幾何学XD・微分幾何学　レポート問題

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/˜kohno/lectures.html

1.

(1) $\mathbf{R}^3$ 内のトーラス

$$x = (a\cos u^1 + b)\cos u^2, \quad y = (a\cos u^1 + b)\sin u^2, \quad z = a\sin u^1$$

$$0 < a < b, \quad 0 \leq u^1 < 2\pi, \quad 0 \leq u^2 < 2\pi$$

について，$\mathbf{R}^3$ から誘導されるリーマン計量を入れ，これと両立する Riemann 接続を考える．このとき，Riemann 計量 g_{ij}, Riemann-Christoffel 記号 Γ_{ij}^k, Riemann の曲率テンソル R_{ijk}^ℓ, Ricci 曲率 R_{ij}, スカラー曲率 R を，それぞれ計算せよ．

(2) トーラスを

$$(u^1, u^2) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u^1, \sin u^1, \cos u^2, \sin u^2)$$

によって，$\mathbf{R}^4$ の部分多様体とみなして，$\mathbf{R}^4$ から誘導されるリーマン計量と，これと両立する Riemann 接続を入れるとき，スカラー曲率 R を計算せよ．また，このトーラスの測地線を記述せよ．

2. M を連結な Riemann 多様体として，M 上の異なる2点 p, q をとる．γ, γ' を p, q を結ぶ滑らかな曲線として，γ, γ' に沿った，Riemann 接続に関する平行なベクトル場を，それぞれを考える．これらの2つのベクトル場について，p における値が一致していても，q における値は必ずしも一致しないことを，例を用いて示せ．

3. K を定数として $\mathbf{R}^n$ 上で，Riemann 計量

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left(1 + \frac{K}{4}\sum_{i=1}^n (x^i)^2\right)^2}$$

を考える．ただし，$K < 0$ のとき，計量の定義域は半径 $\frac{2}{\sqrt{-K}}$ の球の内部である．

(1) この計量についての断面曲率は K であることを示せ．

(2) $K > 0$ のとき，$\mathbf{R}^n$ は上の計量について完備でないことを示せ．