

# 次元とは何か

河野 俊丈

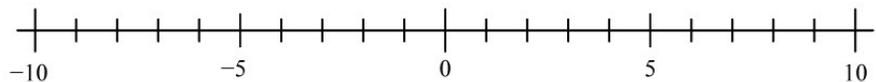
東京大学大学院数理科学研究科

2019年5月25日

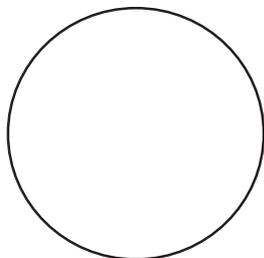
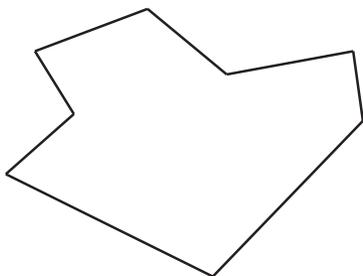
NHK講座「発展する現代数学」

# 次元は点の位置をきめるために必要な数値の個数

## 1次元の図形

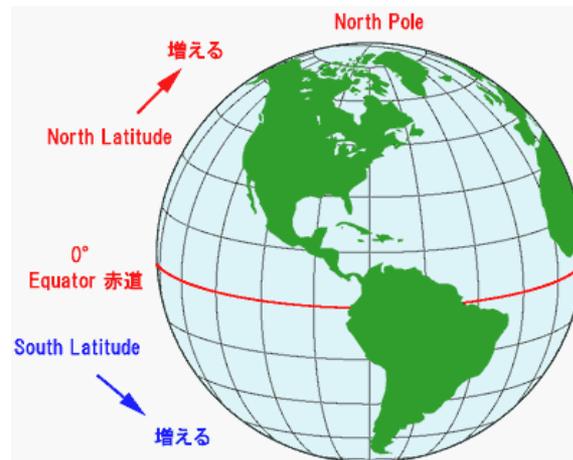


数直線上の点を指定するには一つの実数が必要

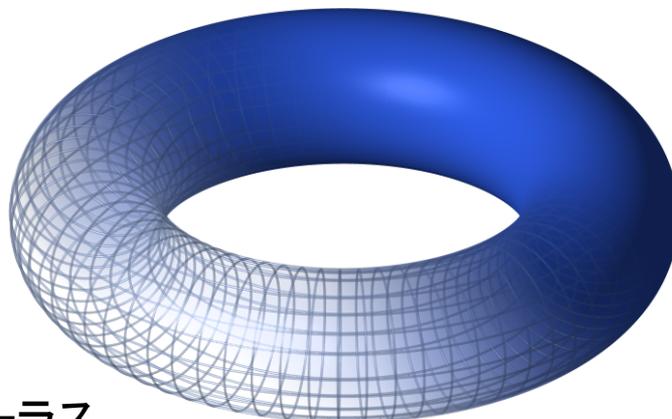


ルネ・デカルト  
(1596～1650)

## 2次元の図形



地球上の点を指定するには経度と緯度が必要



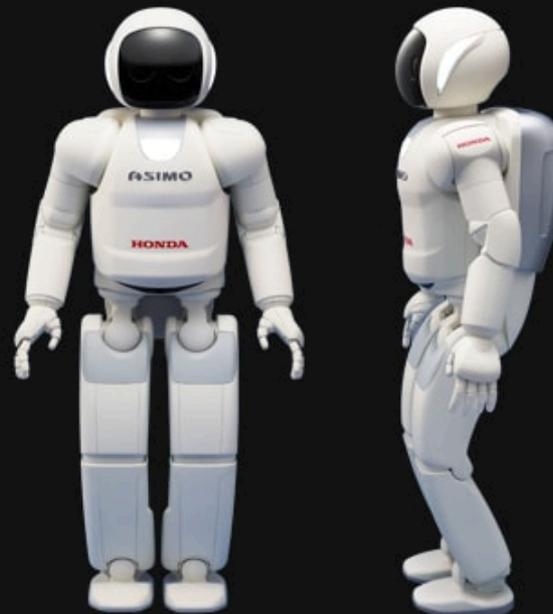
トーラス

# 次元は運動を表す自由度にも用いられる

## 基本仕様

2011年11月時点

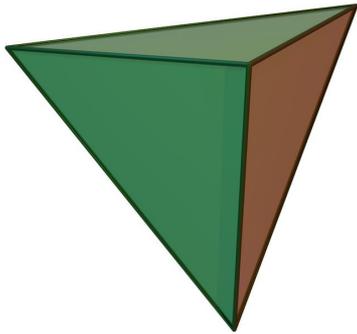
サイズ	身長	130cm
	幅	45cm
	奥行	34cm
	重量	48kg (従来比 -6kg)
性能	最大速度	9km/h (従来 時速6km)
	稼働時間	40分 (歩行時) ※自動充電機能により連続稼働が可能
関節自由度	頭部	3
	腕部	7×2
	手部	13×2
	腰部	2
	脚部	6×2
	合計	57自由度 (従来比 +23自由度)



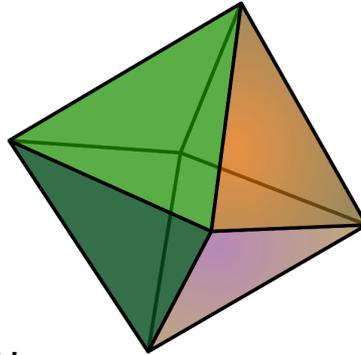
ASIMOの自由度は57

動きを記述するには57個の数値が必要

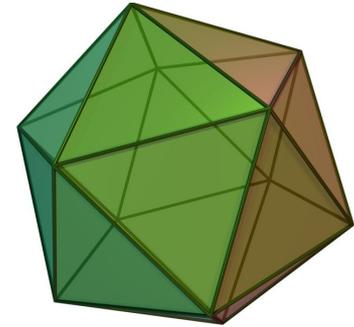
# 3次元空間内の正多面体 2次元の図形



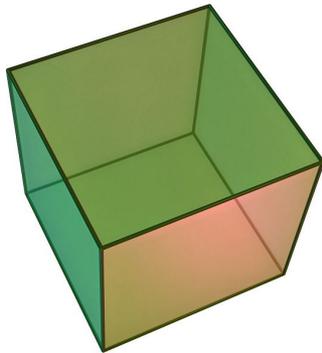
正4面体



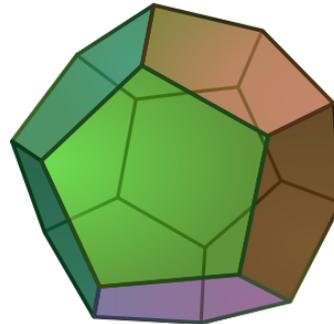
正8面体



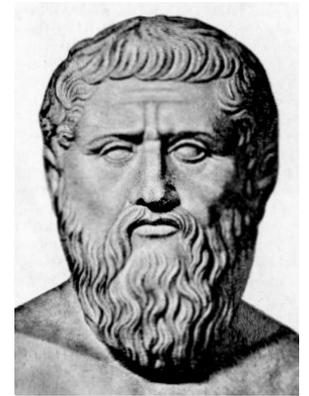
正20面体



立方体

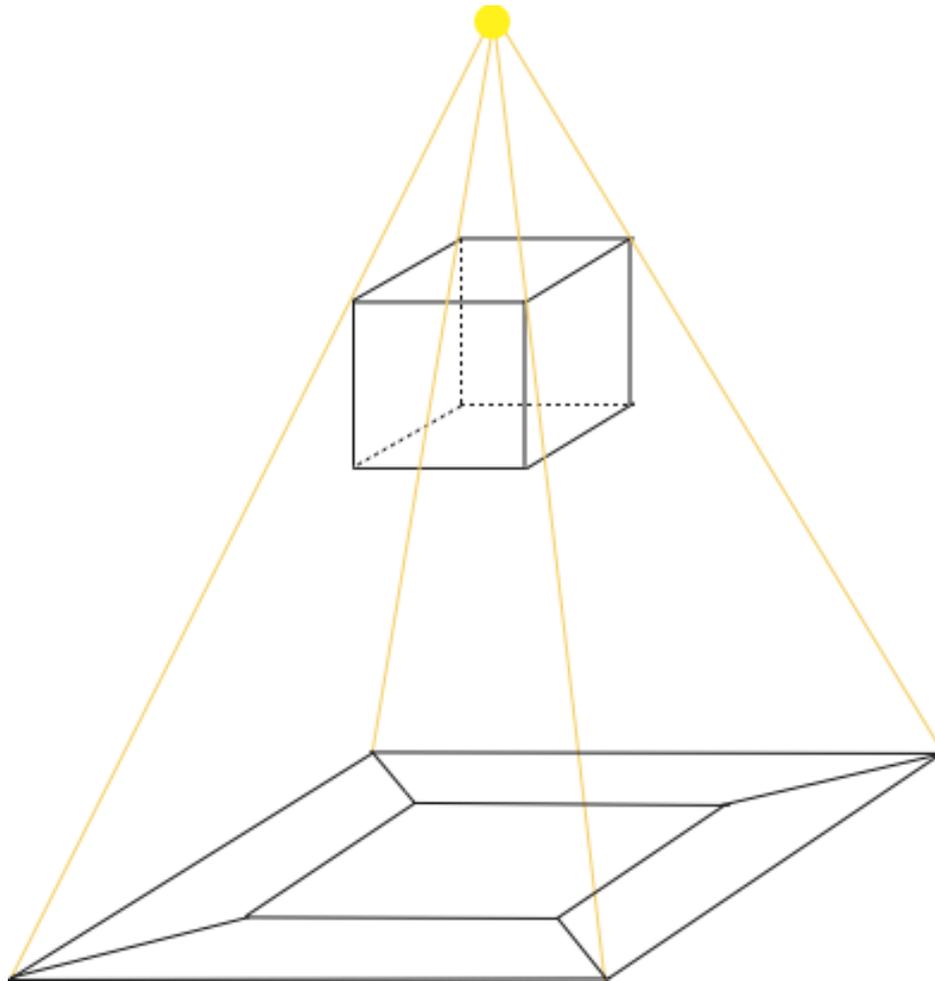


正12面体



Plato

# 立方体の射影



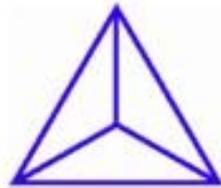
1点から発する光  
による射影.

立方体の1つの面  
を取り除いてそこ  
から内部を眺めた  
像が得られる.

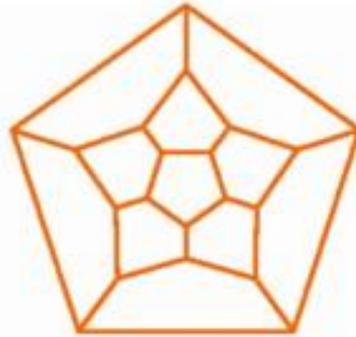
# 正多面体の射影

1つの面を水平面と平行におき点光源からの光で射影する.

