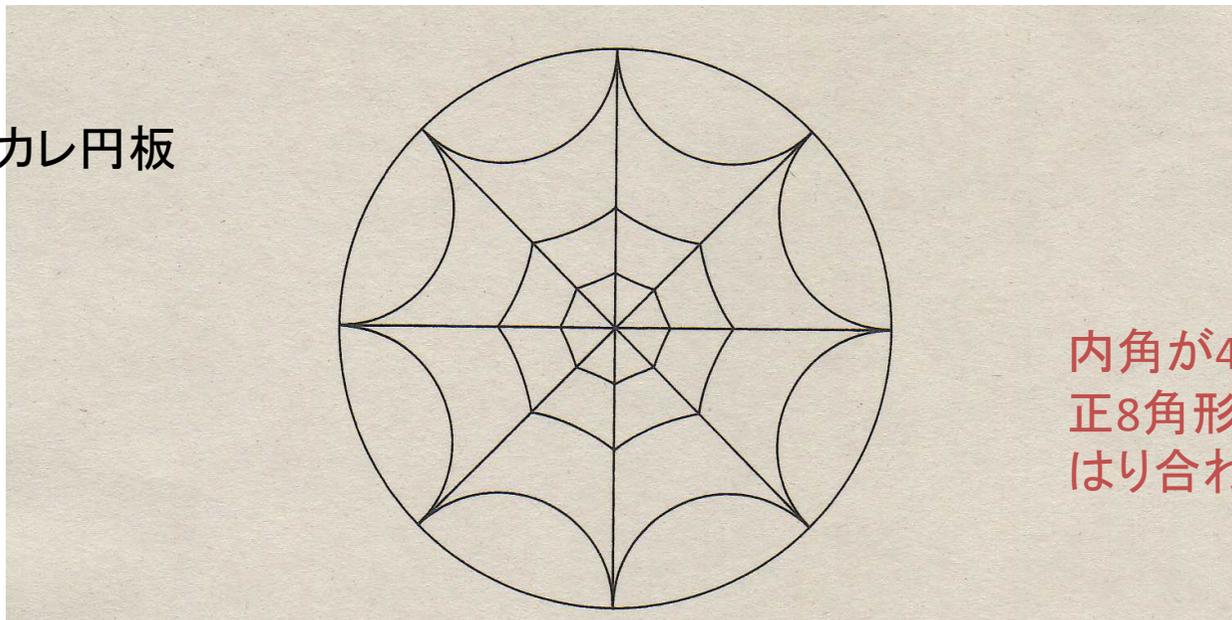
クラインのつぼの模型



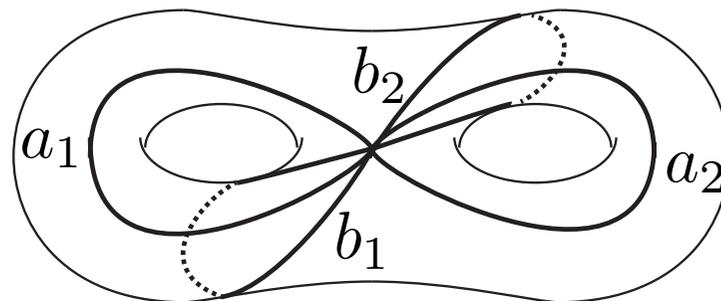
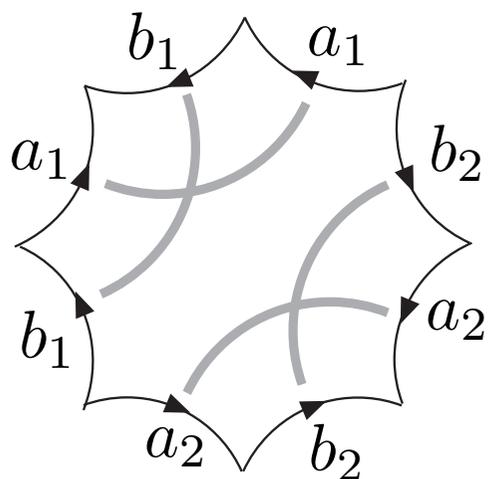
種数2の曲面

種数2の曲面の双曲幾何構造

ポアンカレ円板



内角が45度の
正8角形の辺を
はり合わせる.



2次元幾何構造のモデル

球面

三角形の内角の和
は180度より大

曲率 正

ユークリッド平面

三角形の内角の和
は180度

曲率 0

双曲平面

三角形の内角の和
は180度より小

曲率 負

トーラス

種数2以上の曲面

タイプ $\{p, q\}$ のタイルばり

ユークリッド平面

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$$

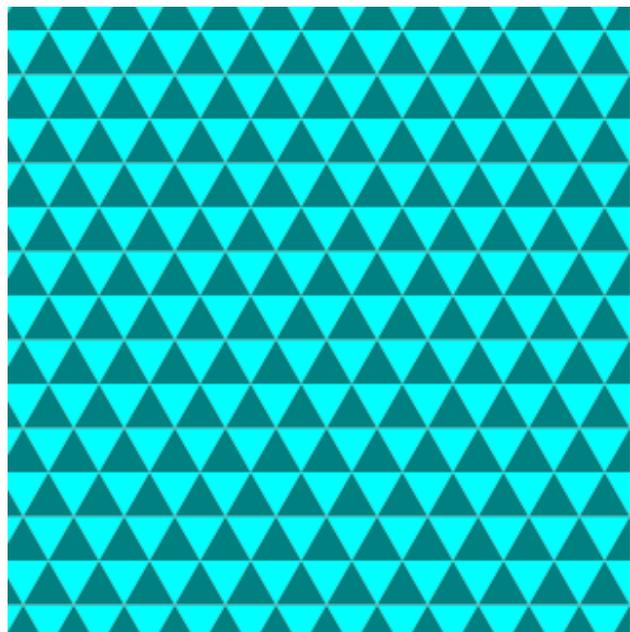
球面

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

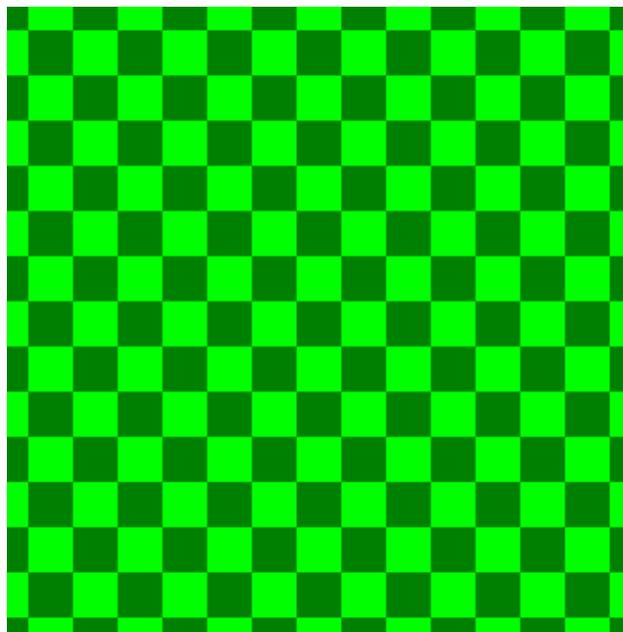
双曲平面

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$$

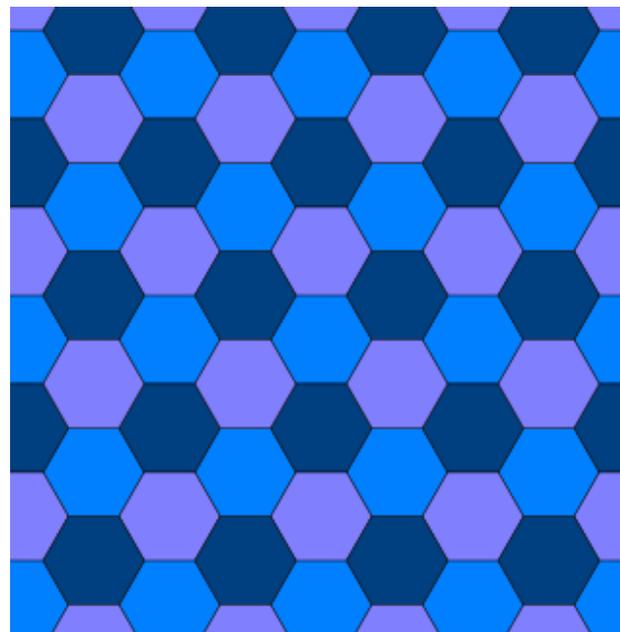
ユークリッド平面の正則分割 (タイルばり)



$\{3, 6\}$



$\{4, 4\}$

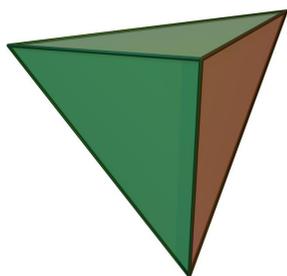


$\{6, 3\}$

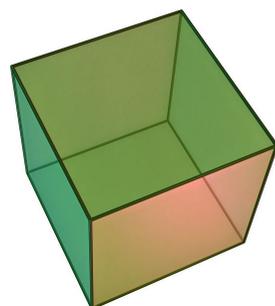
シュレフリー記号

$\{n\}$ 正 n 角形

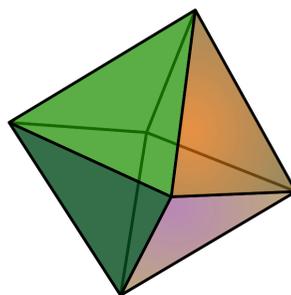
$\{p, q\}$ 正多角形 $\{p\}$ がそれぞれの頂点のまわりに q 個集まる.



