

幾何学 III 14. de Rham の定理の証明の概要

Čech-de Rham の定理の証明

可微分多様体 M に対してコホモロジー群の同型

$$\varphi : H_{DR}^q(M) \cong \check{H}^q(M, \mathcal{U})$$

が成立することは次のように証明される.

すでに定義した二重複体

$$\delta : \Omega^{k,\ell}(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega^{k+1,\ell}(\mathcal{U}), \quad d : \Omega^{k,\ell}(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega^{k,\ell+1}(\mathcal{U})$$

を考える.

このとき, 次は完全系列であることが示される.

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \Omega^\ell(M) \longrightarrow \Omega^{0,\ell}(M) \longrightarrow \Omega^{1,\ell}(M) \longrightarrow \cdots \\ 0 &\longrightarrow C^k(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega^{k,0}(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega^{k,1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

最初の系列の完全性は次のように証明される. まず, 開被覆 $\mathcal{U}$ に対応した 1 の分割 $\{f_\alpha\}$ をとり,

$$(\Phi\omega)(\alpha_0, \dots, \alpha_k) = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \omega(\alpha, \alpha_0, \dots, \alpha_k)$$

とおくと

$$\delta(\Phi\omega) + \Phi(\delta\omega) = \omega$$

が成立することを用いる. また, 二つ目の系列については Poincaré の補題を用いる.

同型写像 φ は次のように構成される. まず, $d\omega = 0$ を満たす $\omega \in \Omega^\ell(M)$ に対して, 制限写像の像を $\omega_0 \in \Omega^{0,\ell}(M)$ とかく. このとき, $d\omega_0 = 0$ となり, 上の完全系列から $d\eta_0 = \omega_0$ となる η_0 が存在する. 次に $\omega_1 = \delta\eta_0$ とおくと, $d\omega_1 = 0$ となり, 再び上の完全系列から $d\eta_1 = \omega_1$ となる η_1 が存在する. これを繰り返して, 最終的には $\omega_\ell \in \Omega^{\ell,0}(\mathcal{U})$ が得られ, これは $c \in C^\ell(\mathcal{U})$ の像となる. 写像 φ は ω に c を対応させることによって得られる.

de Rham の定理の証明

M を単体的複体 K の定める多面体 $|K|$ と同相な三角形分割された可微分多様体とする． K の頂点の集合を V として、

$$\mathcal{U} = \{O(v) \mid v \in V\}$$

とおく．ここで、 $O(v)$ は頂点 v を含む単体の内点集合の和集合である．このとき、同型

$$\check{H}^q(|K|, \mathcal{U}) \cong H^q(M, \mathbf{R})$$

が成立する．de Rham の定理はČech-de Rham の定理とこの同型写像をあわせることによって得られる．

de Rham の定理の応用

M をコンパクトで向きづけられた連結な n 次元可微分多様体とする．このとき、

$$H_{DR}^n(M) \cong \mathbf{R}$$

が成立し、これは体積要素によって生成される．微分形式のウェッジ積と de Rham の定理をあわせることにより、コホモロジー群 $H^*(M, \mathbf{R})$ には積構造が入ることが分かる．このことを用いて、

$$\dim H^k(M; \mathbf{R}) \cong \dim H^{n-k}(M; \mathbf{R})$$

が示される．これは Poincaré の双対定理の帰結である．