幾何学 III レポート問題

1. $\mathbf{R}^3$ 内のトーラス

$$x = (a\cos u_1 + b)\cos u_2, \quad y = (a\cos u_1 + b)\sin u_2, \quad z = a\sin u_1$$

$$0 < a < b, \quad 0 \le u_1 < 2\pi, \quad 0 \le u_2 < 2\pi$$

について，$\mathbf{R}^3$ から誘導される Riemann 計量を入れる．このとき，Riemann 計量 g_{ij} と体積要素を求め，体積要素の積分としてトーラスの表面積を計算せよ．

2. 単位球面 $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ に Euclid 計量から導かれる Riemann 計量を入れる．この計量についての S^n の体積を n で表せ．

3. 2 次元トーラス $T = S^1 \times S^1$ の de Rham コホモロジーを計算せよ．

4. $\mathbf{H} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$ とおき計量

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

を考える．

(1) 上の計量に関する $\mathbf{H}$ の体積要素 ω を求めよ．

(2) $X = a(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$ とあらわされる $\mathbf{H}$ のなめらかなベクトル場について

$$\mathcal{L}_X \omega = 0$$

となるための条件を求めよ．

講義の時間にレポートとして提出 (1 月 29 日まで).