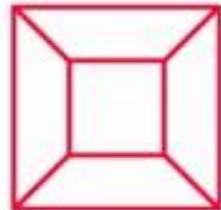
正4面体



正12面体



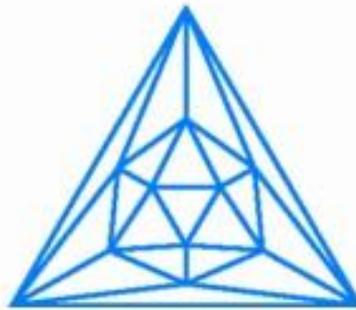
立方体



正8面体



正20面体

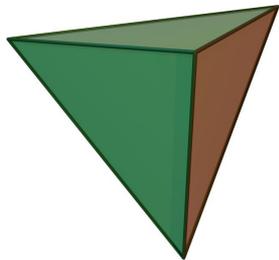


シュレーゲル図式

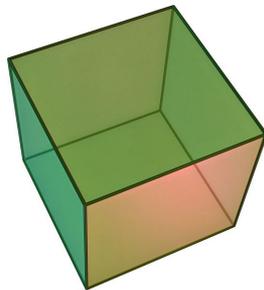
# シュレフリー記号

$\{n\}$  正  $n$  角形

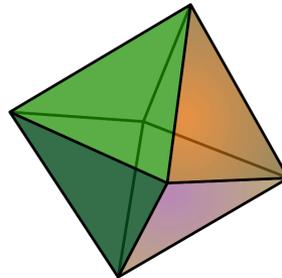
$\{p, q\}$  正多角形  $\{p\}$  がそれぞれの頂点のまわりに  $q$  個集まる.



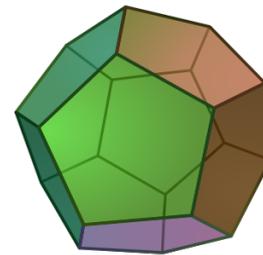
$\{3, 3\}$



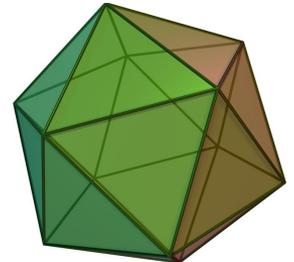
$\{4, 3\}$



$\{3, 4\}$

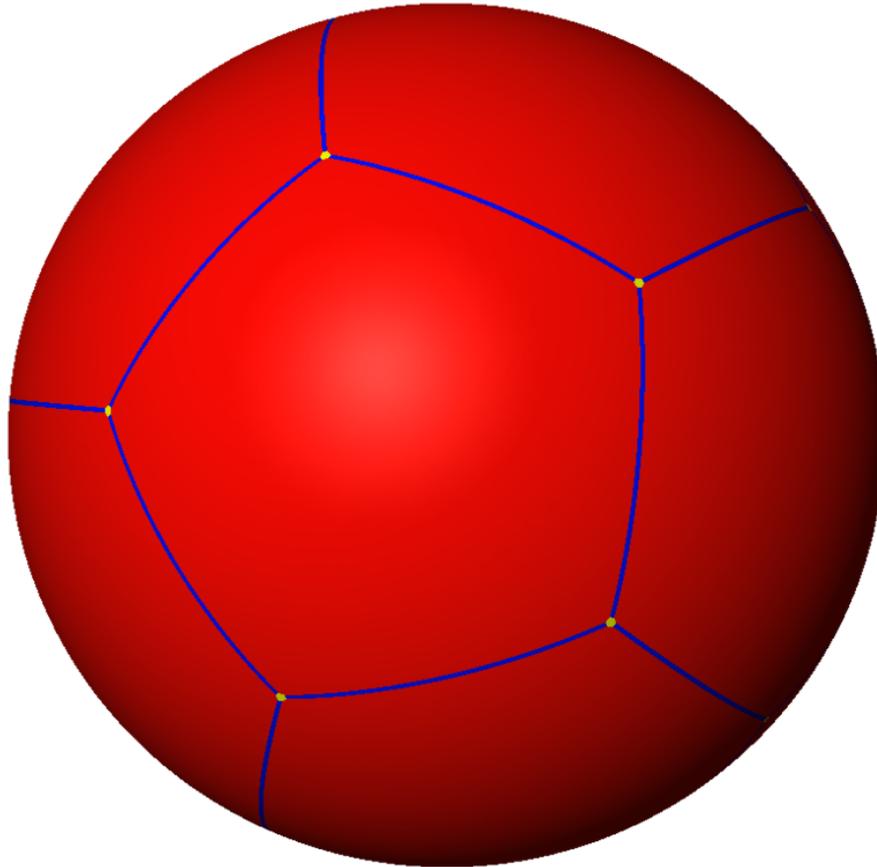


$\{5, 3\}$



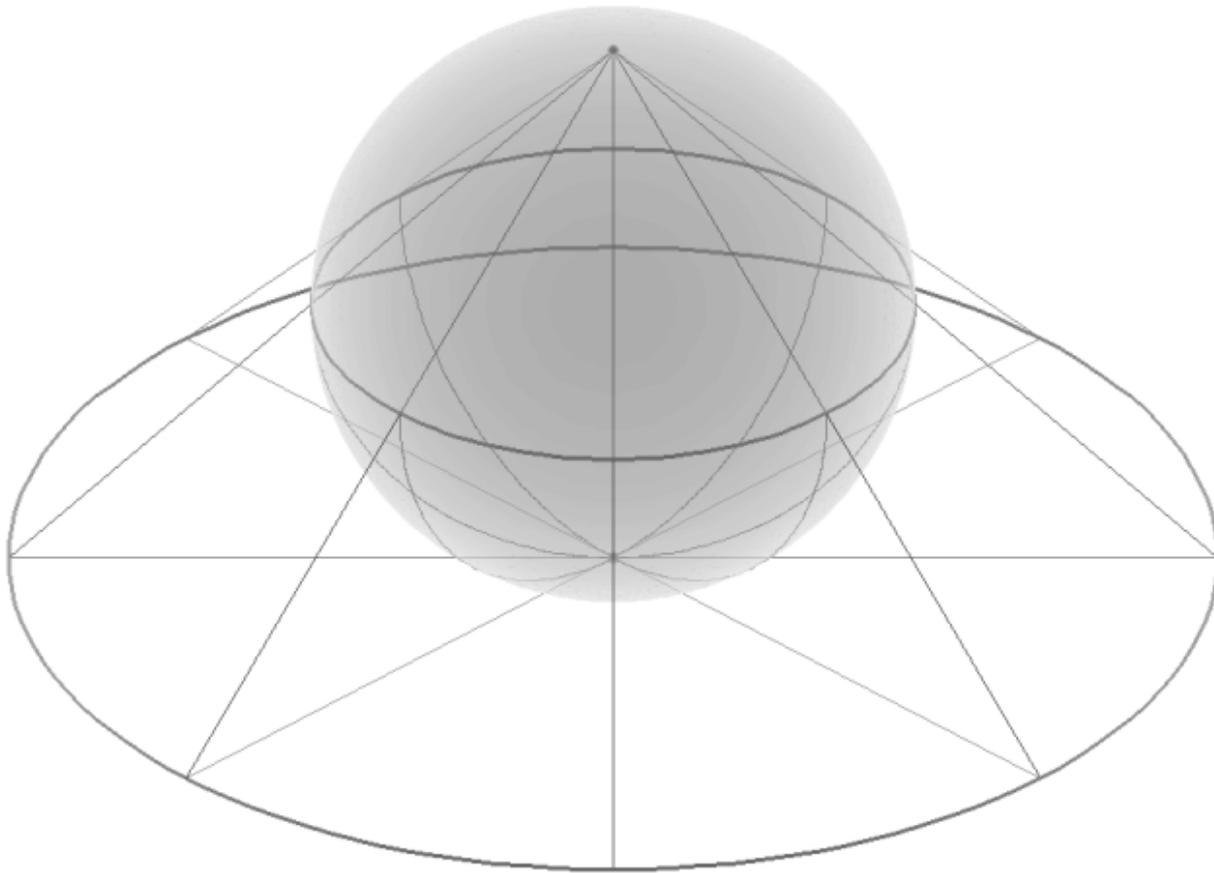
$\{3, 5\}$

# 球面上の正12面体



辺は大円の弧  
正5角形の内角は $120^\circ$

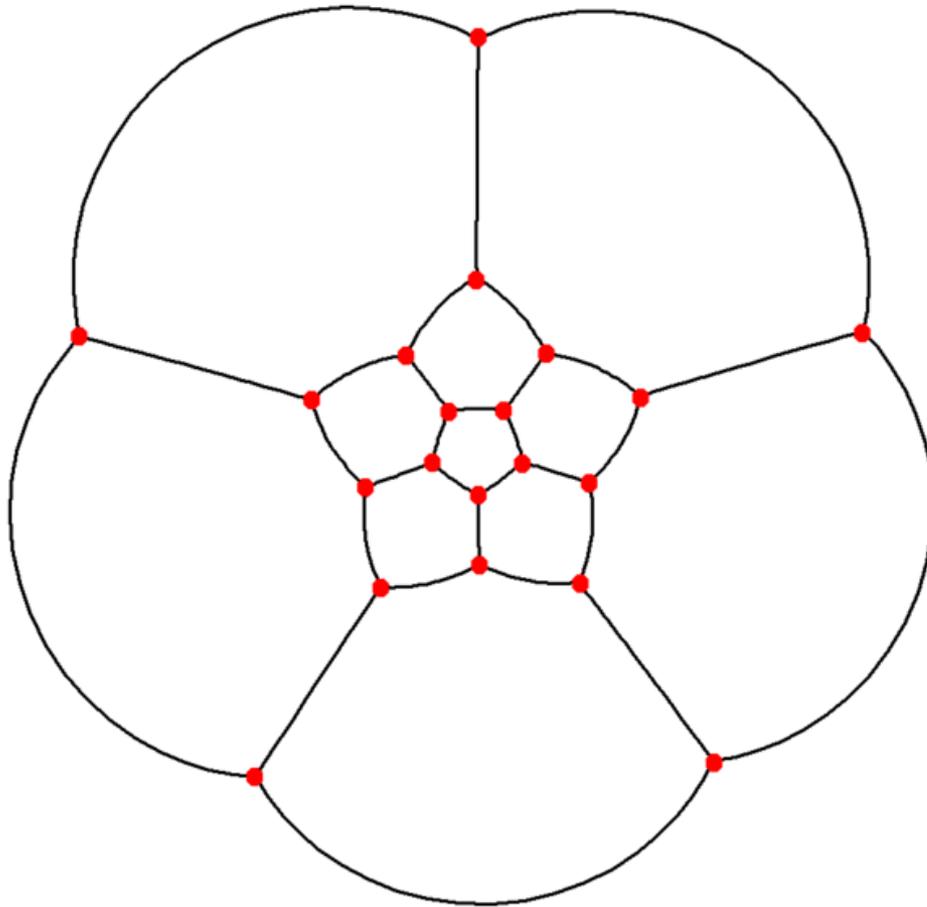
# 球面の立体射影



球面の北極点  
以外の点は平面  
と1対1に対応

球面は平面に  
無限遠点をつけ  
加えたものとみな  
せる。

# 正12面体の立体射影

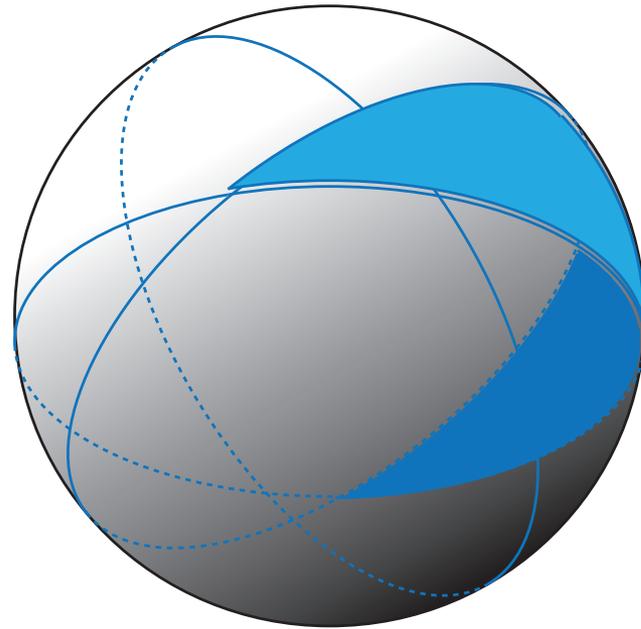
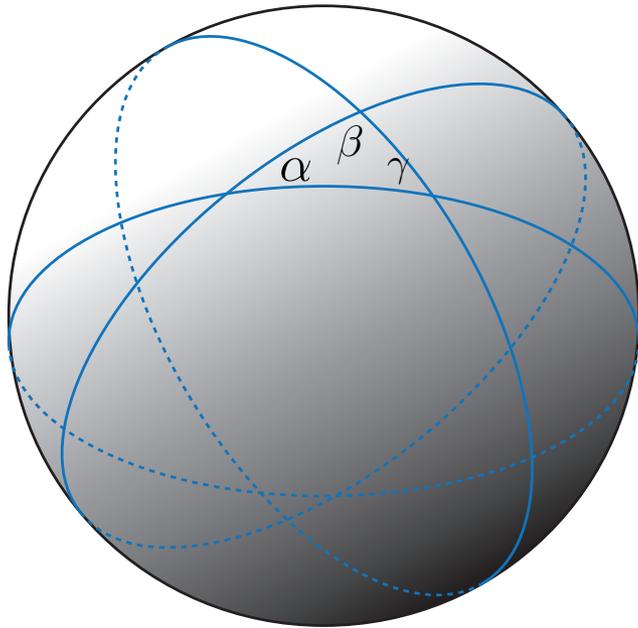


平面の12個の領域  
への分割.