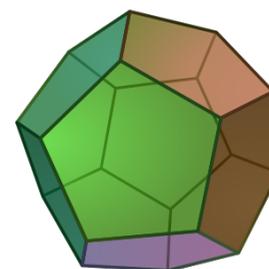
$\{3, 3\}$



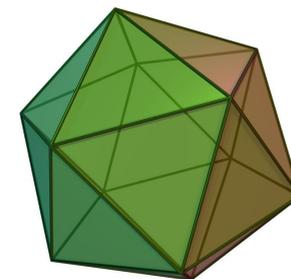
$\{4, 3\}$



$\{3, 4\}$

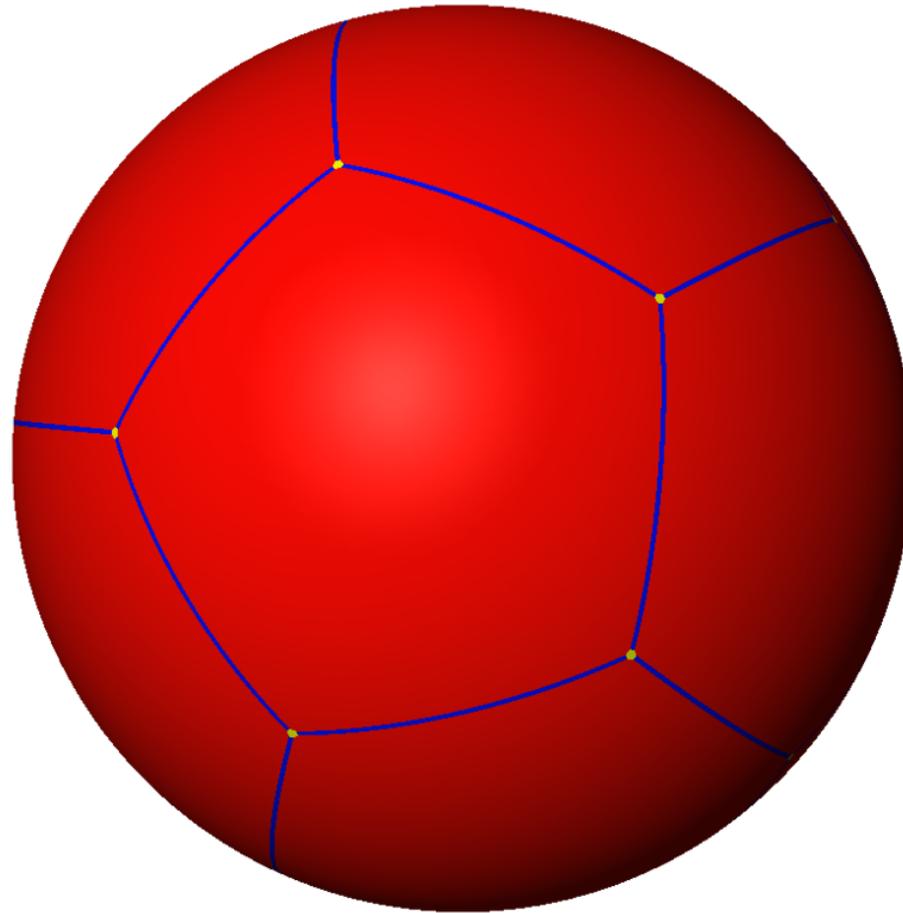


$\{5, 3\}$



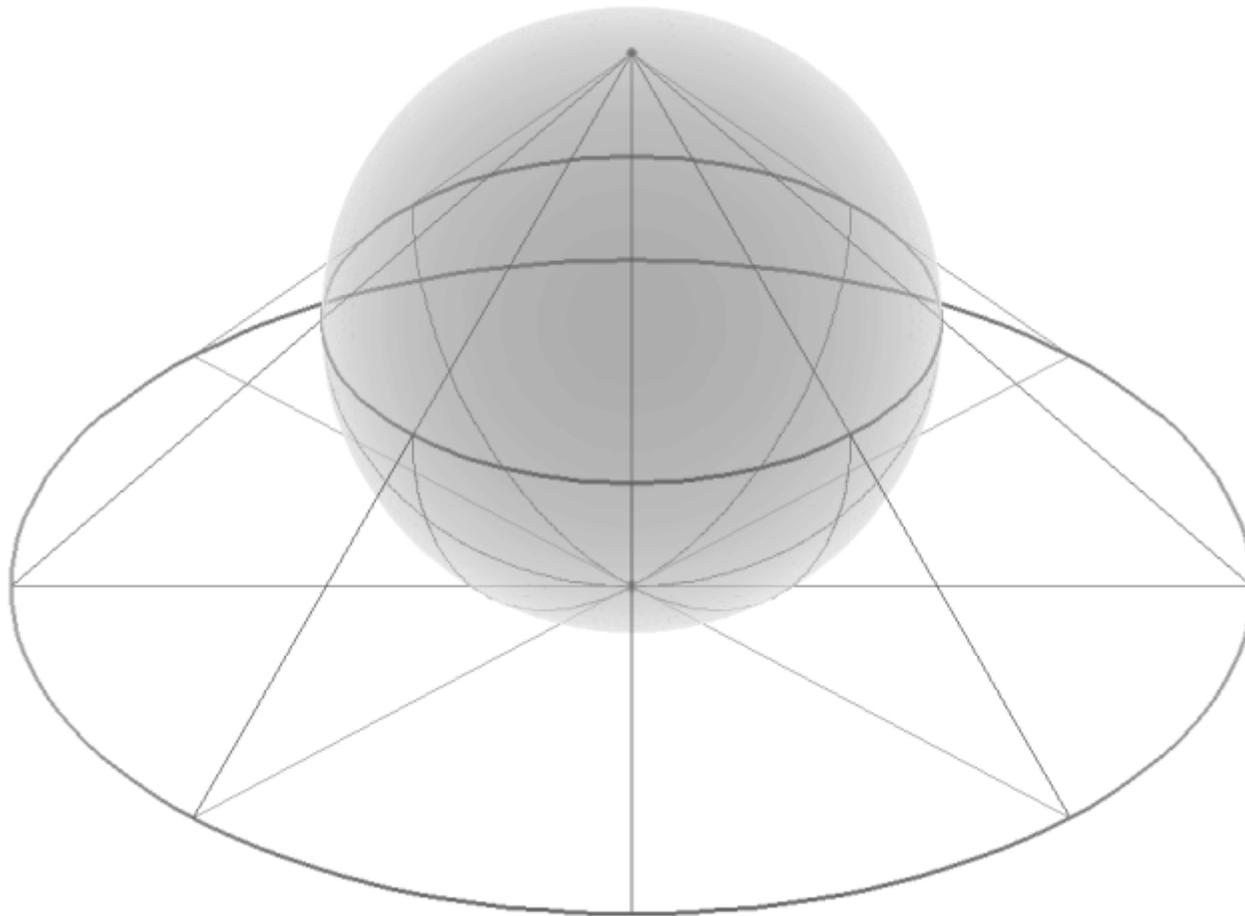
$\{3, 5\}$

球面上の正12面体



辺は大円の弧
正5角形の内角は 120°

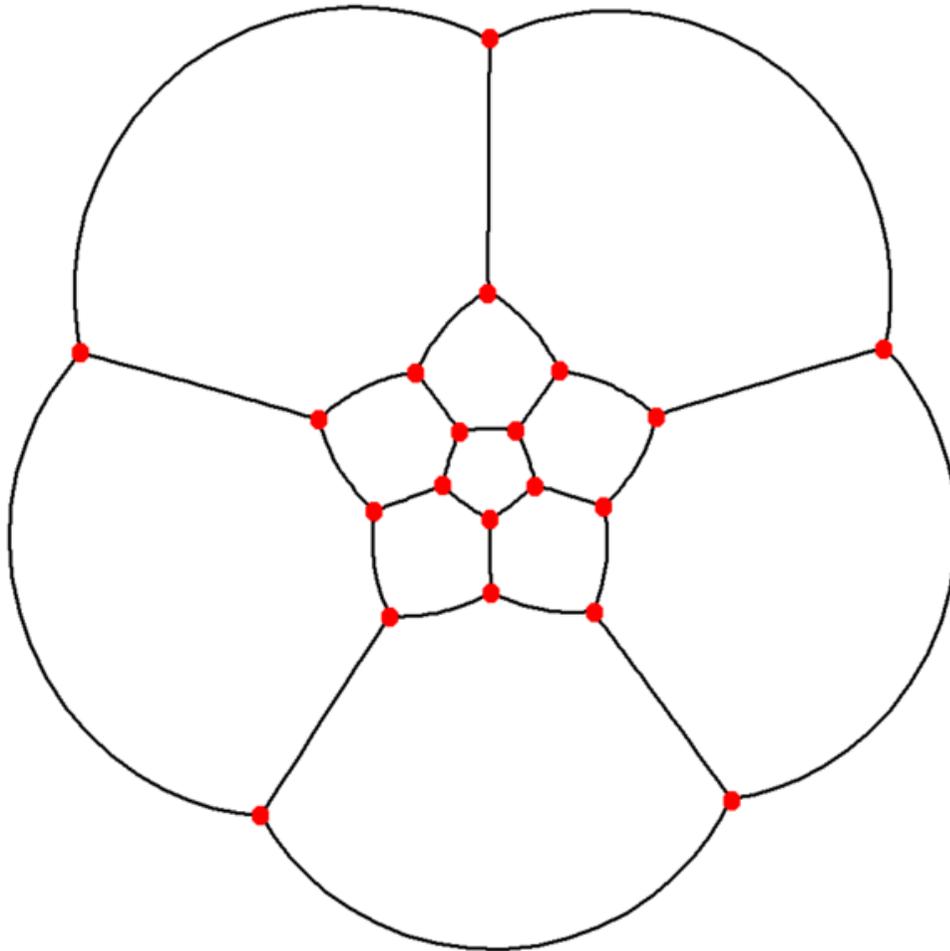
球面の立体射影



球面の北極点
以外の点は平面
と1対1に対応

球面は平面に
無限遠点をつけ
加えたものとみな
せる.

正12面体の立体射影



平面の12個の領域
への分割.

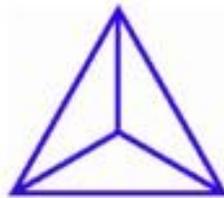
外側の領域も無限遠点
を加えて, 正12面体の
1つの面に対応.

射影によって角度は
保たれる.

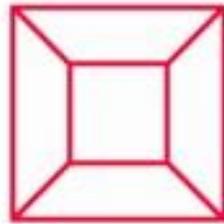
正多面体の射影

1つの面を水平面と平行におき点光源からの光で射影する.

正4面体



立方体



正8面体



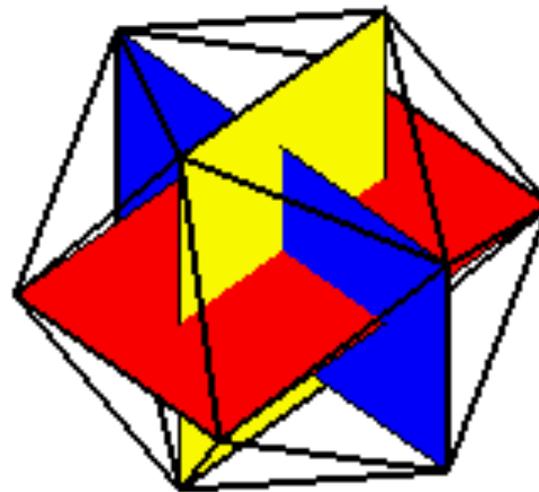
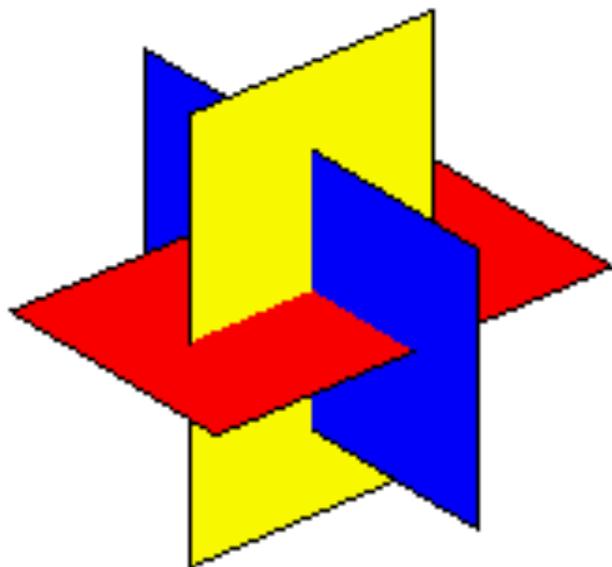
正12面体



正20面体

シュレーゲル図式

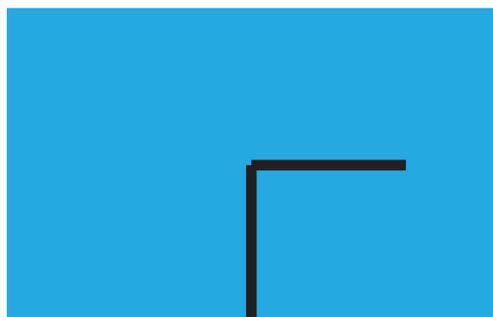
3次元空間に正20面体の頂点をとる



黄金比

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

縦横比が黄金比であるような
長方形3枚を上図のように
組み合わせる.

