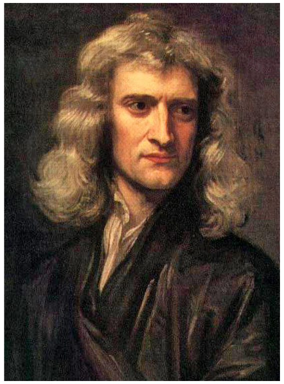
数学者は無限をどのように捉えてきたか

河野 俊丈
東京大学大学院数理科学研究科

微分積分学の発見



ニュートン

ライプニッツ

微分積分学は17世紀に、ニュートン、ライプニッツによって確立された。
ニュートンは、瞬間の速度（流率）を極限の考え方を用いて、微分係数として定式化した。

微分係数の定義

関数 $f(x)$ において，x の値が a から $a+h$ まで変化するときの平均変化率は

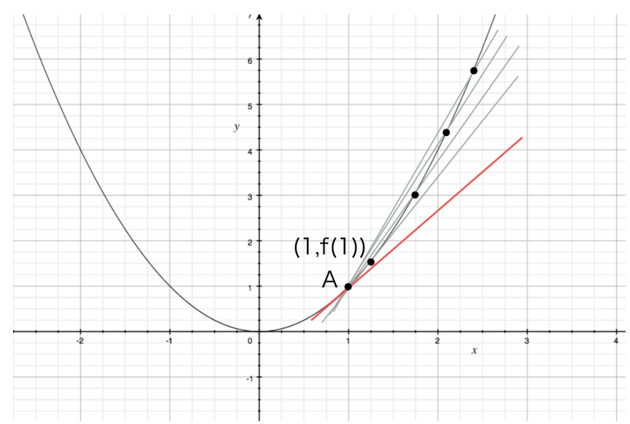
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

である。この式で，h を限りなく0に近づけたときの極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**（びぶんけいすう）といい，$f'(a)$ で表す。

微分係数　$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



微分積分学の基礎としての実数論

微分積分学を厳密に展開するためには、極限の概念を正確に定式化すること、さらには、実数の定義を確立することが必要である。

高校の数学では、無理数は有理数ではない実数と説明されるが、実数とは何かということには、正確にはふれられてはいない。

実数の正確な定義は19世紀末にこれらの数学者によってなされた。

- ◆ 実数は無限小数？
- ◆ 0.9999 .... は 1 と同じ ？

ワイエルシュトラス

デデキント

コーシー

実数の正確な定義は、有理数に収束する有理数列の極限を付け加えることによってなされる。

無理数の有理数による近似

無理数の連分数展開

$$\alpha = \sqrt{2} = 1.41421356\cdots$$

$$\begin{aligned} \alpha - 1 &= \frac{1}{1+\alpha} \\ \alpha &= 1 + \frac{1}{1+\alpha} \\ \alpha &= 1 + \frac{1}{1+(1+\frac{1}{1+\alpha})} \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$$