外側の領域も無限遠点  
を加えて, 正12面体の  
1つの面に対応.

射影によって角度は  
保たれる.

# 単位球面上の三角形



$L(\alpha)$

球面三角形の面積

$$A = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

右の青く塗った部分の面積は  $2\alpha$

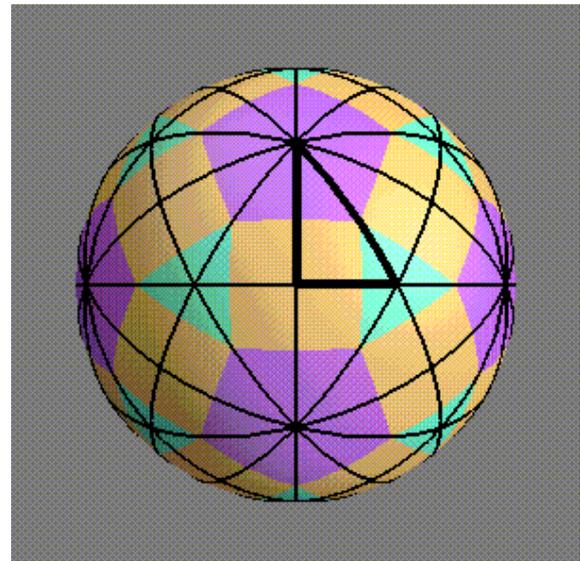
$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

## 球面の正則分割

シュレフリー記号  $\{p, q\}$  で表される球面の正則分割（タイルばり）が存在するとき，球面上に内角  $\pi/p, \pi/q, \pi/2$  の三角形が描かれる。

$$\frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q} + \frac{\pi}{2} - \pi > 0 \text{ より}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$



$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

上の不等式を満たす2以上の整数  $(p, q)$  の組

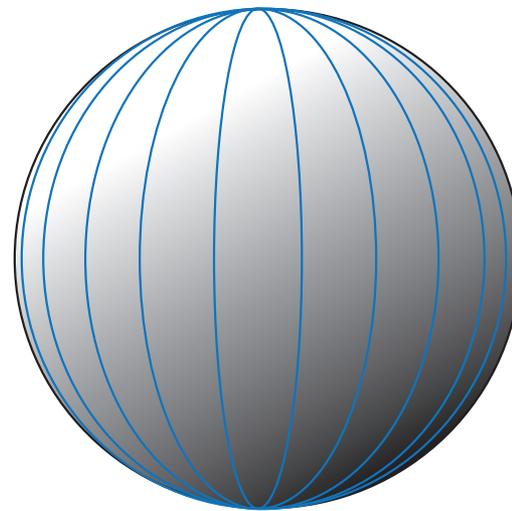
正多面体のシュレフリー記号

$\{p, q\}$

$\{3, 3\}, \{4, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 3\}, \{3, 5\}$

および

$\{2, n\}, \{n, 2\}$ ,  $n$ は2以上の整数



## タイプ $\{p, q\}$ のタイルばり

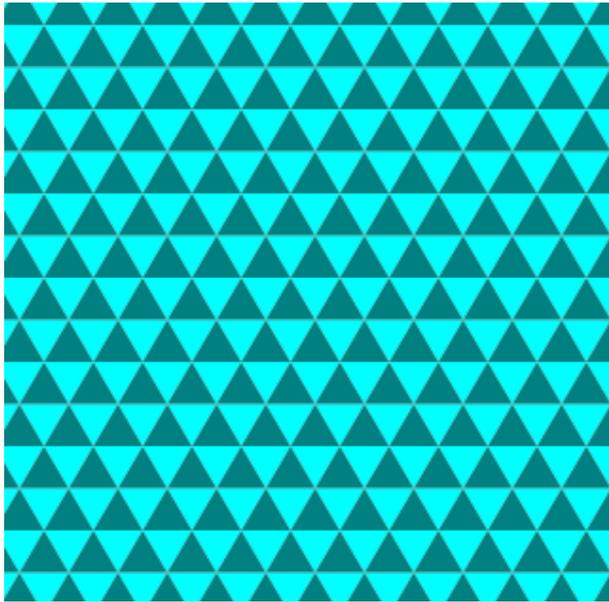
ユークリッド平面

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$$

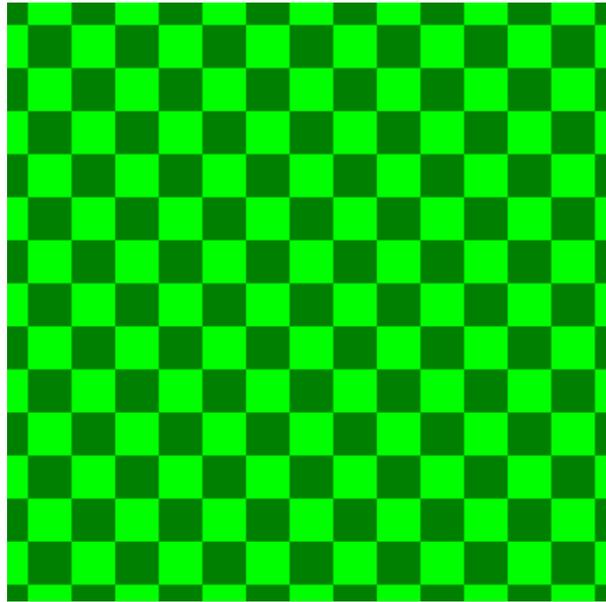
球面

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

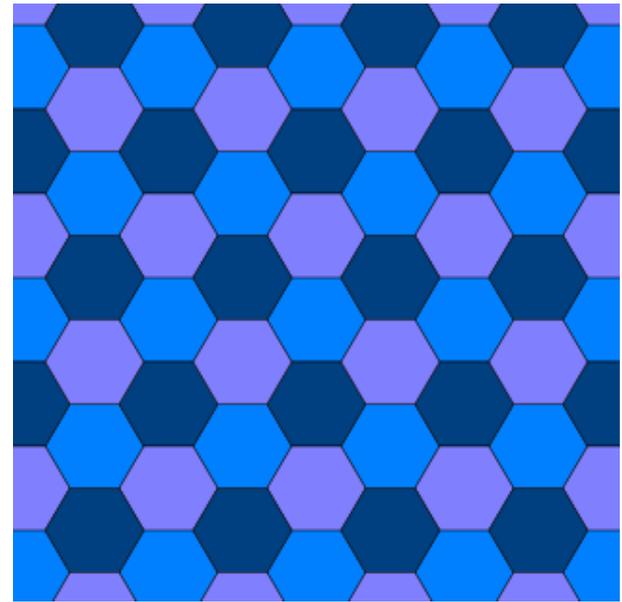
# ユークリッド平面の正則分割 (タイルばり)



{3, 6}



{4, 4}



{6, 3}

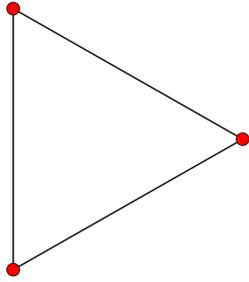


# 4次元空間の正多胞体

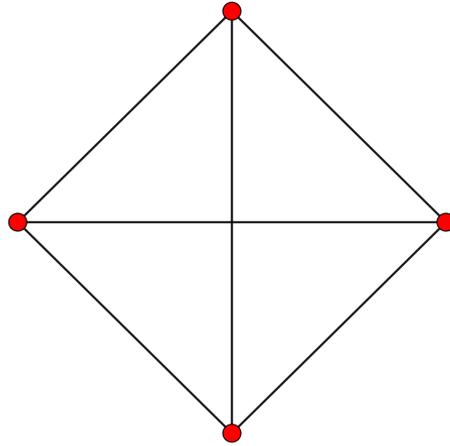
# 4次元空間の図形



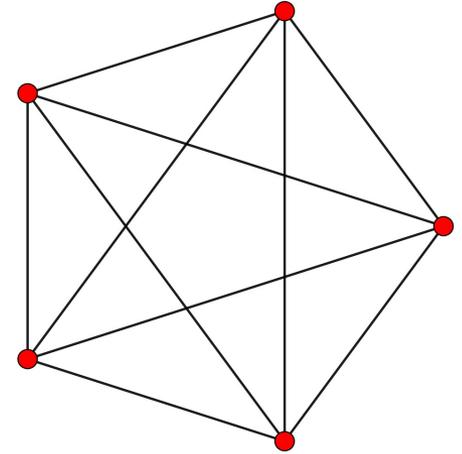
1次元  
線分



2次元  
正3角形

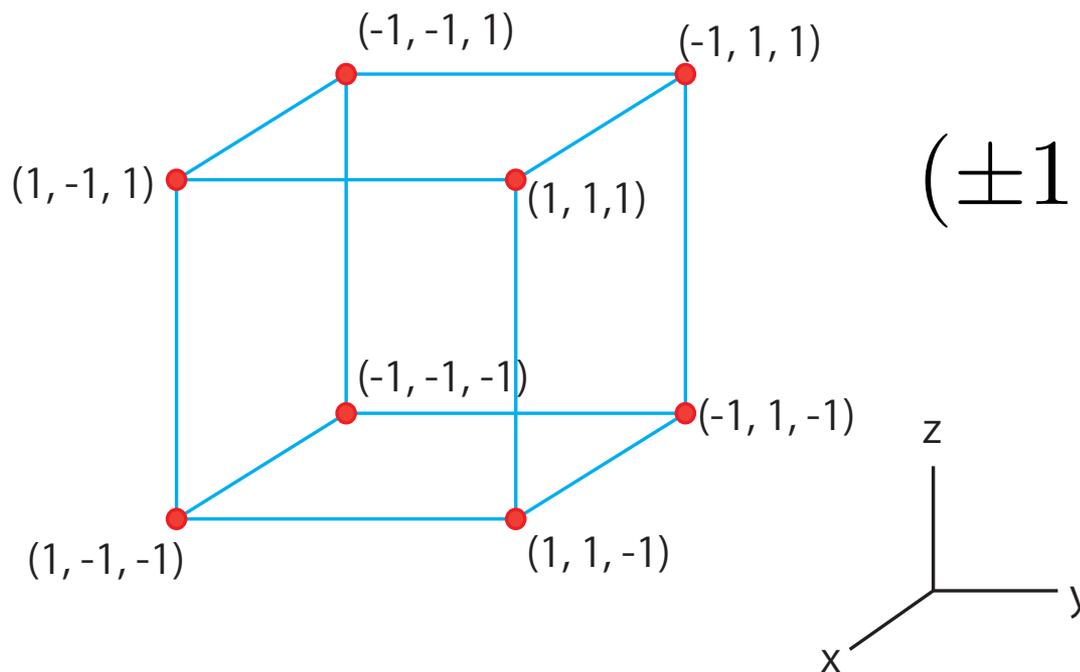


3次元  
正4面体



4次元空間の図形の影？

# 立方体の頂点を3次元ユークリッド空間の座標で表す



$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$$

頂点の座標として  $(1, 1, 1)$  および座標の符号を変えた8個がとれる.