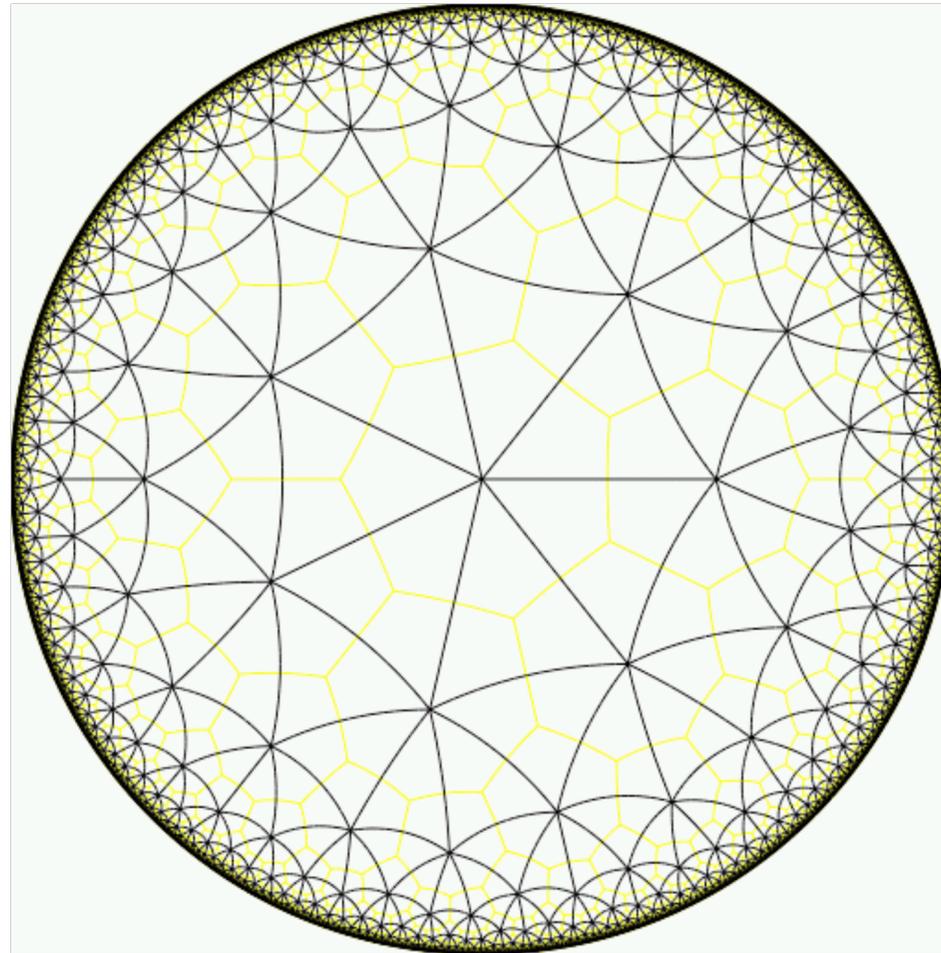


正20面体の頂点の座標として

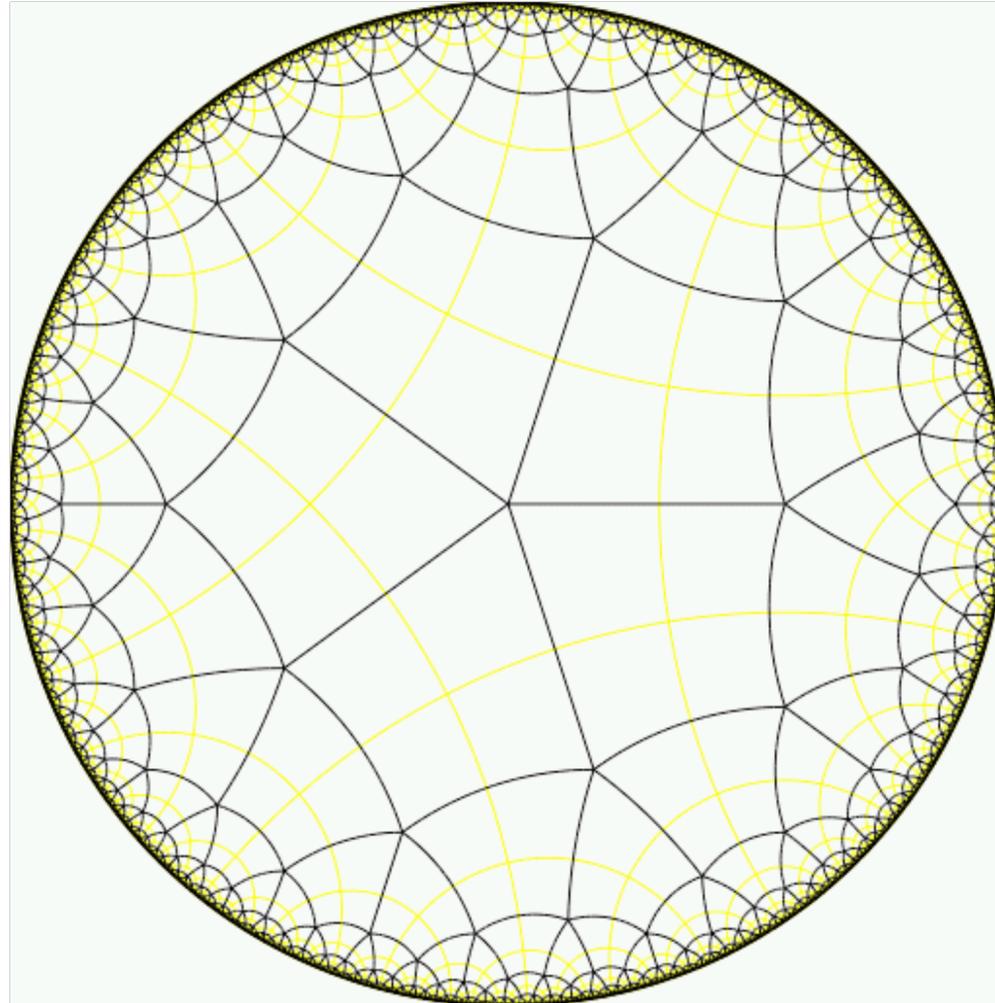
$$(\pm 1, \pm \tau, 0)$$

およびこれらの入れ替えがとれる.