黄金比の連分数展開

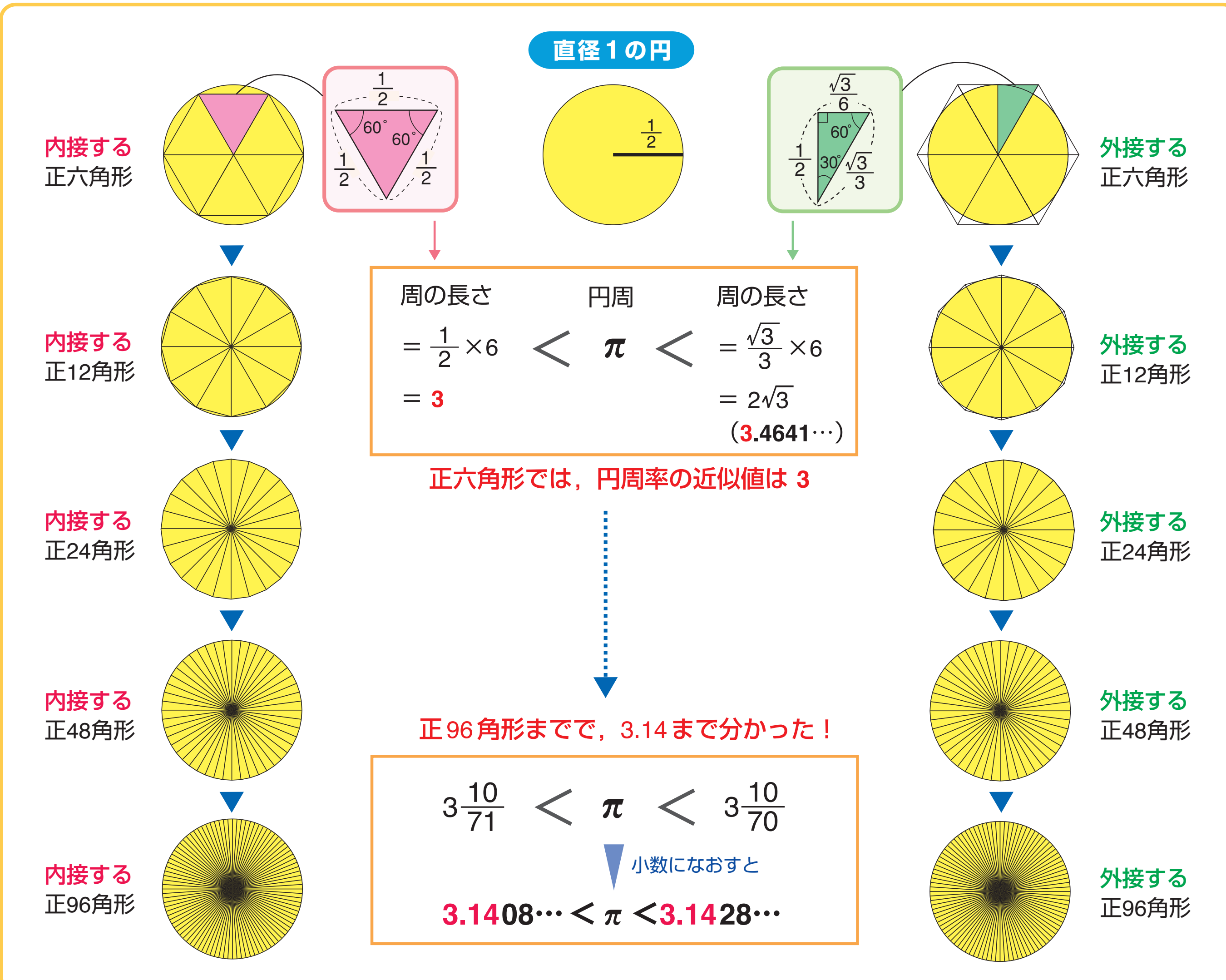
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\ldots = 1 + \frac{1}{1.61803\ldots} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \ldots$$