# 4次元ユークリッド空間

4つの実数の組み  $(a, b, c, d)$  を座標に持つ  
数ベクトル空間

2点間の距離を次のように測る.

$P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ,  $Q(y_1, y_2, y_3, y_4)$  の距離を

$$\sqrt{\sum_{i=1}^4 (x_i - y_i)^2}$$

で定める.

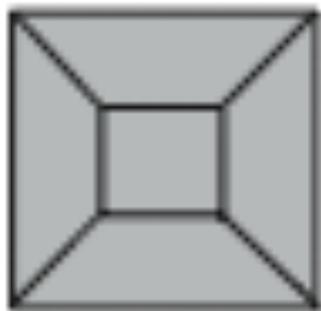
# 4次元空間の立方体 hypercube

4次元ユークリッド空間で  
(1, 1, 1, 1) および座標の符号を変えた16個の点を  
頂点にもつ.

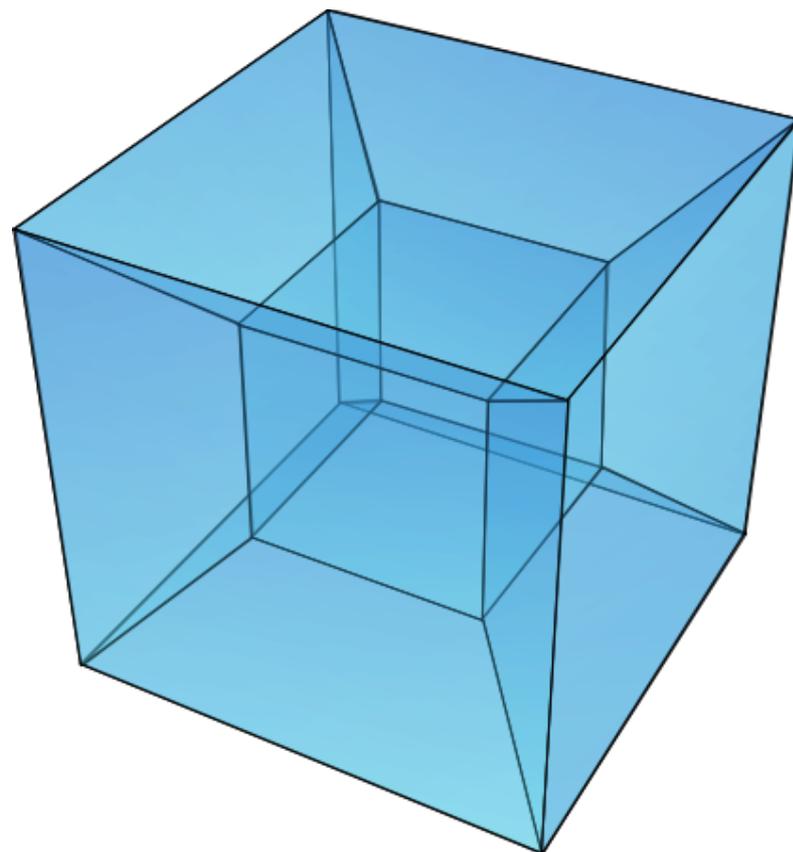
## 頂点の座標

$(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$

# 4次元空間の立方体のシュレーゲル図式



立方体の射影図



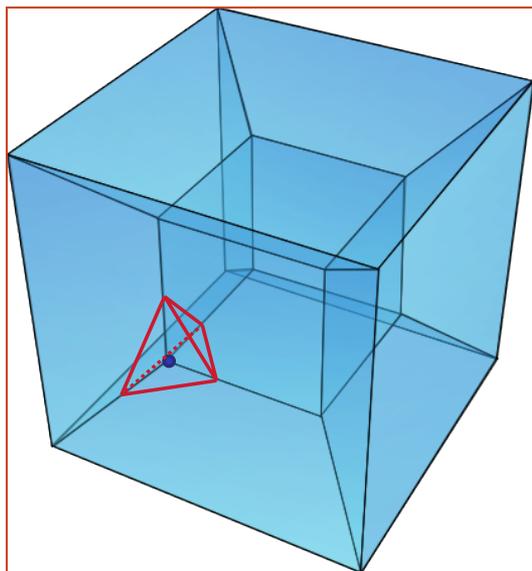
0-セル(頂点)	16
1-セル(辺)	32
2-セル(面)	24
3-セル	8

# 4次元空間の正多胞体のシュレフリー記号

シュレフリー記号  $\{p, q, r\}$

正多面体  $\{p, q\}$  が辺のまわりに  $r$  個集まる.

各頂点のまわりの切り口のタイプが  $\{q, r\}$ .



3次元空間の分割: 正多胞体

正8胞体 (hypercube)

$\{4, 3, 3\}$

シュレフリー記号  $\{p, q, r\}$  で表される4次元正多胞体が存在するための必要条件

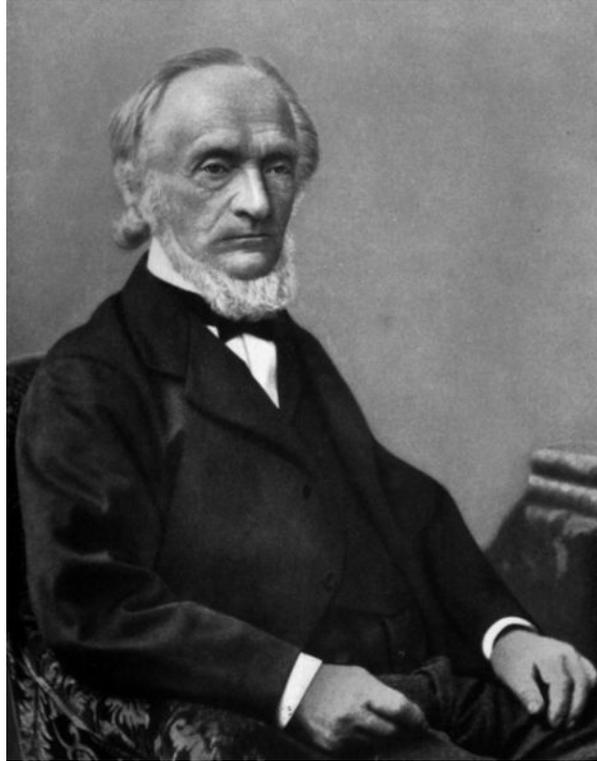
$$\sin \frac{\pi}{p} \sin \frac{\pi}{r} > \cos \frac{\pi}{q}$$

この不等式の導出については参考資料

## 4次元空間の正多胞体(regular polytope)の分類

	シュレフリー記号	3-セル	頂点数
正5胞体	{3, 3, 3}	正4面体	5
正8胞体	{4, 3, 3}	立方体	16
正16胞体	{3, 3, 4}	正4面体	8
正24胞体	{3, 4, 3}	正8面体	24
正120胞体	{5, 3, 3}	正12面体	600
正600胞体	{3, 3, 5}	正4面体	120

シュレフリーにより19世紀半ばに示された。

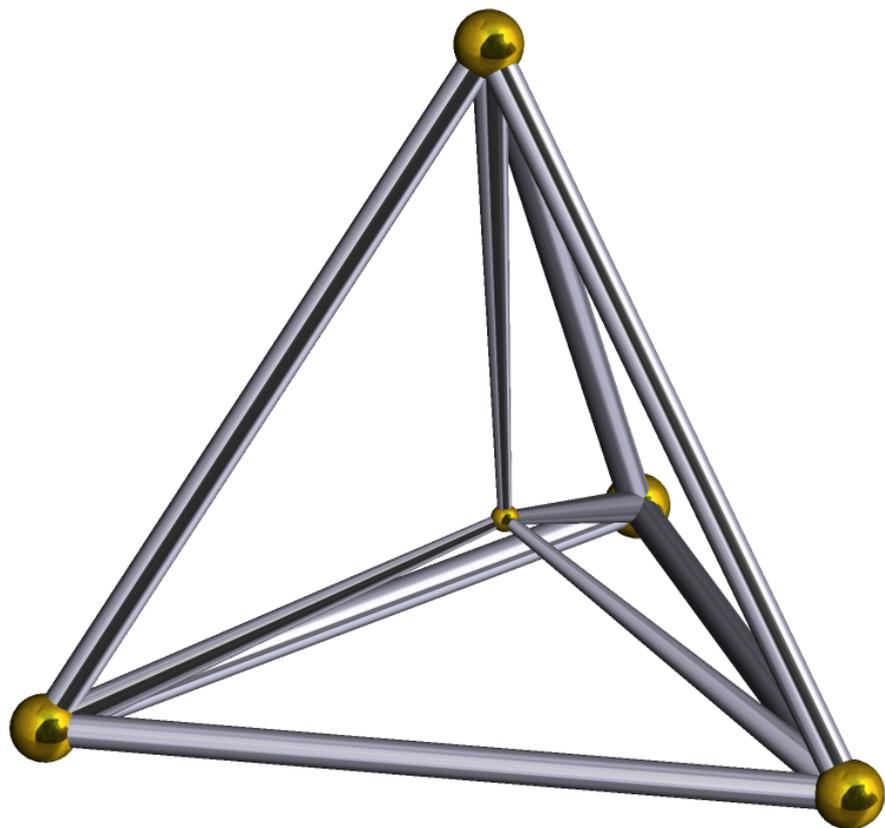


# Ludwig Schläfli (1814 - 1895)

Theorie der vielfachen Kontinuität  
1850 - 52

Riemann : *Hypothesen welche der Geometrie zu  
Grunde liegen* 1854

正5胞体 (4次元单体)  $\{3, 3, 3\}$



# 正16胞体

正8面体の4次元版

3次元ユークリッド空間の  
正8面体として頂点の座標を

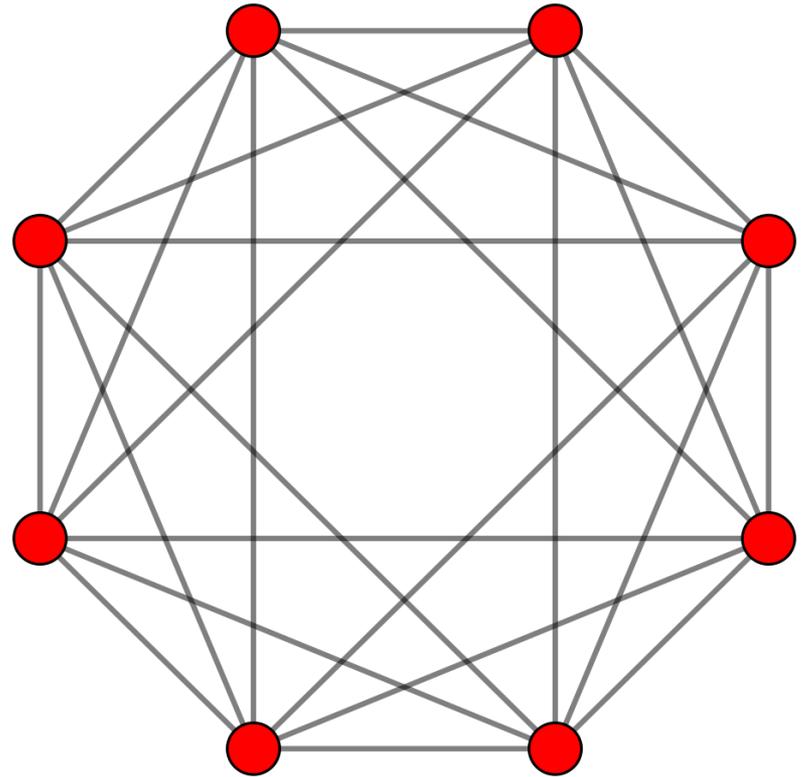
$$(\pm 2, 0, 0)$$

およびこれらの座標の入れ替  
えからなる6点をとる.