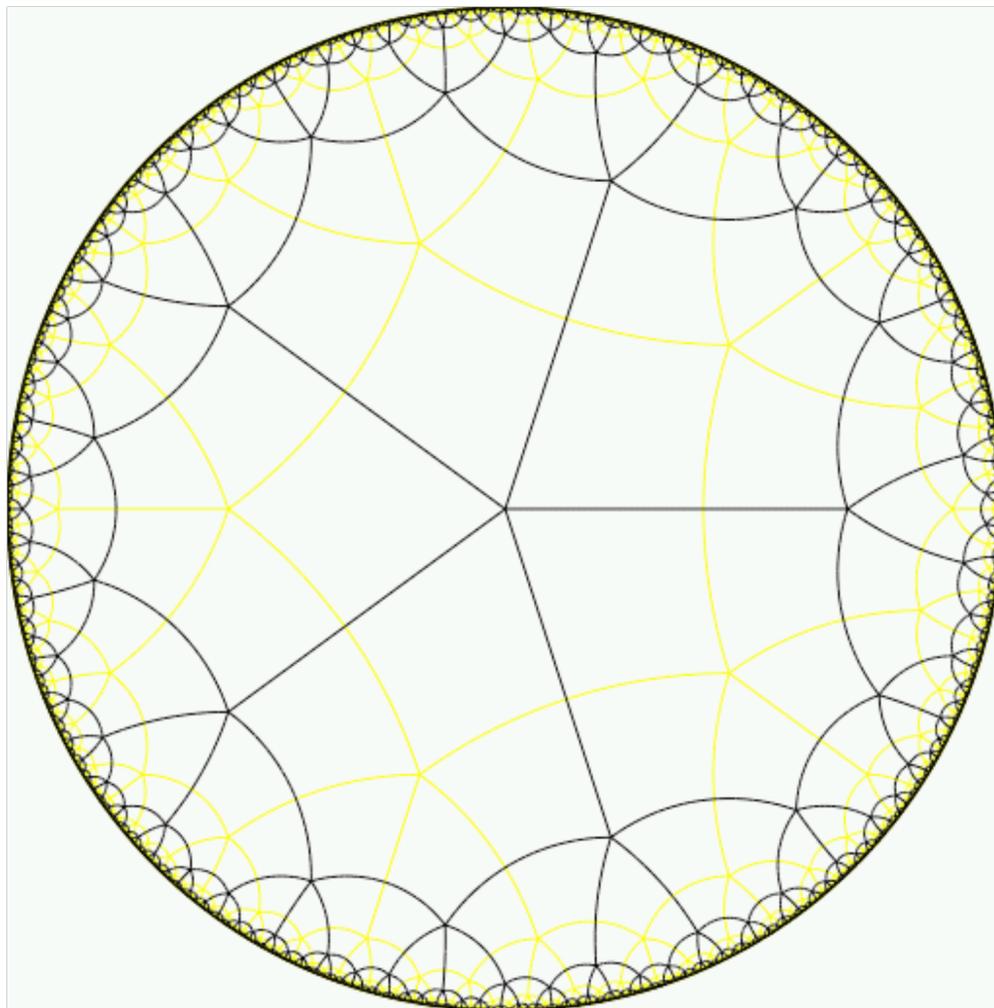
双曲平面のタイルばり{3,7}型



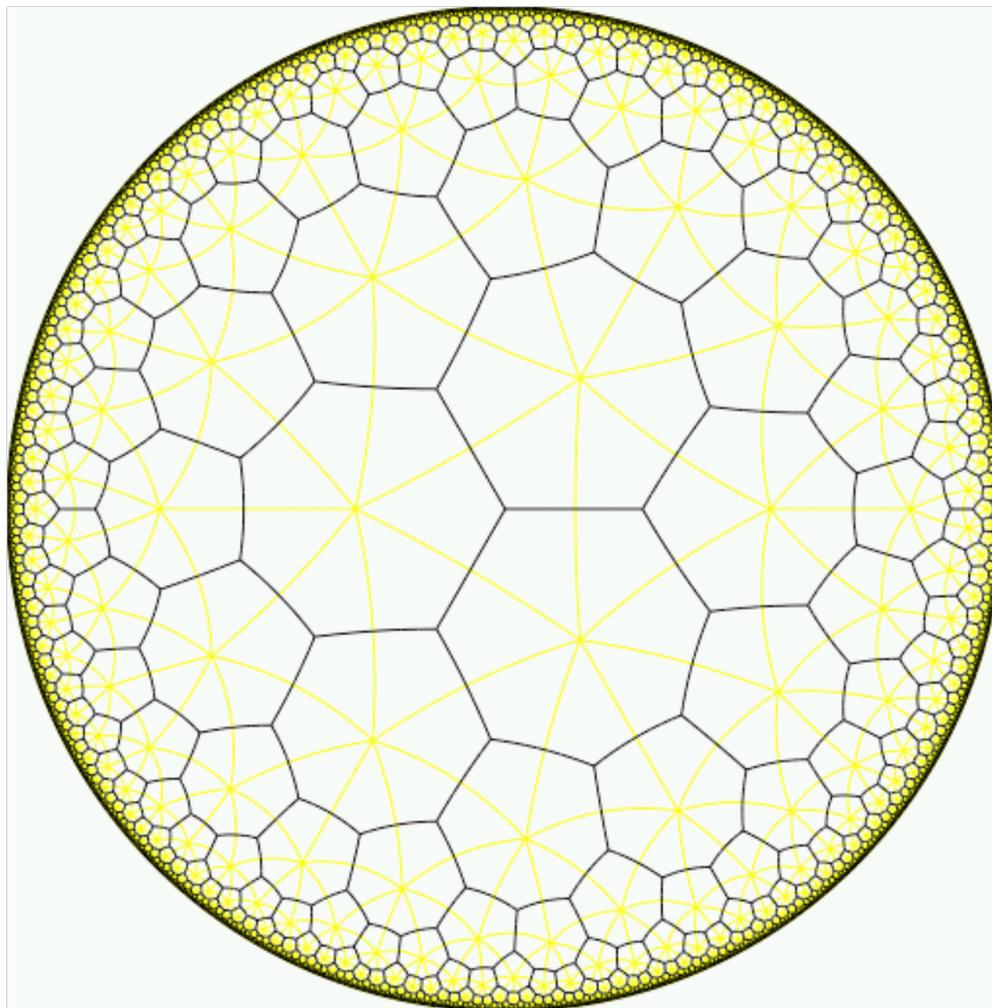
双曲平面のタイルばり{4,5}型



双曲平面のタイルばり{5, 5}型



双曲平面のタイルばり{7, 3}型



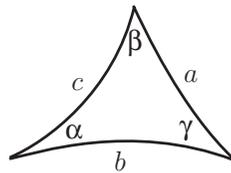
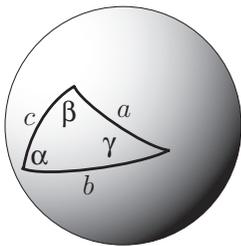
ガウスの定理 Theorema Egregium

曲面のガウス曲率は、計量によって定まる。

曲率は曲面が入っている空間からみなくても、内在的にさだまる。

ガウス曲率 K の測地三角形での平均は、
三角形の内角を α, β, γ として

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi$$



等距離地図の不可能性
地球のどんな小さい部分も縮尺一定
の正確な地図はつくれない！

球面の曲率は正， 平面の曲率は0

内在的な微分幾何学の確立

計量から出発して、空間の曲がり具合を表す曲率の概念がリーマンによって定式化された。

局所的に n 個の座標で定義できる
図形が n 次元多様体



Riemann 1826-1866

リーマンの曲率テンソル

$g_{\mu\nu}$

計量

リーマン多様体

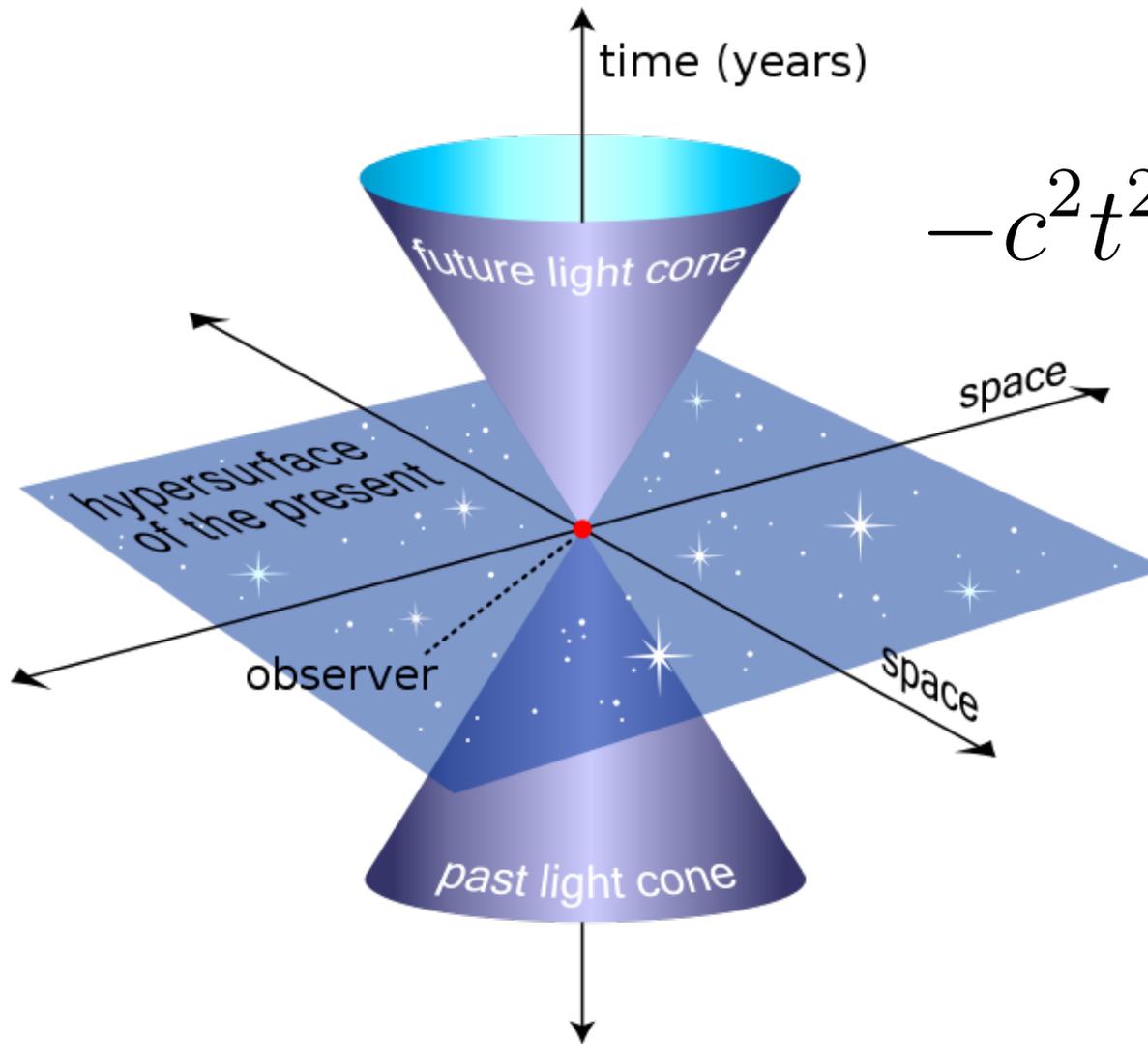


さまざまな方向の測地3三角形の内角を見る

$R_{\mu\nu}$

リッチ曲率

ローレンツ計量と光錐



$$-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

特殊相対論はローレンツ計量
を不変にする理論
(光速の不変性)

ローレンツ変換の例

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(x, y, z)系に対して速度 v で移動する
粒子を原点とする座標系を (x', y', z')