黄金比に収束する有理数の列

分子、分母にフィボナッチ数列が現れる！

円周率の有理数による近似



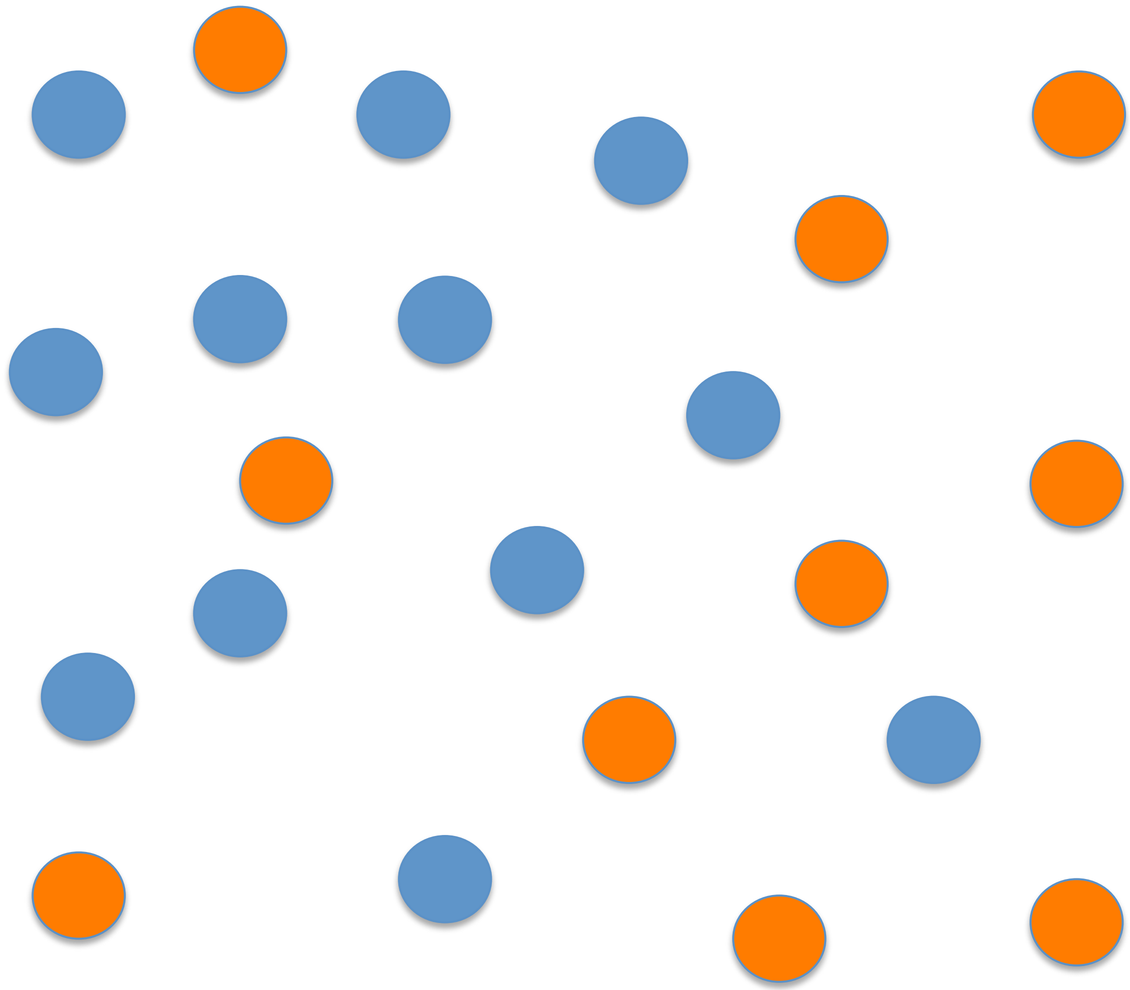
関孝和

日本でも和算で
17世紀に微分、極限
が考えられた。

円周率について
関孝和は10桁
建部賢弘は41桁
の近似値を求めた。

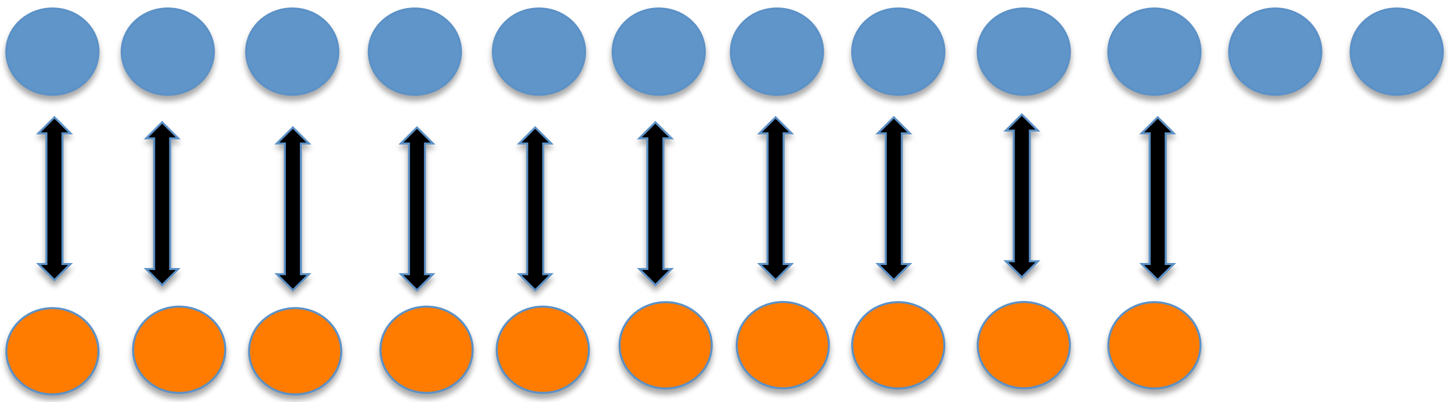
円周率が無理数で
あることの証明には
大学初年級の数学
が必要

個数を比較する方法は？



青とオレンジのボールの個数を比較するにはどうすれば良いか？

一対一対応をつける



自然数の集合

N ={ 1, 2, 3, 4, …… }

と一対一対応がつける集合を可算集合とよぶ。

数えあげることができる「無限」

無限にも大小がある

19世紀末にカントールは集合論の基礎を築く過程で「無限」の大小について考察した。

1, 2, 3, 4, 5, ……

2, 4, 6, 8, 10, …..

正の偶数全体は自然数と一対一対応がつけられるので可算集合。「無限」の大小は自然数と同じ。

有理数全体も可算集合

こうやればうまく対応付けられる

0/5	1/5	2/5	3/5	4/5	
0/4	1/4	2/4	3/4	4/4	
0/3	1/3	2/3	3/3	4/3	
0/2	1/2	2/2	3/2	4/2	
0	1	2	3	4	……

カントール

実数は非可算無限

カントールの対角線論法により、実数全体は可算集合ではないことが示される。

自然数全体よりも本質的に大きな「無限」
実数全体は数えあげることができない！

1	0.1234567800866878…..
2	1.9739872897987897…..
3	-23.4679898798797989……
4	9.0836668768768768……
5	100.9472938716896878……
6	0.2876716538797979…..
7	…………………………

0.211112⋯⋯

実数全体が可算集合であると仮定して左のように順番に並べ、対角線部分に注目する。

$a_1, a_2, a_3, \cdots$を次のように定義する

$$a_n = \begin{cases} 2 & n\text{番目の実数の小数点以下第}n\text{位が}1\text{のとき} \\ 1 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