4次元ユークリッド空間で  
頂点の座標を

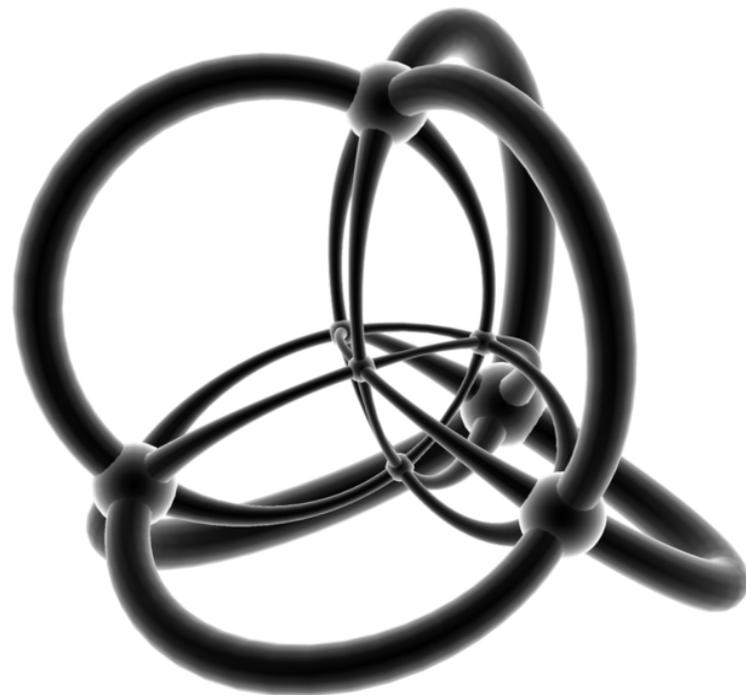
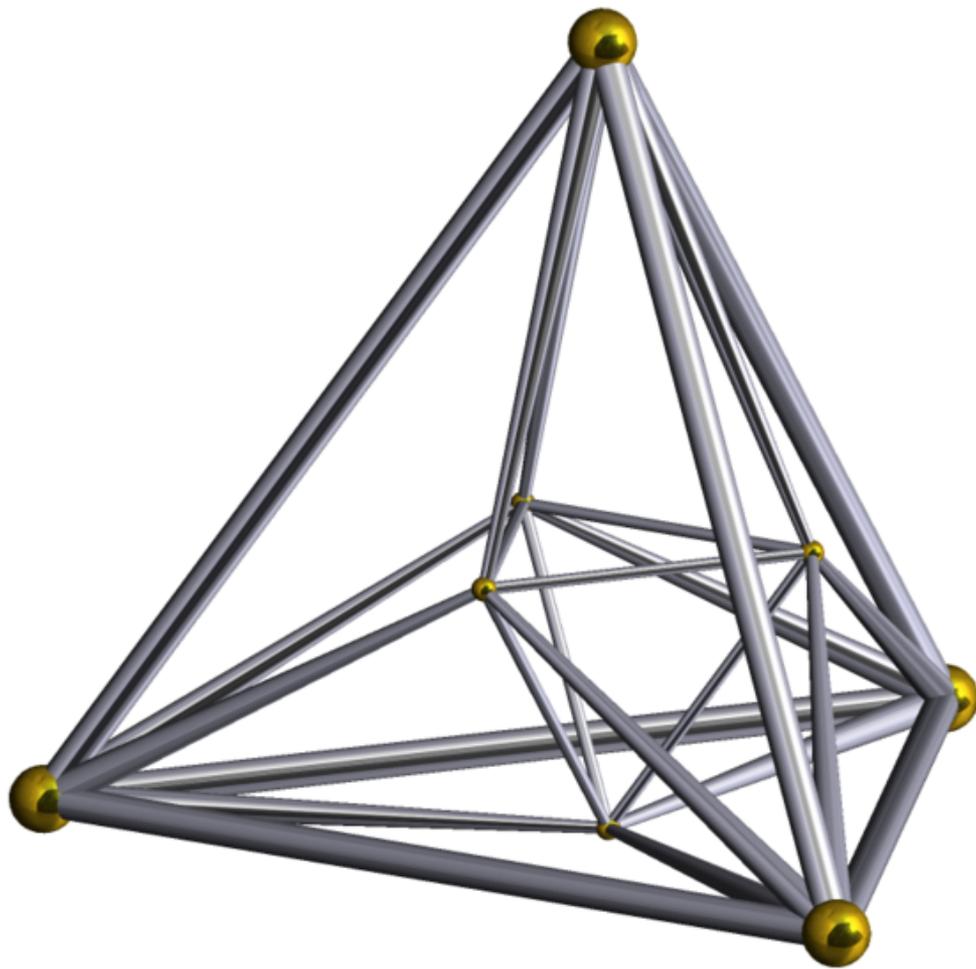
$$(\pm 2, 0, 0, 0)$$

およびこれらの座標の入れ替  
えからなる8点をとる.

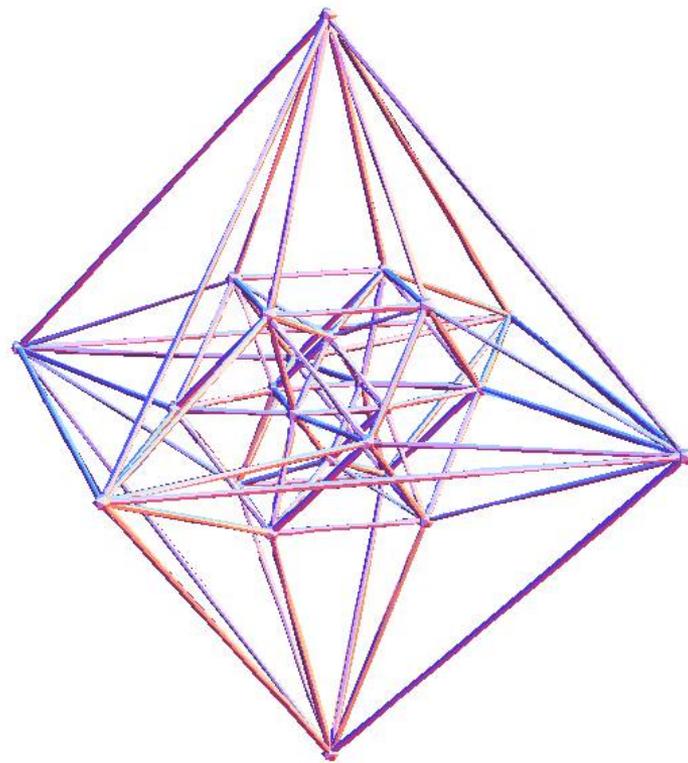
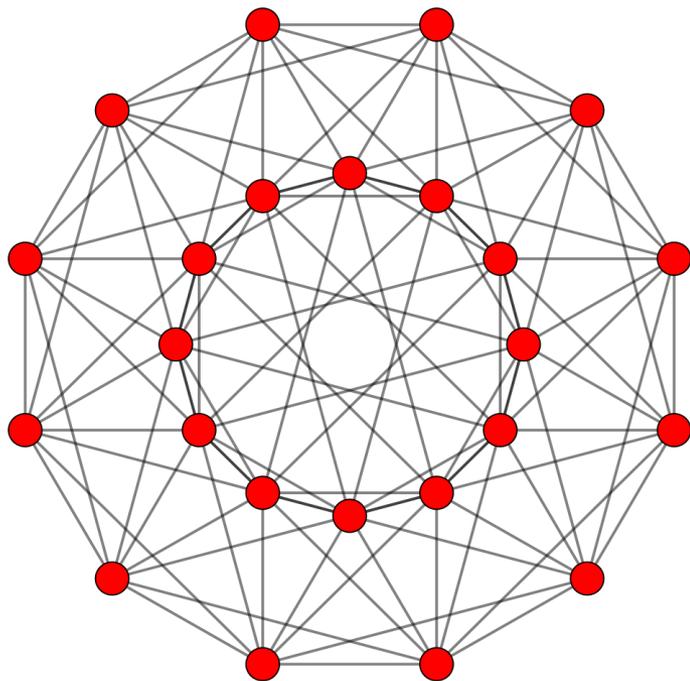


正16胞体の射影図

# 正16胞体 $\{3, 3, 4\}$

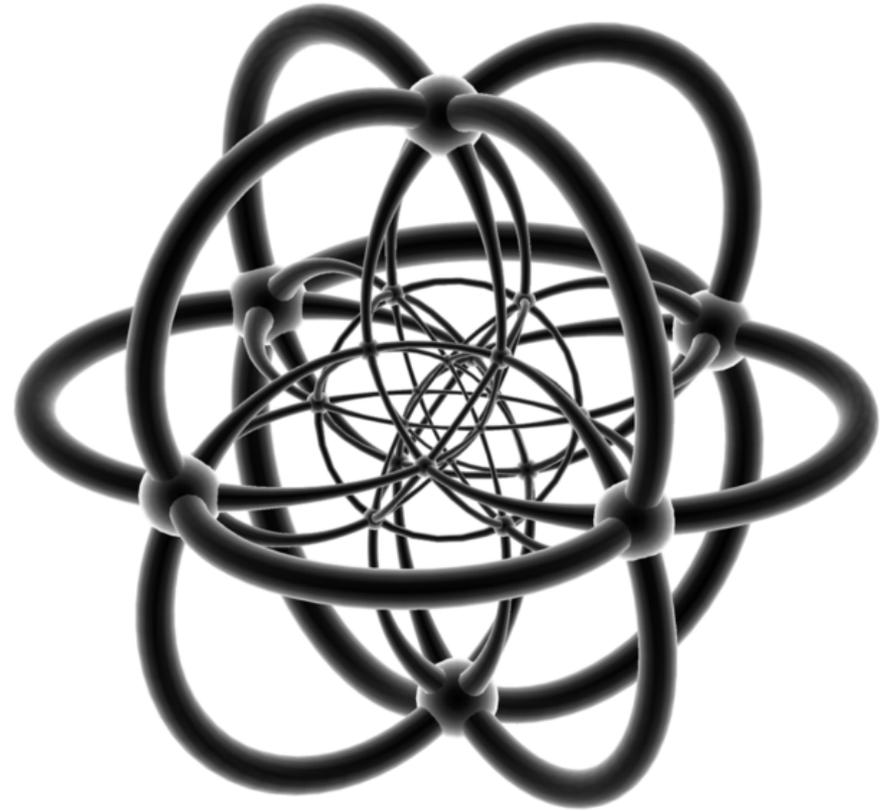
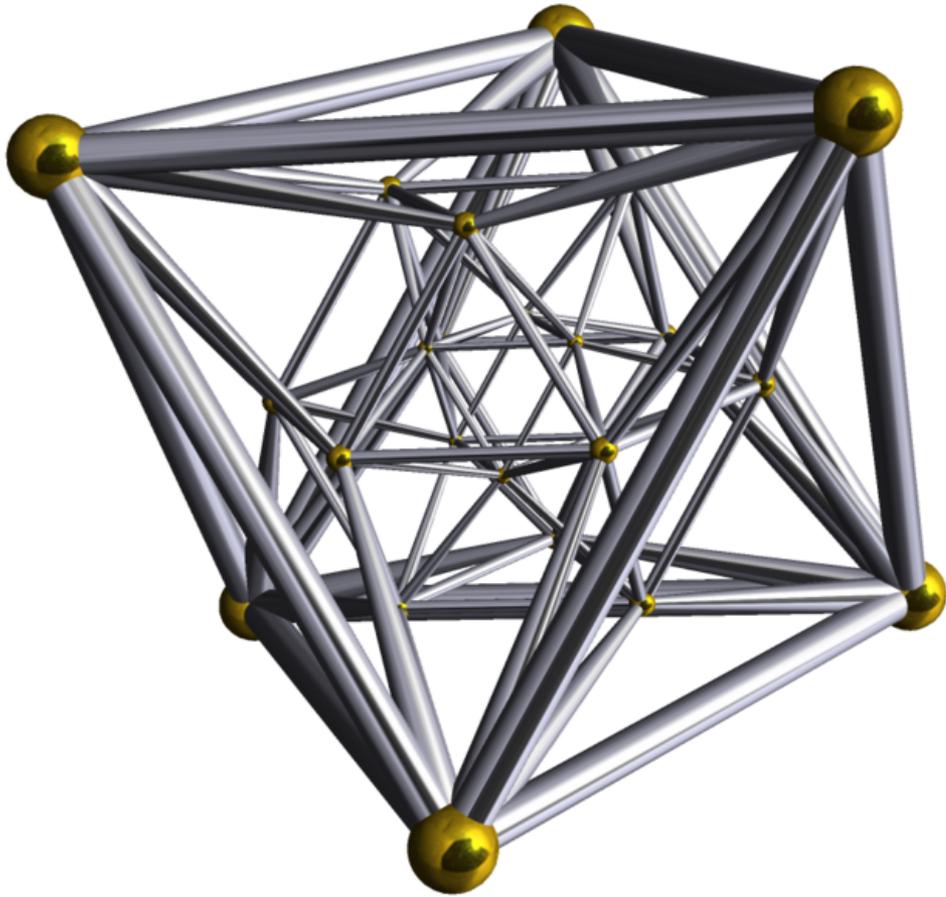