$$x^2 + y^2 + z^2 = v^2 t^2$$

移動する粒子の固有時

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$c^2 - v^2 t^2 = c^2 t'^2$$

内在的な微分幾何と相対論

計量から出発した内在的な幾何学はアインシュタインの一般相対性理論の成立に影響を与えた。

アインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

左辺は4次元時空の曲がり具合を表し、計量で表現される。
右辺は質量、エネルギーの分布を表す。

光の経路は測地線で表される。

シュヴァルツシルトの解

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

重力半径

$$r_g = \frac{2Gm}{c^2}$$

大きな重力によって光が曲げられる。

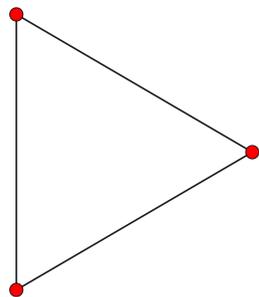
太陽の重力

皆既日食の時太陽の背後にある星を観測
水星の近日点移動

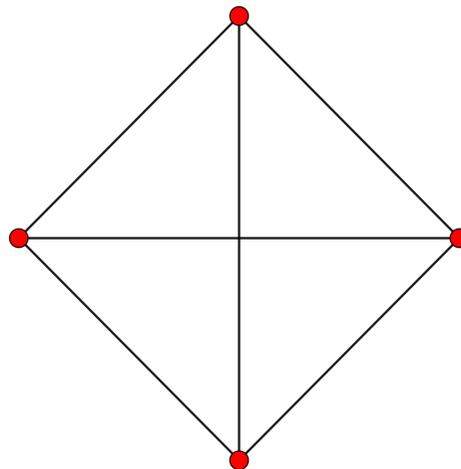
4次元の図形



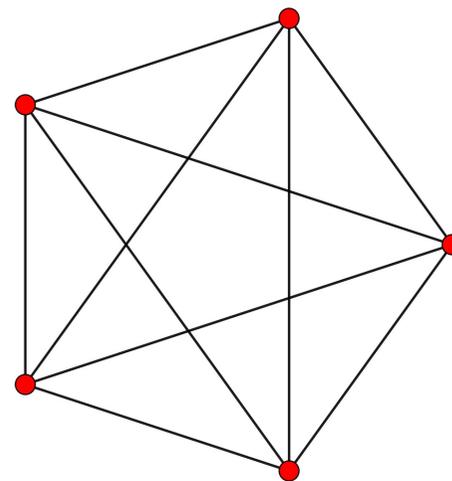
1次元
線分



2次元
正3角形

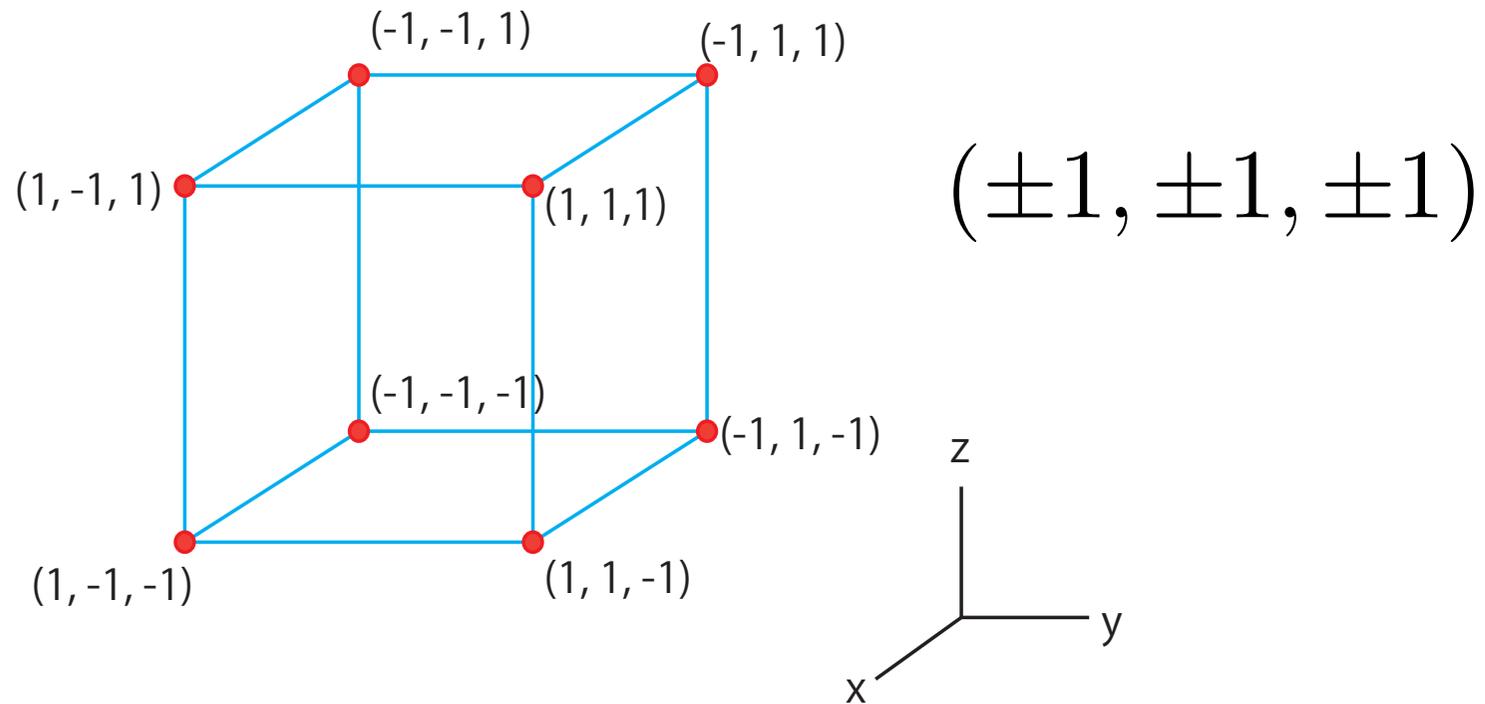


3次元
正4面体



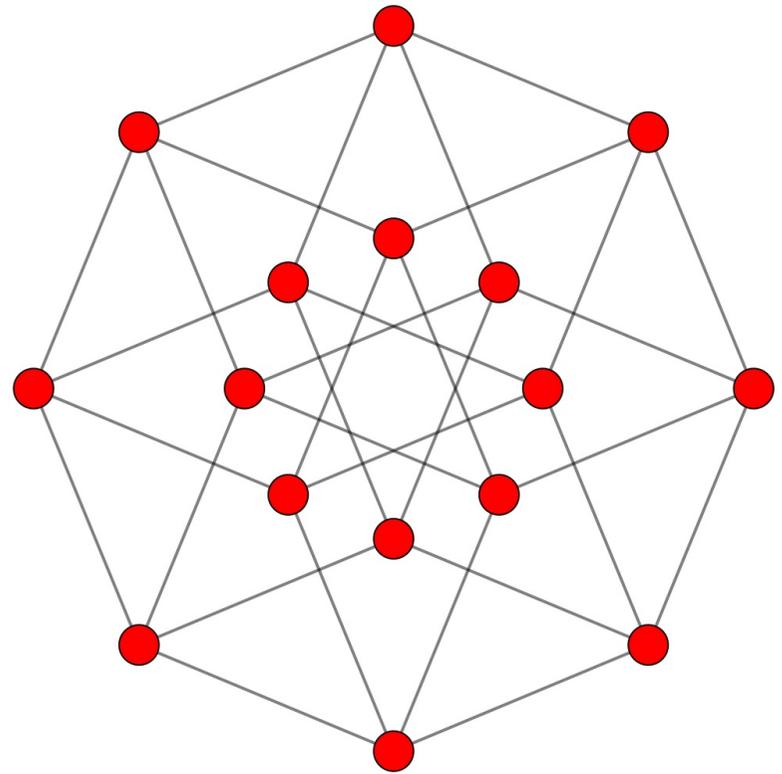
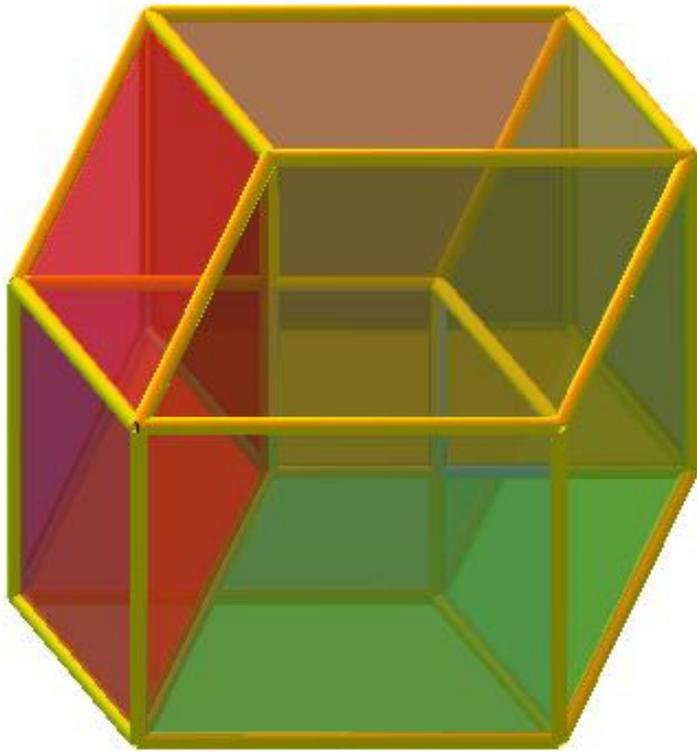
4次元の図形の影？

立方体の頂点を3次元ユークリッド空間の座標で表す

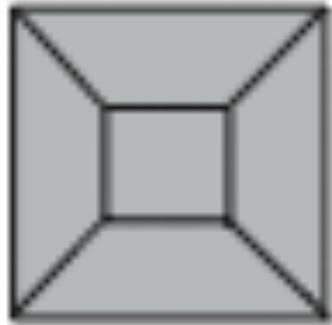


頂点の座標として $(1, 1, 1)$ および座標の符号を変えた8個がとれる.

4次元立方体の射影図



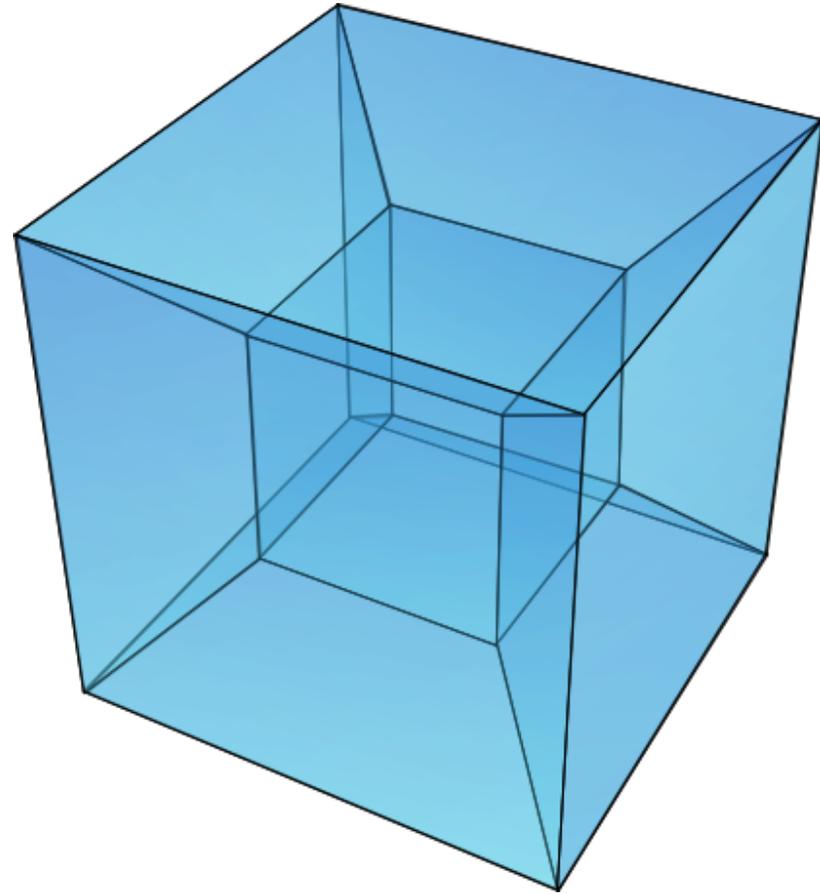
4次元立方体のシュレーゲル図式



立方体の射影図

それぞれの次元のセルの数は？

0-セル(頂点)	16
1-セル(辺)	32
2-セル(面)	24
3-セル	8

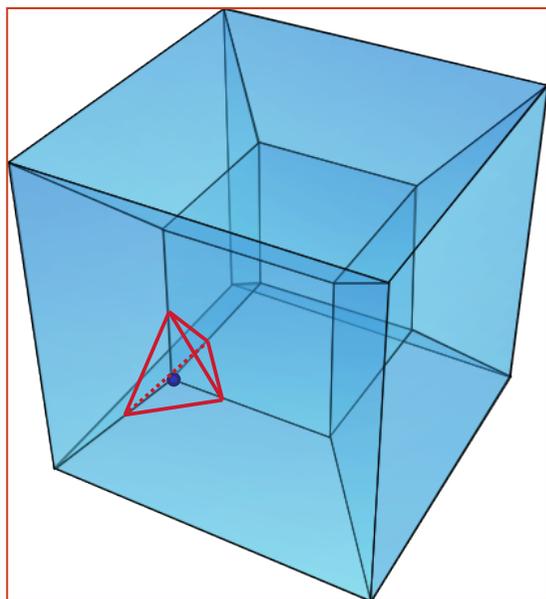


4次元空間の正多胞体のシュレフリー記号

シュレフリー記号 $\{p, q, r\}$

正多面体 $\{p, q\}$ が辺のまわりに r 個集まる.

