幾何学 III 10．1-パラメータ変換群と Lie 微分

1-パラメータ変換群

M を可微分多様体とする．U は $\mathbf{R}\times M$ の $0\times M$ を含む開集合で，$U\cap(\mathbf{R}\times x), x\in M$ は連結とする．C^∞ 写像 $\varphi : U \to M$ が次の条件 (1), (2) を満たすとき，φ を M 上の 1 径数変換群 (1-parameter transformation group) またはフローとよぶ．

(1)　$\varphi(s,\varphi(t,x)) = \varphi(s+t,x)$
(2)　$\varphi(0,x) = x, \quad x\in M$

ここで，$\varphi_t : M \to M$ を $\varphi_t(x) = \varphi(t,x)$ とおく．M 上の 1 径数変換群 φ が与えられたとき，ベクトル場 X を

$$X_p = \frac{d\varphi}{dt}(0,p) \tag{1}$$

で定義する．常微分方程式の解の存在と一意性定理より，M 上のベクトル場 X に対して，上のような開集合 U を適当にとれば，条件 (1) を満たす 1 径数変換群 φ が U 上一意に存在する．このとき，φ_t を X が生成する 1 径数変換群とよび，$\mathrm{Exp}(tX)$ で表す．$\mathrm{Exp}(tX)$ の定義域が $\mathbf{R}\times M$ 全体になるとき，ベクトル場 X は完備であるという．M をコンパクトとすると，M 上のベクトル場は常に完備であり，大域的な 1 径数変換群を生成する．

Lie 微分

ベクトル場 X に対して，微分形式の Lie 微分

$$\mathcal{L}_X : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^p(M)$$

を対応する 1 径数変換群 φ_t を用いて

$$\mathcal{L}_X\omega(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^*\omega(x) - \omega(x)}{t}$$

で定義する．

Lie 微分は次のような性質をもつ.

1. $\mathcal{L}_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathcal{L}_X\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \mathcal{L}_X\omega_2$
2. M 上の C^∞ 級関数 f に対して $\mathcal{L}_X f = Xf$
3. $d\mathcal{L}_X\omega = \mathcal{L}_X(d\omega)$

ベクトル場 X に対して，内部積

$$\iota(X) : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p-1}(M)$$

を次のように定める

$$\iota(X)\omega(X_1, \cdots, X_{p-1}) = \omega(X, X_1, \cdots, X_{p-1})$$

ω_1 を p 次微分形式とするとき

$$\iota(X)(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\iota(X)\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^p\omega_1 \wedge (\iota(X)\omega_2)$$

が成立する.

Lie 微分，内部積，外微分について Cartan の公式

$$\mathcal{L}_X\omega = (\iota(X)d + d\iota(X))\omega$$

が成り立つ.