# 正24胞体

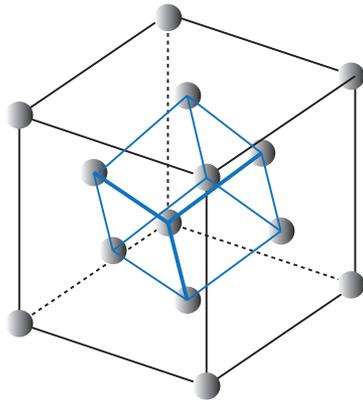
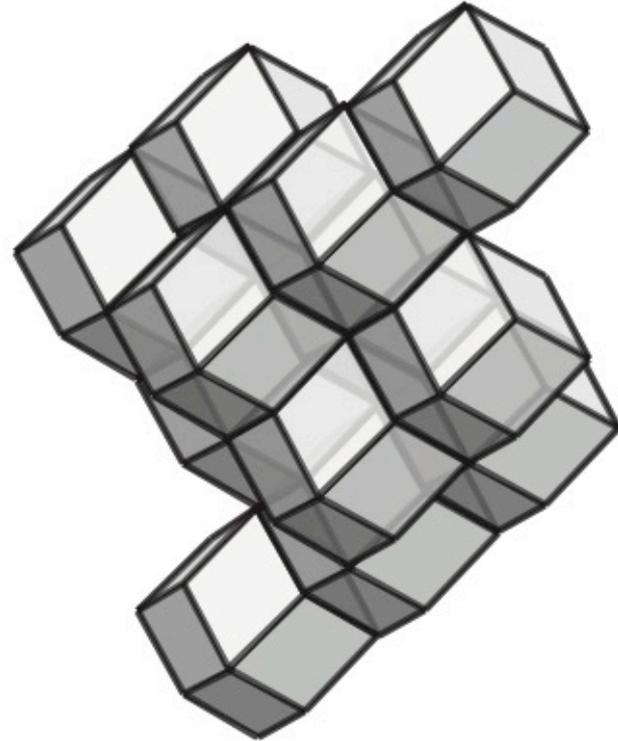
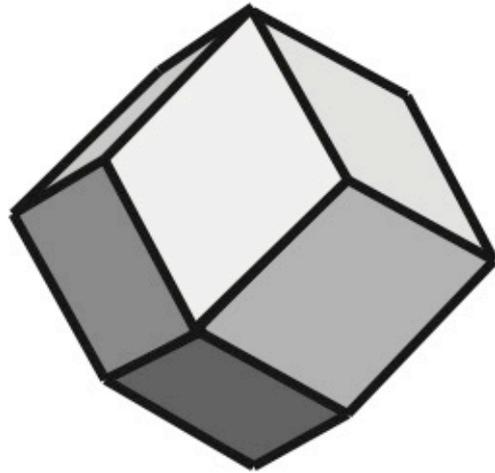


正8胞体 (hypercube) と正16胞体の頂点をこれまでのように4次元ユークリッド空間にとり, それらの和集合を頂点にとる. 3次元の正多面体には対応物がない.

正24胞体  $\{3, 4, 3\}$

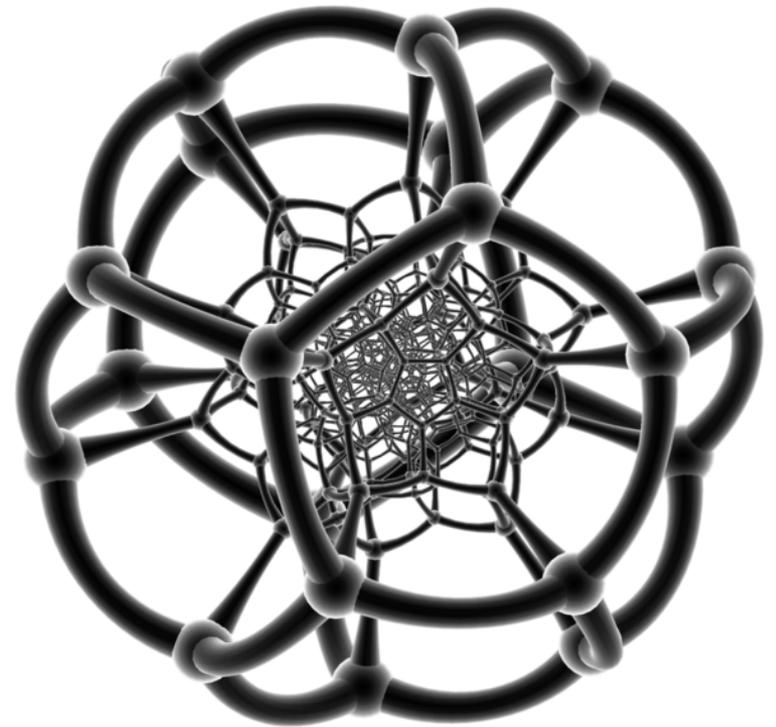
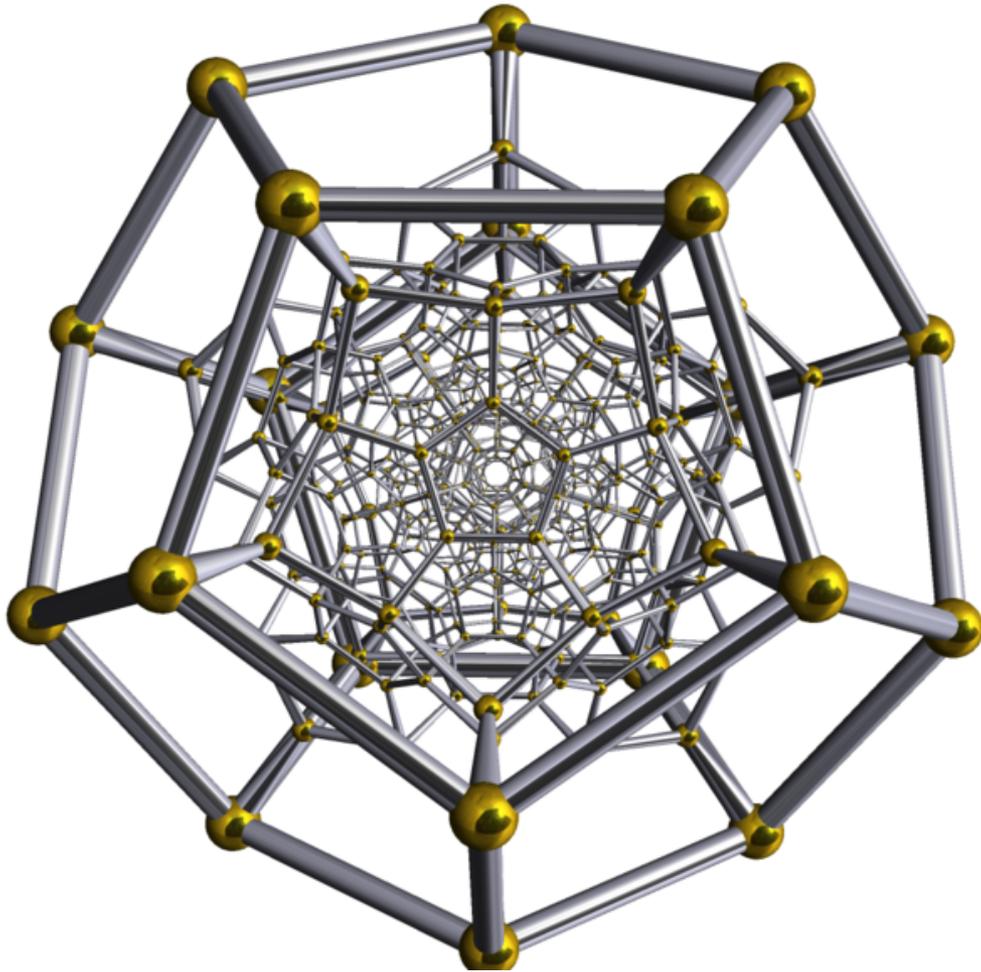