各頂点のまわりの切り口のタイプが $\{q, r\}$.



3次元空間の分割: 正多胞体

正8胞体 (hypercube)

$\{4, 3, 3\}$

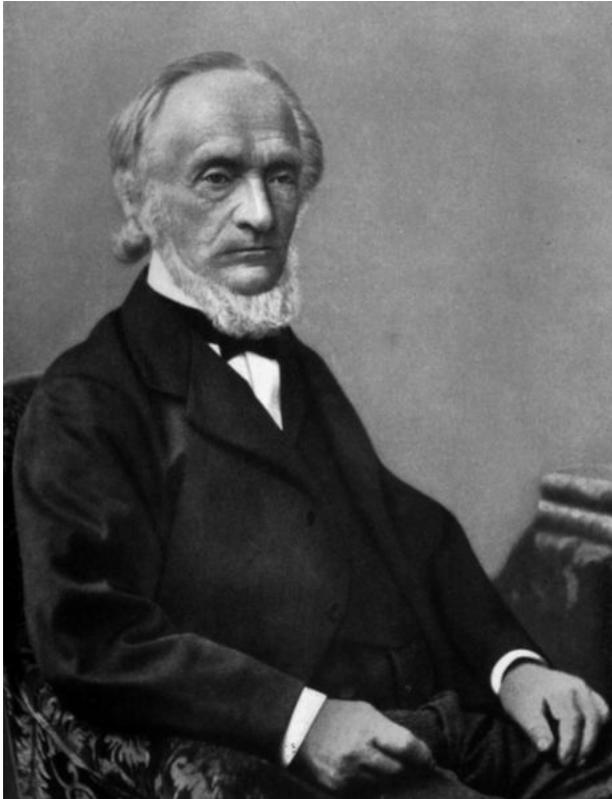
4次元空間の正多胞体(regular polytope)の分類

シュレプリーにより19世紀半ばに示された.

	シュレプリー記号	0-セル	1-セル	2-セル	3-セル
正5胞体	{3, 3, 3}	5	10	10	5
正8胞体	{4, 3, 3}	16	32	24	8
正16胞体	{3, 3, 4}	8	24	32	16
正24胞体	{3, 4, 3}	24	96	96	24
正120胞体	{5, 3, 3}	600	1200	720	120
正600胞体	{3, 3, 5}	120	720	1200	600

3次元球面の正則分割を与える.

3次元球面のオイラー数は0



Ludwig Schläfli (1814 - 1895)

Theorie der vielfachen Kontinuität
1850 - 52

Riemann : *Hypothesen welche der Geometrie zu
Grunde liegen* 1854

正16胞体

正8面体の4次元版

3次元ユークリッド空間の
正8面体として頂点の座標を

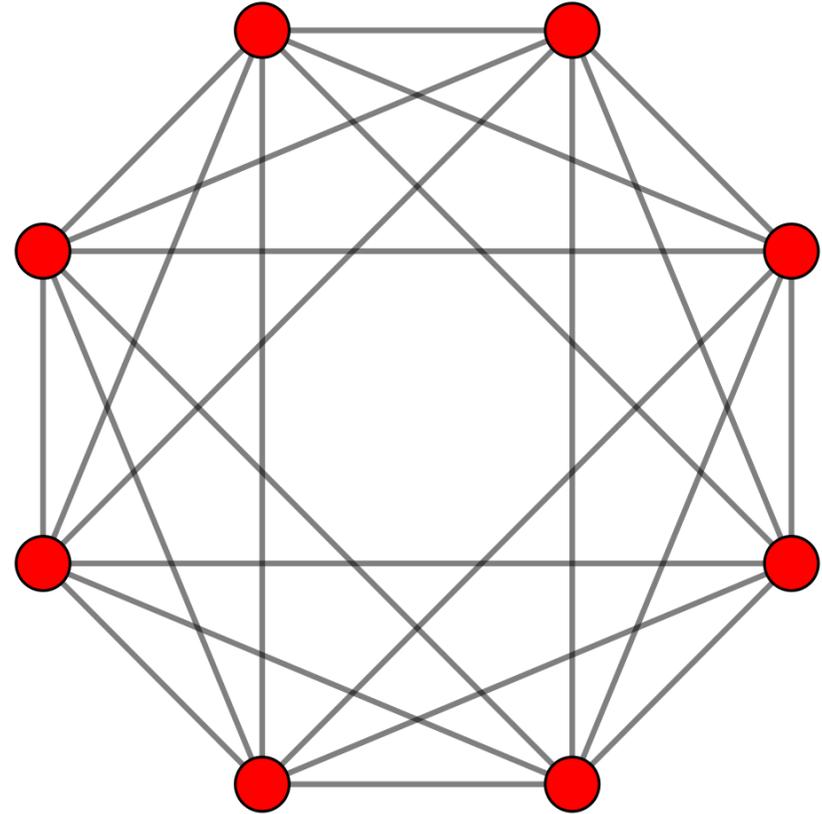
$$(\pm 2, 0, 0)$$

およびこれらの座標の入れ替
えからなる6点をとる.

4次元ユークリッド空間で
頂点の座標を

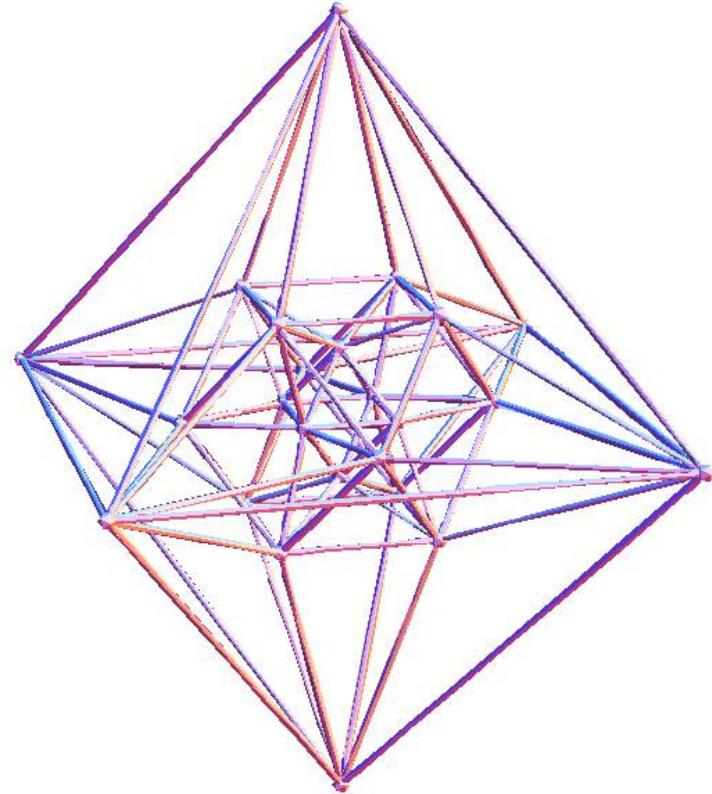
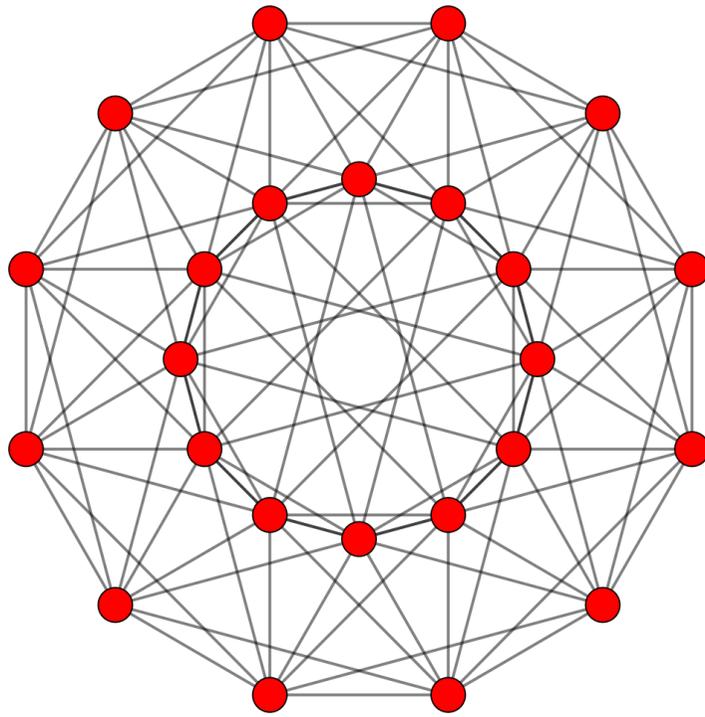
$$(\pm 2, 0, 0, 0)$$

およびこれらの座標の入れ替
えからなる8点をとる.



正16胞体の射影図

正24胞体



正8胞体 (hypercube) と正16胞体の頂点をこれまでのように4次元ユークリッド空間にとり, それらの和集合を頂点にとる. 3次元の正多面体には対応物がない.

ハミルトンの四元数

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$

$$x = a + bi + cj + dk$$

$$|x| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\bar{x} = a - bi - cj - dk$$

a, b, c, dは実数

可換ではないが結合法則, 分配法則
を満たす数の体系

大きさが1の四元数全体は3次元球面
とみなせる.

四元数と回転

単位ベクトル \mathbf{w} を軸とする角度 θ の回転は

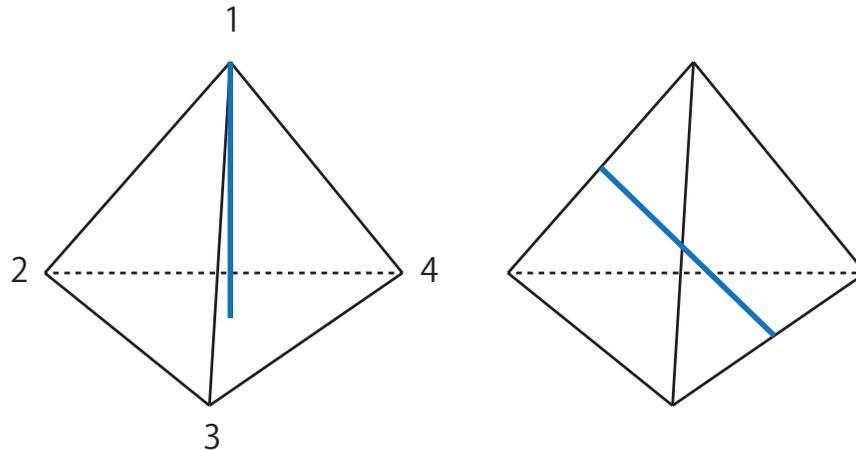
$$g = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{w} \sin \frac{\theta}{2}$$

として

$$\mathbf{x} \mapsto g\mathbf{x}\bar{g}$$

一つの回転に対して四元数が2個ずつ定まる.