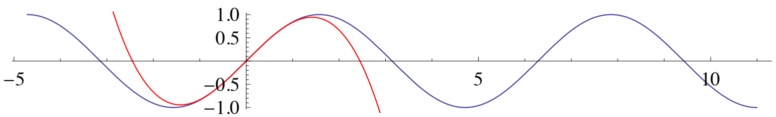
実数$0.a_1a_2a_3\cdots\cdots$を考える

これは上に並べた実数のどれとも異なる

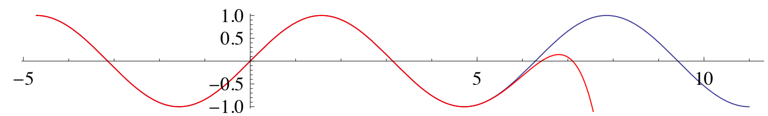
大学で学ぶ数学から(1) -- テーラー展開 --

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots$$

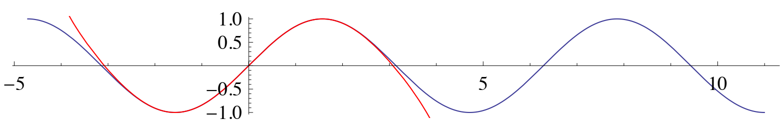
3次近似



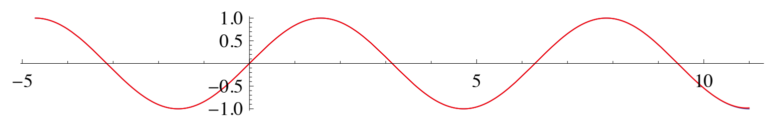
15次近似



7次近似



29次近似



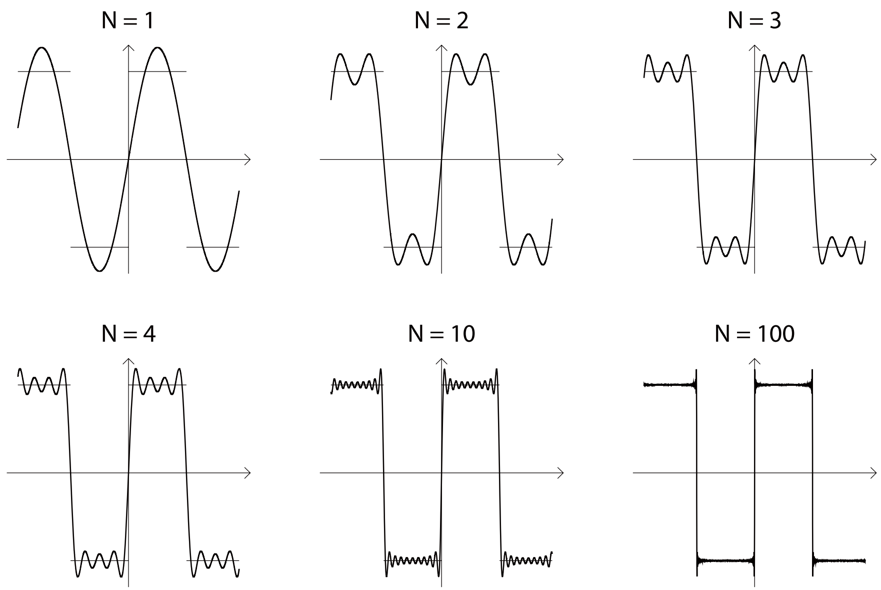
大学で学ぶ数学から(2) -- フーリエ級数 --

周期 2π の関数

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

この関数を次の無限級数で表す

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1} + \cdots\right)$$



第N項で打ち切った
関数のグラフ

素数について

素数とは 2 以上の自然数で 1 とその数自身以外には約数を持たない数

100 以下の素数は 25 個

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

素数は無限に存在する

紀元前3、4世紀に書かれた「ユークリッド原論」では素数が無限個存在することが以下のように証明されている。

素数が有限個であると仮定して矛盾を導く

素数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ に対して，それ以外の素数が存在することを示す．

$$M := p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

とおくと，M を割り切る素数が存在する．
その一つ p を取る (例えば一番小さなものを取れば良い)．
この p は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とは異なる．
なぜなら p は M を割り切るが，$p_1, p_2, \ldots, p_n$ は M を割り切らないから．

ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

オイラー、リーマンは
ゼータ関数によって素数
がどのように分布するかを
研究した。

オイラー

S=1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

リーマン

上の和が無限大に発散することは、素数が無限個存在
することの別証明を与える。

バーゼル問題

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right)$$

この無限級数の和を求めよ

1735年にオイラーが解決

$$(1) \qquad \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x}{1\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{1\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right)\cdots.$$

隣接する2項を掛け合わせると

$$(2) \qquad \frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$