# 菱形12面体

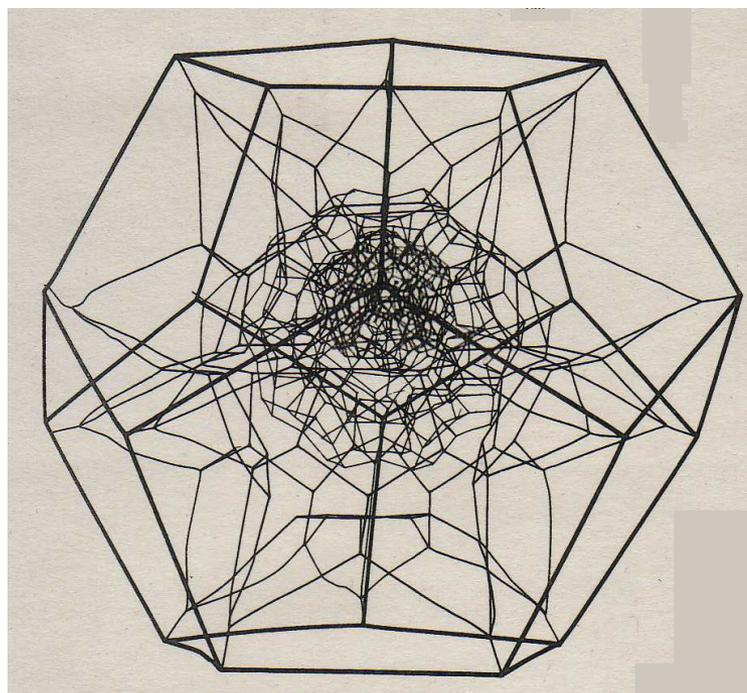


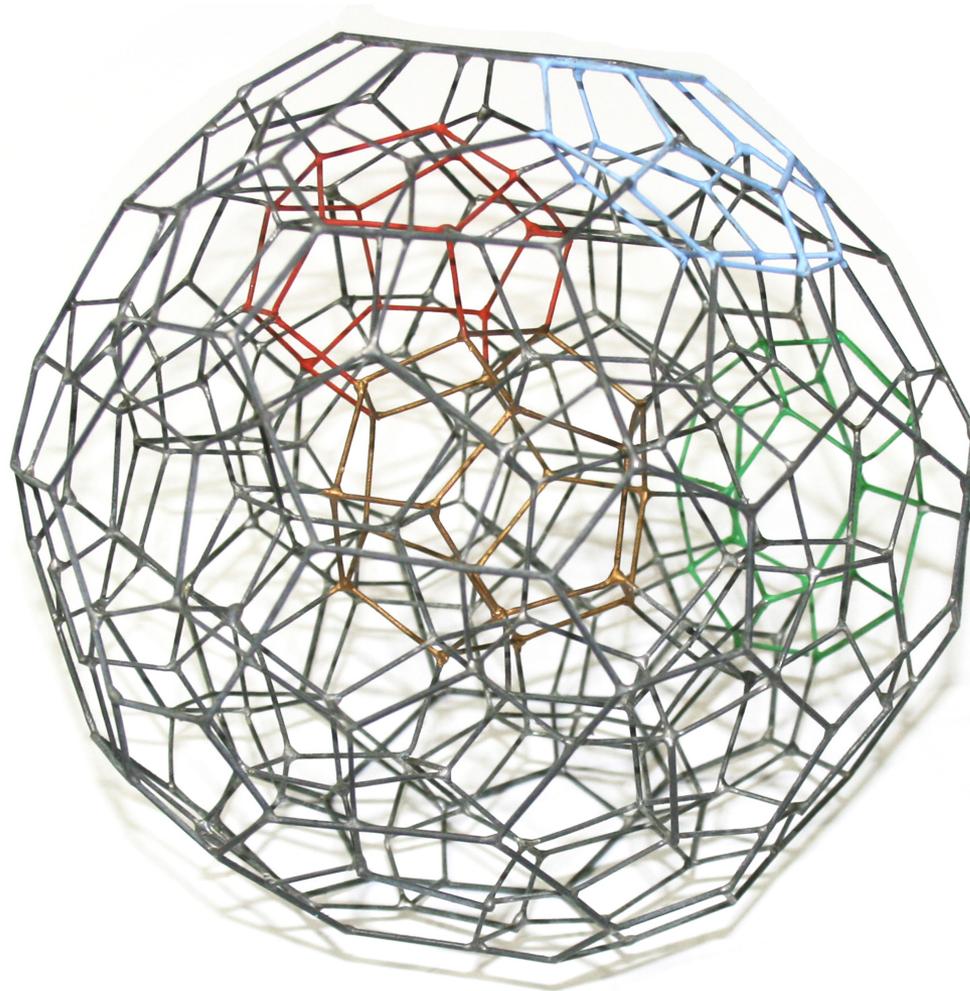
3次元ユークリッド空間で立方体と正8面体から同様の構成をすると菱形12面体を得られる. これは面心立方格子のディリクレ領域であり, 空間を埋め尽くす多面体.

正120胞体  $\{5, 3, 3\}$



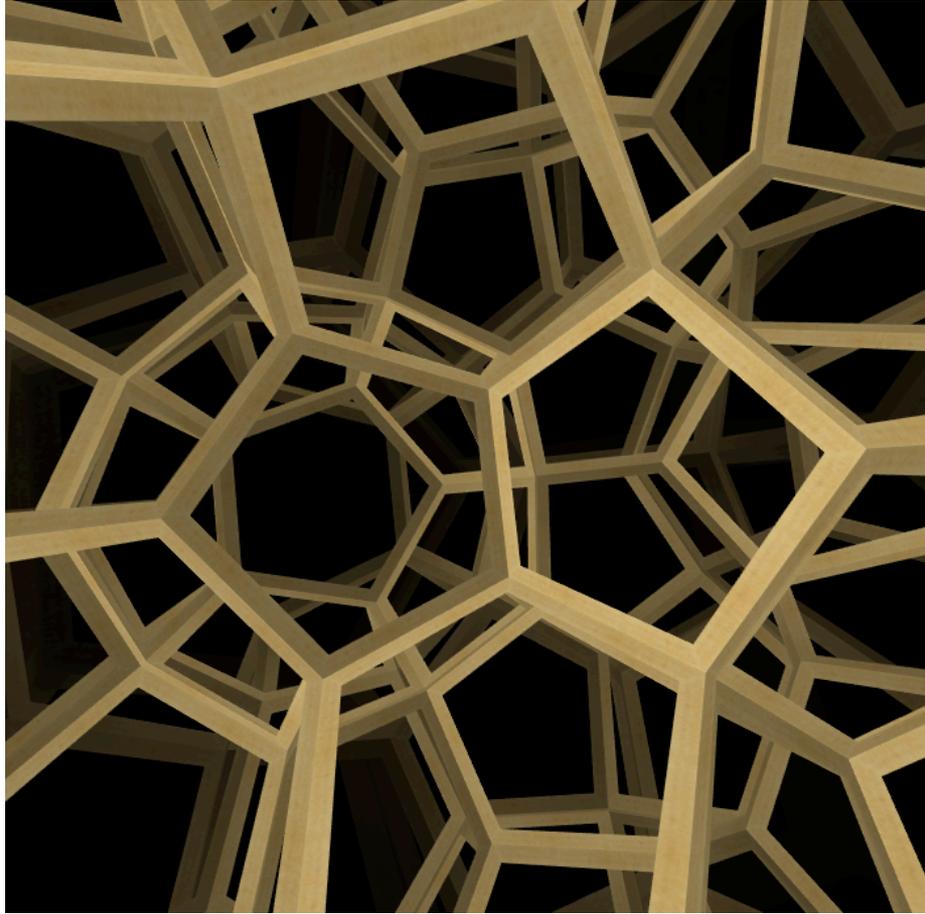
# 東大数理所蔵の正120胞体の模型





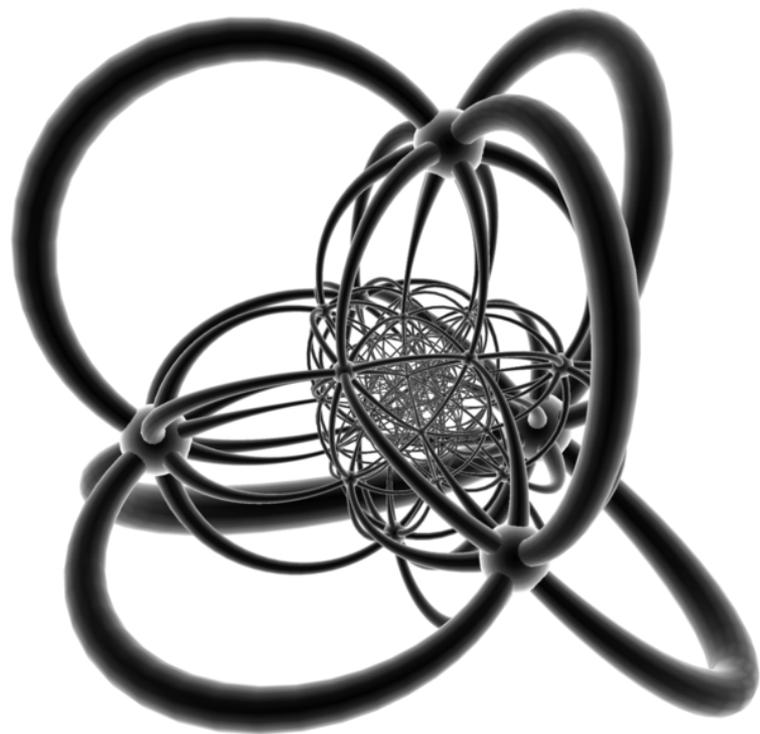
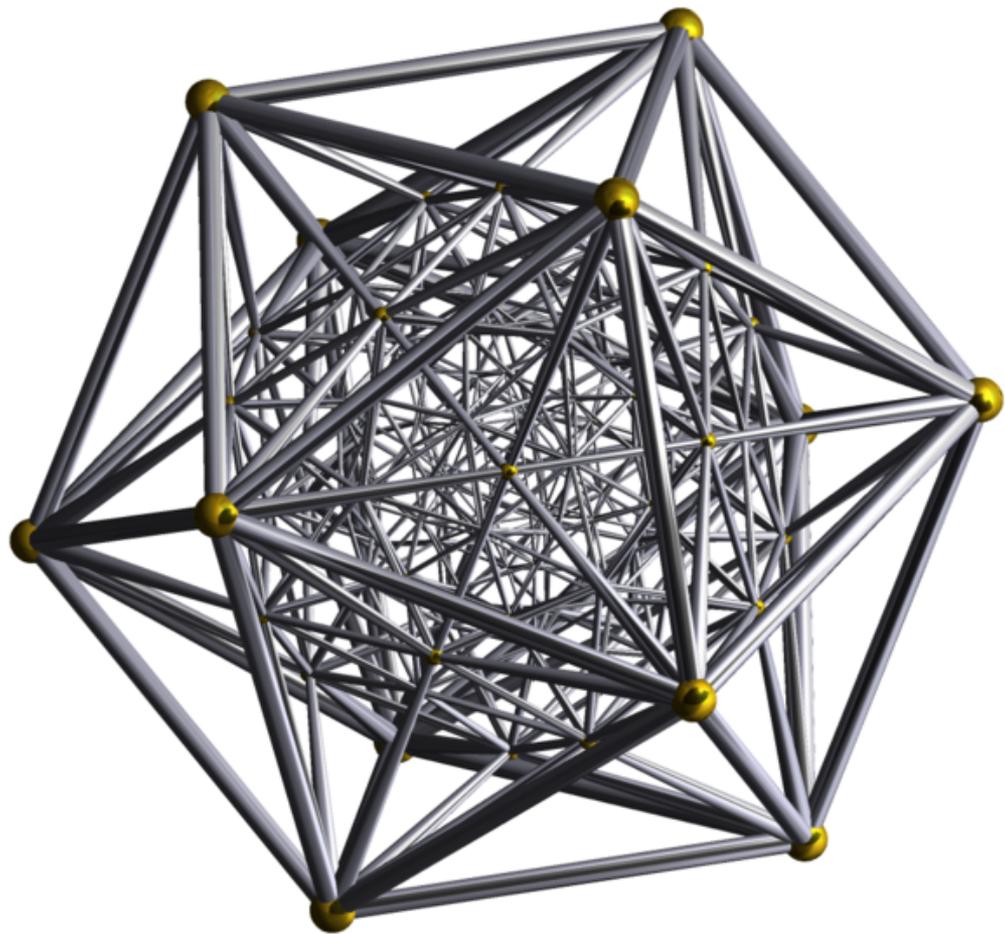
乙部融朗氏による正120胞体の模型

# 正120胞体 {5, 3, 3}



J. Weeks, Curved Spaceによる

# 正600胞体 $\{3, 3, 5\}$



# n次元空間の正胞体 $n=5, 6, 7, \dots$

	シュレフリー記号	頂点数
正(n+1)胞体	$\{3, 3, 3, \dots, 3\}$	$n+1$
正 $2n$ 胞体	$\{3, 3, \dots, 3, 4\}$	$2^n$
正 $2^n$ 胞体	$\{4, 3, 3, \dots, 3\}$	$2n$

5次元以上の空間には正胞体は上の3種類しか存在しない

# 3次元球面の幾何学と正多胞体

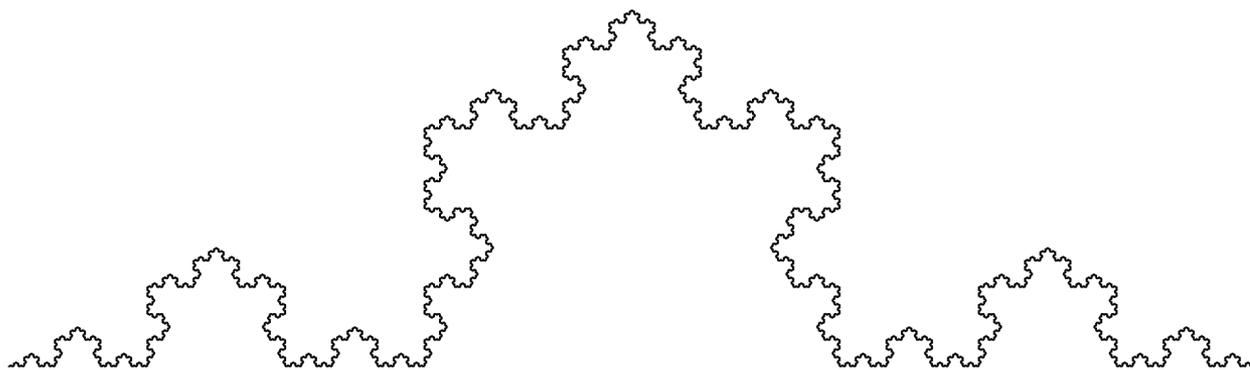
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

正多胞体は3次元球面の正則分割を与える.