正4面体群



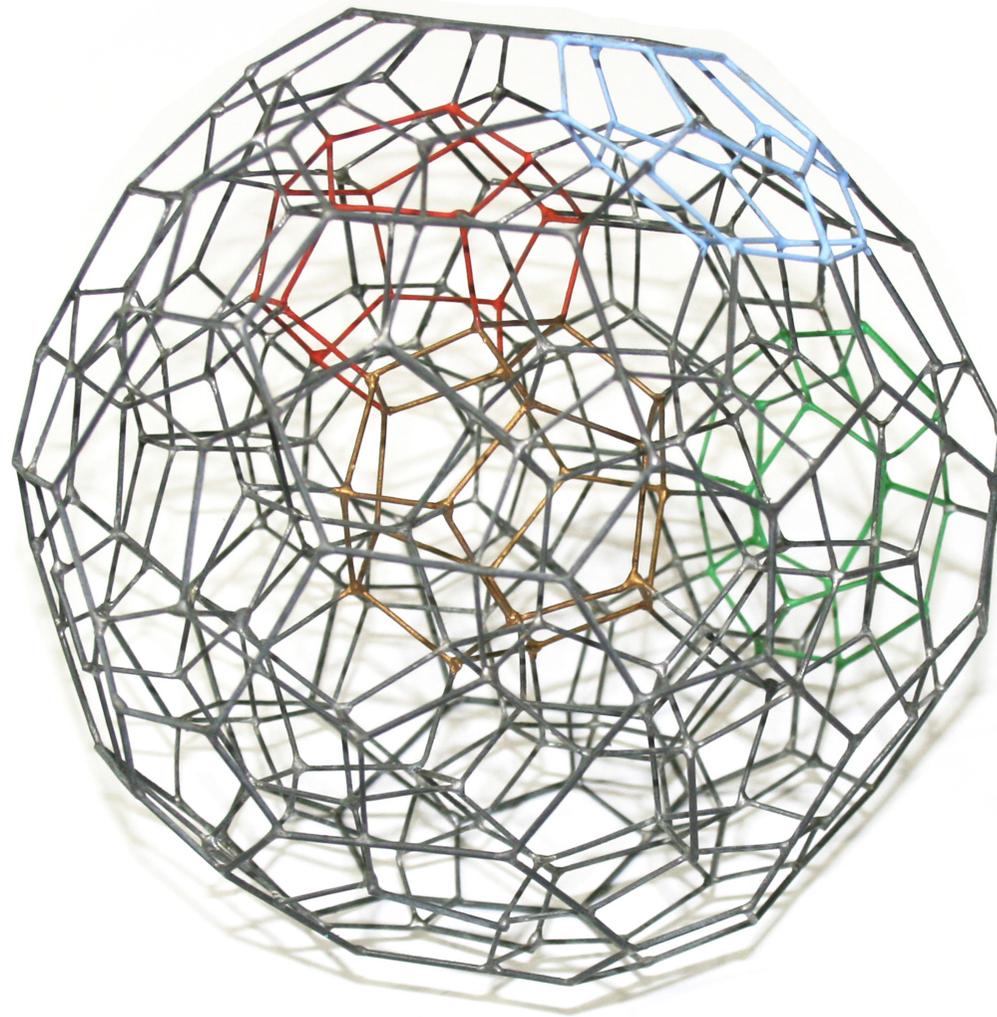
正4面体を不変にする
回転は12個の要素から
なる。

$\frac{2\pi}{3}$ 回転に対応する四元数

$$\cos \frac{\pi}{3} + \frac{i + j + k}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(i + j + k)$$

