

幾何学 III レポート問題

1. 次の微分形式 ω について, 指定された定義域上の C^∞ 関数 f で $\omega = df$ を満たすものが存在するかどうかを, それぞれ, 理由を付けて述べよ. また, 存在する場合には, そのような関数 f を求めよ.

(1) $\mathbf{R}^2$ で定義された

$$\omega = (3x^2 + y)dx + (x + 3y^2)dy$$

(2) $\mathbf{R}^{2n}$ で定義された

$$\omega = \sum_{k=1}^n x_{2k-1} dx_{2k}$$

(3) $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とし, 包含写像を $i: S^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$ とするとき, S^1 で定義された

$$\omega = i^*(xdy - ydx)$$

2. $\mathbf{R}^3$ 内のトーラス

$$x = (a \cos u_1 + b) \cos u_2, \quad y = (a \cos u_1 + b) \sin u_2, \quad z = a \sin u_1$$

$$0 < a < b, \quad 0 \leq u_1 < 2\pi, \quad 0 \leq u_2 < 2\pi$$

について, $\mathbf{R}^3$ から誘導される Riemann 計量を入れる. このとき, Riemann 計量 g_{ij} と体積要素を求め, 体積要素の積分としてトーラスの表面積を計算せよ.

3. 単位球面 $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ に Euclid 計量から導かれる Riemann 計量を入れる. この計量についての S^n の体積を n で表せ.

4. 2次元トーラス $T = S^1 \times S^1$ の de Rham コホモロジーを計算せよ.