	シュレフ リー記号	0-セル	1-セル	2-セル	3-セル
正5胞体	{3, 3, 3}	5	10	10	5
正8胞体	{4, 3, 3}	16	32	24	8
正16胞体	{3, 3, 4}	8	24	32	16
正24胞体	{3, 4, 3}	24	96	96	24
正120胞体	{5, 3, 3}	600	1200	720	120
正600胞体	{3, 3, 5}	120	720	1200	600

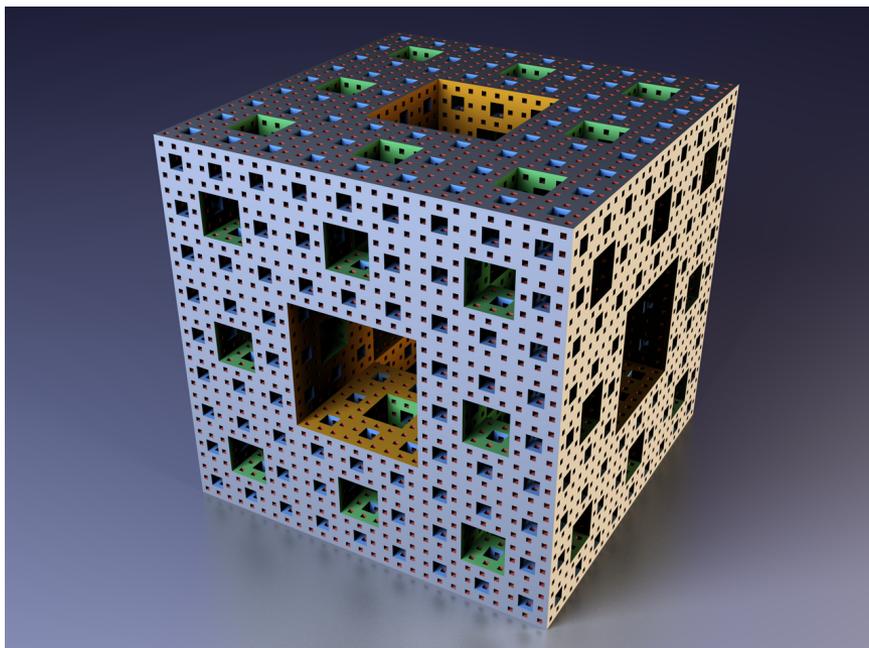
3次元球面のオイラー数は0

# 次元に関するさまざまな考え方 - フラクタル次元



コッホ曲線は相似比が  
1/3 のセグメント 4つから  
なる。フラクタル次元は

$$\log_3 4 = 1.26 \dots$$



メンガーのスポンジ

フラクタル次元は  
2.73 .....

# 参考文献

H. S. M. Coxeter, Regular polytopes, Dover.

河野俊文 「結晶群」 共立出版

河野俊文 「曲面の幾何構造とモジュライ」 日本評論社

ビデオ Dimensions

J. Weeksのよる Curved Space

<http://geometrygames.org/CurvedSpaces/index.html.ja>

# 參考資料

# ハミルトンの四元数

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$

$$x = a + bi + cj + dk$$

$$|x| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\bar{x} = a - bi - cj - dk$$

a, b, c, dは実数

可換ではないが結合法則, 分配法則  
を満たす数の体系

大きさが1の四元数全体は3次元球面  
とみなせる.

# 四元数と回転

単位ベクトル  $\mathbf{w}$  を軸とする角度  $\theta$  の回転は

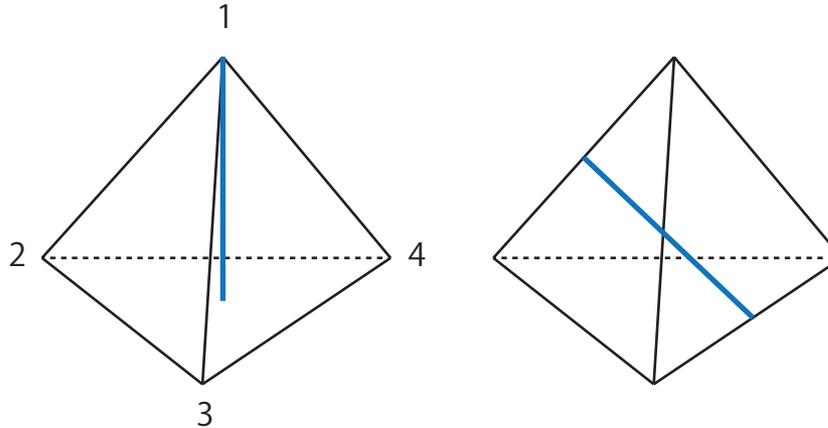
$$g = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{w} \sin \frac{\theta}{2}$$

として

$$\mathbf{x} \mapsto g\mathbf{x}\bar{g}$$

一つの回転に対して四元数が2個ずつ定まる。

# 正4面体群



正4面体を不変にする  
回転は12個の要素から  
なる.

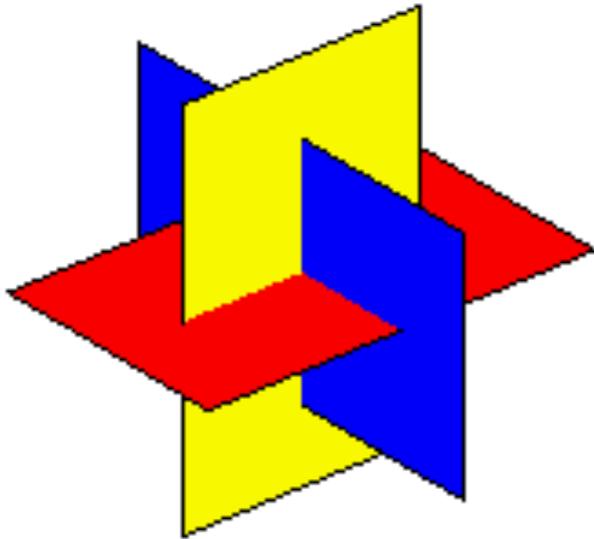
左のようにして, 正4面体群  
の12個の要素から大きさが  
1の四元数24個が決まる.  
これらは, 正24胞体の頂点を  
なす.

$\frac{2\pi}{3}$  回転に対応する四元数

$$\cos \frac{\pi}{3} + \frac{i + j + k}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(i + j + k)$$

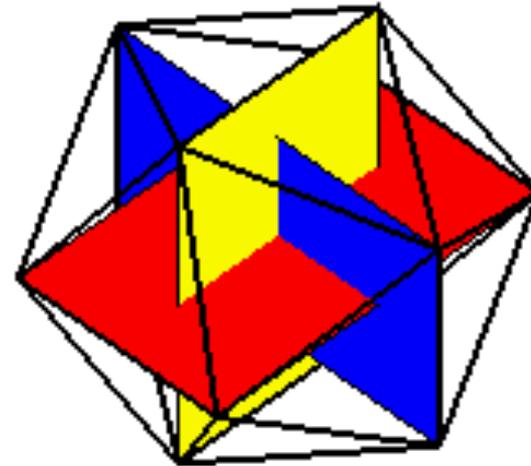
正20面体を不変にする回転は60個の要素からなる. これらに対応する120個の  
四元数は, 正600胞体の頂点をなす.  
正600胞体の頂点の座標を求めてみよう.

# 3次元空間に正20面体の頂点をとる



黄金比

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



縦横比が黄金比であるような  
長方形3枚を上図のように  
組み合わせる。



正20面体の頂点の座標として

$$(\pm 1, \pm \tau, 0)$$

およびこれらの入れ替えがとれる。

# グラム行列

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2) \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

グラム行列

$$A^t A = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \end{pmatrix}$$

$$\det A^t A = (\det A)^2 > 0$$

ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が一次独立ならば、グラム行列の行列式は正

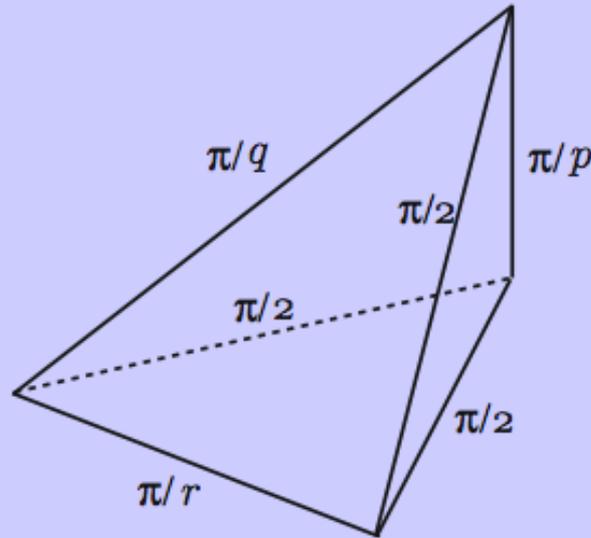
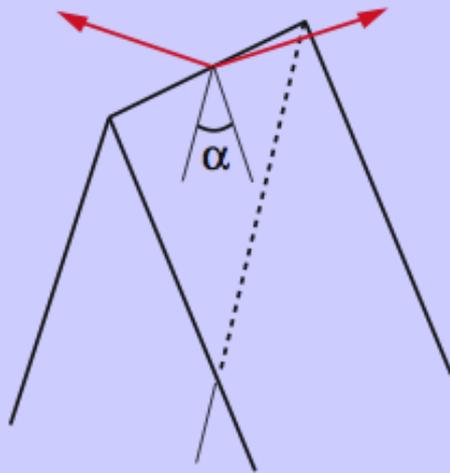
## 球面直交単体のグラム行列

### グラム行列

$$a_{ij} = \cos(\pi - \alpha_{ij}) = -\cos \alpha_{ij}$$

$\alpha_{ij}$  は  $i, j$  面のなす面角

グラム行列  $A$  : 4次元ユークリッド空間の内積



## 3次元球面の正則分割を与える $\{p, q, r\}$ の条件

直交球面単体のグラム行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \alpha & 0 & 0 \\ -\cos \alpha & 1 & -\cos \beta & 0 \\ 0 & -\cos \beta & 1 & -\cos \gamma \\ 0 & 0 & -\cos \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{p}, \beta = \frac{\pi}{q}, \gamma = \frac{\pi}{r}$$

の行列式が正となることから,

$$\sin \frac{\pi}{p} \sin \frac{\pi}{r} > \cos \frac{\pi}{q}$$