左のようにして、正4面体群
の12個の要素から大きさが
1の四元数24個が決まる。
これらは、正24胞体の頂点を
なす。

正20面体を不変にする回転は60個の要素からなる。これらに対応する120個の
四元数は、正600胞体の頂点をなす。

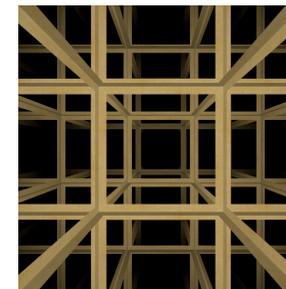


乙部融朗氏による正120胞体の模型

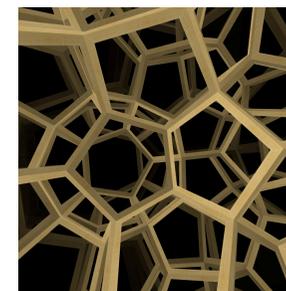
3次元幾何構造のモデル空間

等方性をもつのは次の3通り

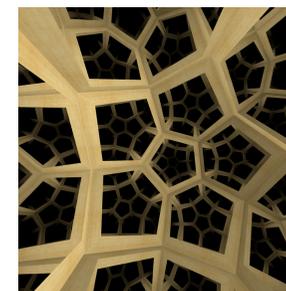
3次元ユークリッド空間 曲率 0



3次元球面 曲率が正の一定値



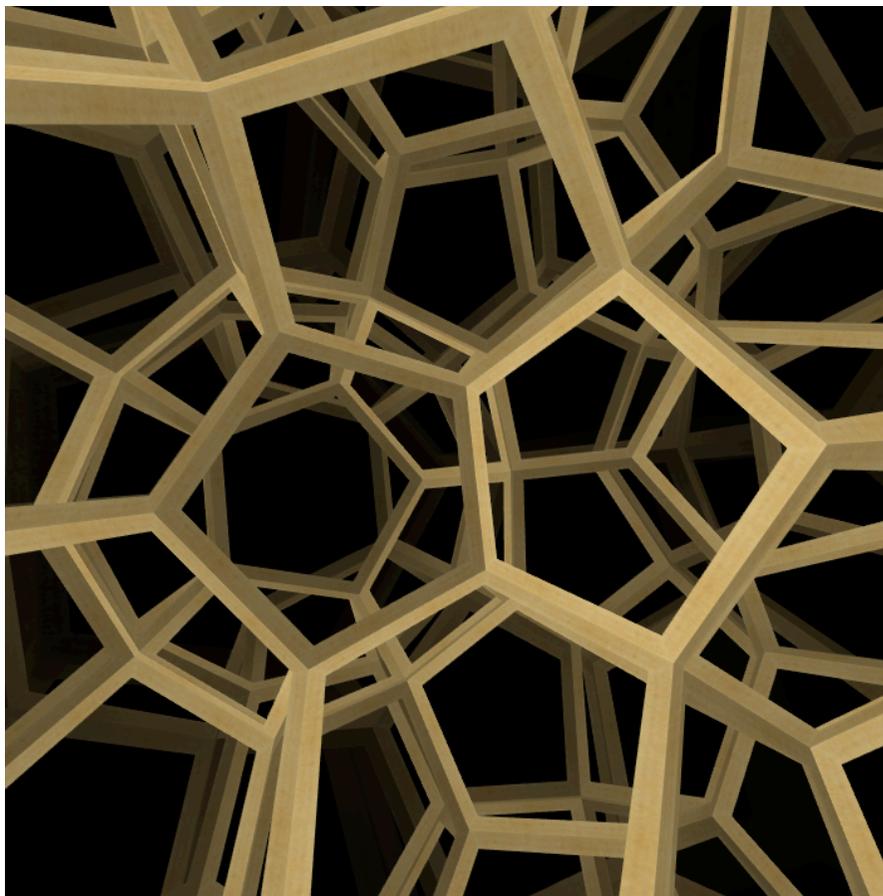
3次元双曲空間 曲率が負の一定値



これ以外に1次元と2次元の(捻った)積となるものが5通り存在

3次元球面の正則分割

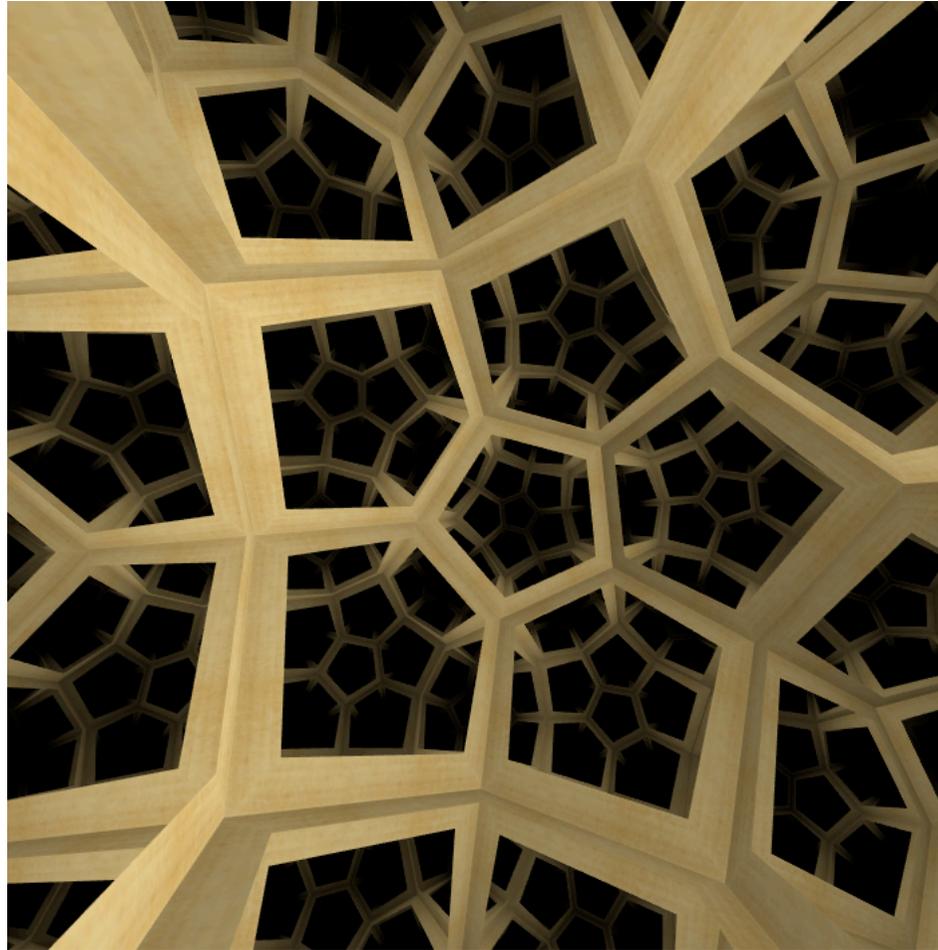
{5, 3, 3}



正12面体の対面を
1/10 回転してはり合わ
せものがポアンカレの
正12面体空間

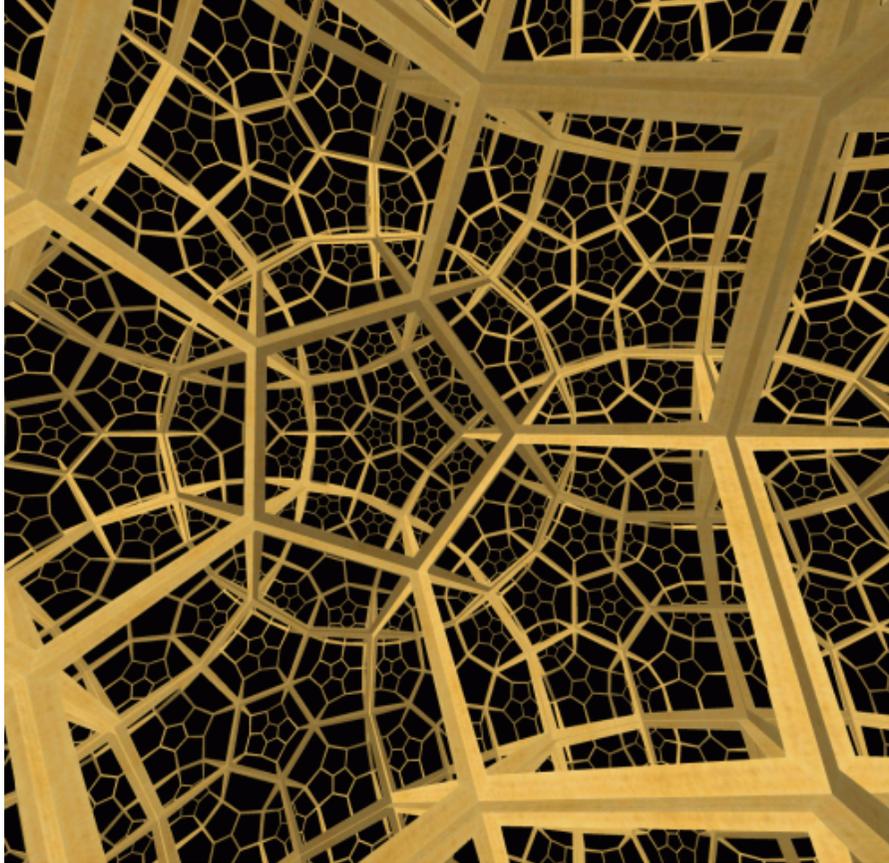
双曲空間の正則分割

$\{5, 3, 4\}$

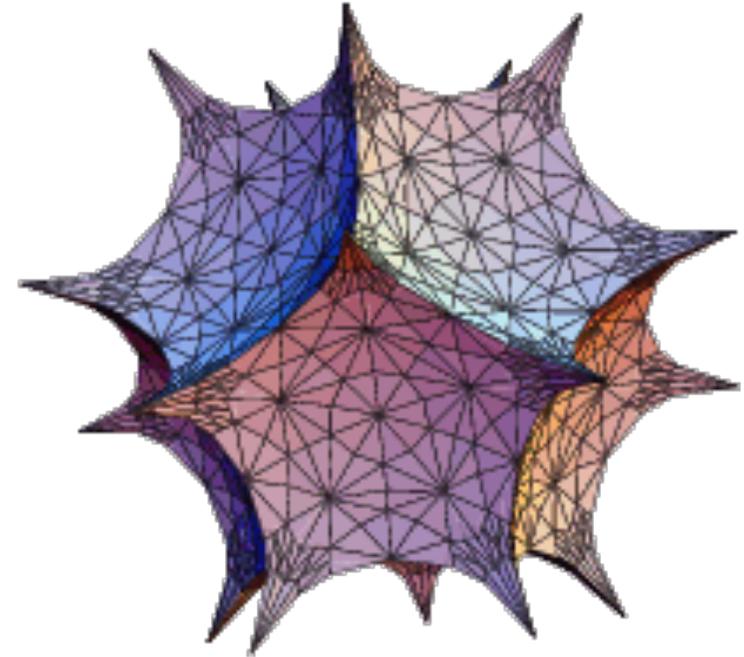


J. Weeks "Curved Space" Hyperbolic Seifert Weber

3次元双曲幾何構造



3次元双曲空間をモデルにもつ



3次元双曲正12面体

対面を $3/10$ 回転によって
はり合わせたのが
ザイフェルト・ウェーバー空間

3次元双曲幾何構造をもつ空間はきわめて多彩！

3次元空間の幾何化定理

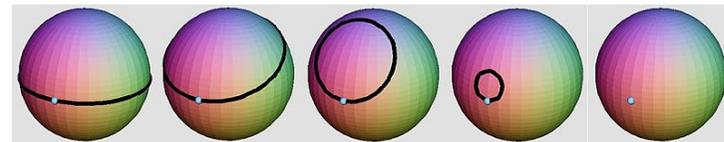
3次元多様体は、いくつかのピースに分割して、それぞれが8通りの幾何構造のいずれかをモデルとしてもつようにできる。

1980年代 サーストンの幾何化予想

2005年頃 ペレルマンによる解決

幾何化定理を用いてポアンカレ予想が解決

ポアンカレ予想
コンパクトで単連結な3次元多様体は
3次元球面と同相



膨張する宇宙

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

ハッブル定数

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

アインシュタイン方程式から $a(t)$ についての次の微分方程式が導かれる。

$$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

ρ 宇宙の物質密度

宇宙空間の幾何構造

宇宙空間が等質的かつ等方的であるとする、3次元ユークリッド空間、3次元球面、3次元双曲空間のいずれかの幾何構造をもつ。

上の3つの幾何構造に対応するアインシュタイン方程式の解が存在する（ロバートソン・ウォーカー計量）

ρ 宇宙の物質密度 H ハッブル定数（退行速度と距離の比）

$$\rho > \frac{3}{8\pi G} H^2$$

3次元球面幾何

体積有限

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} H^2$$

3次元ユークリッド幾何

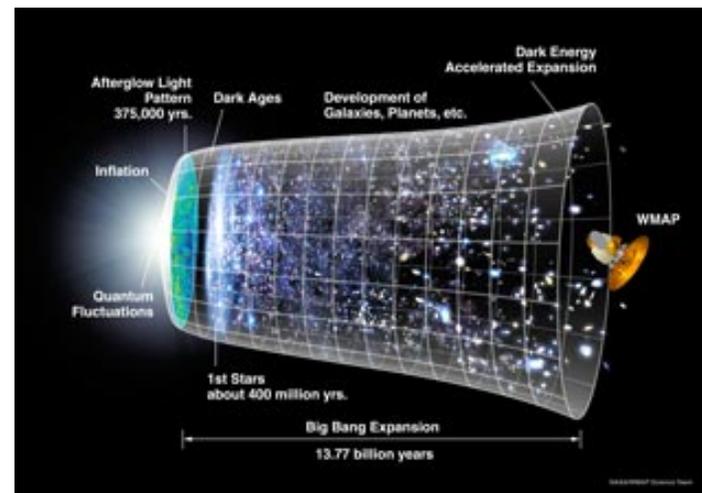
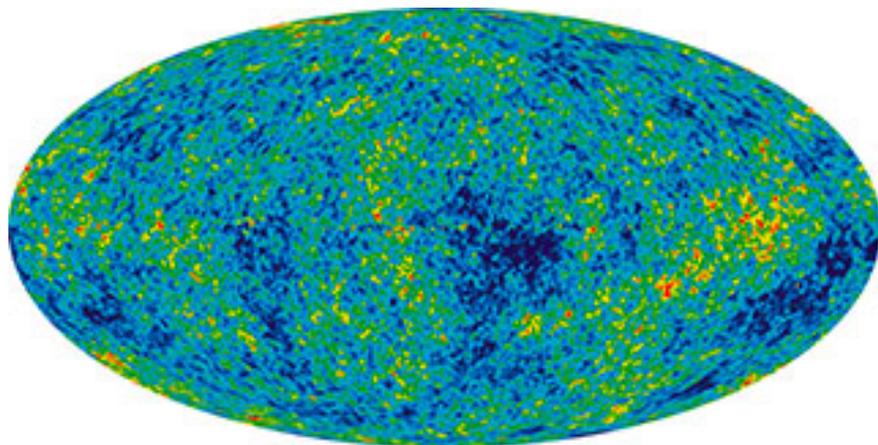
体積は有限にも無限にもなりうる

$$\rho < \frac{3}{8\pi G} H^2$$

3次元双曲幾何

体積は有限にも無限にもなりうる

WMAPによる観測

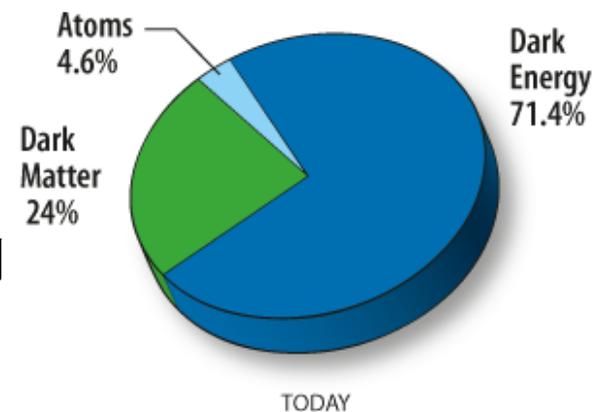


WMAPによるビッグバンの残り火
「マイクロ波宇宙背景放射」の観測により
宇宙のさまざまなパラメータが推定されている。

宇宙の曲率は 0.02 ± 0.02 というレベルで0に近い。
欧州の天文衛星「プランク」によりさらに精度の高い観測

フラットで有限な空間のかたちは10通りある。
双曲幾何構造, 球面幾何構造の可能性も
否定されているわけではない。

今後の重力波の観測などが重要な手がかりになると期待される。

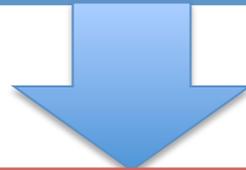


超弦理論が示唆する時空間像

重力理論と量子力学を統一的に扱うことは現代の物理学の大きな課題

1984年 Green, Schwartzらによって提唱された10次元の超弦理論は統一理論の候補として注目される。その後, Wittenら多くの研究者によって発展。

10次元時空の余分な6次元はCalabi-Yau多様体としてコンパクト化される。数学的にはCalabi-Yau多様体は楕円曲線, K3曲面の複素3次元版。



数学にさまざまな興味深い研究対象と予想を提供している。

ミラー対称性

AdS/CFT対応

.....

まとめ

- 空間の曲率は内在的に決まり、空間の中から観測可能である.
- 3次元の広がりをもつ空間の幾何構造のモデルは数学的には、完全に分類されている.
- モデルが決まっても、3次元空間の可能性は有限なもの、無限なものを含めて多様に存在する.
- 空間の幾何構造を特定するには、観測データが必要であり、天文学者と物理学者、数学者の協力が不可欠である.

参考文献

小林昭七 「ユークリッド幾何学から現代幾何学へ」 日本評論社

小林昭七 「曲線と曲面の微分幾何」 裳華房

P.M.H. ウイルソン 小島・石川訳 「曲空間の幾何学」 朝倉書店

河野俊丈 「結晶群」 共立出版

河野俊丈 「曲面の幾何構造とモジュライ」 日本評論社

木原太郎 「幾何学と宇宙」 東京大学出版会

須藤靖 「一般相対論入門」 日本評論社

太田浩一他編 「アインシュタインレクチャーズ@駒場」 東京大学出版会