幾何学 III 9．球面の de Rham コホモロジー群と写像度

de Rham コホモロジー群の性質

M を可微分多様体とする．M が連結ならば $H^0(M) \cong \mathbf{R}$ が成り立つ．また，M が単連結ならば $H^1(M) \cong 0$ が成り立つ．

可微分多様体 M, N がホモトピー同値ならば，de Rham コホモロジー群の同型

$$H^p(M) \cong H^p(N)$$

が成立する．

S^n の de Rham コホモロジー群は次のようにいくつかのステップに分けて計算される．

(1) $n = 1$ のとき

$$H^1(S^1) \cong \mathbf{R}$$

が成り立つ．これを示す上で大切な事実は ω を S^1 上の 1 次微分形式で

$$\int_{S^1} \omega = 0$$

ならば，ω は完全形式となることである．

(2) $n > 1$ とすると S^n が単連結であることから

$$H^1(S^n) \cong 0$$

が得られる．

(3) $p > 1,\, n > 1$ のとき，同型

$$H^p(S^n) \cong H^{p-1}(S^{n-1})$$

が成立する．この同型写像は次のように構成される．S^n の北極点と南極点を，それぞれ，p_1, p_2 としてそれぞれの点を含む開円板 U_1, U_2 によって，S^n を被覆する．ω を S^n 上の p 次微分形式とすると，U_1, U_2 は可縮であるから，

$$\omega|_{U_i} = d\eta_i, \quad i = 1, 2$$

となる $p-1$ 次微分形式 η_1, η_2 が存在する．ω のコホモロジー類に $U_1 \cap U_2$ 上の微分形式 $\eta_1 - \eta_2$ のコホモロジー類を対応させることにより，写像

$$H^p(S^n) \longrightarrow H^{p-1}(U_1 \cap U_2)$$

が得られる．ここで，$U_1 \cap U_2$ は S^{n-1} とホモトピー同値であり，同型

$$H^{p-1}(U_1 \cap U_2) \cong H^{p-1}(S^{n-1})$$

が成立する．

以上をまとめて，S^n, $n \geq 1$ の de Rham コホモロジー群は次のようになる．

$$H^p(S^n) \cong \begin{cases} \mathbf{R}, & p = 0, n \\ 0, & p \neq 0, n \end{cases}$$

Mayer-Vietoris 完全系列

de Rham コホモロジー群の計算には、次の Mayer-Vietoris 完全系列が有用である。$M = U \cup V$, (U, V は開集合) のとき，de Rham コホモロジー群の完全系列

$$\cdots \longrightarrow H^p(M) \longrightarrow H^p(U) \oplus H^p(V) \longrightarrow H^p(U \cap V) \longrightarrow H^{p+1}(M) \longrightarrow \cdots$$

が存在する．

写像度

M, N を向きのついたコンパクト n 次元 Riemann 多様体とする．M の体積要素に M の体積の逆数をかけて

$$\int_M \omega_M = 1$$

を満たす n 次微分形式 ω_M が得られる．C^∞ 級写像 $f : M \to N$ について，

$$[f^* \omega_N] = \alpha[\omega_M]$$

で定まる数 α を $\deg f$ で表し，f の写像度とよぶ．ここで，記号 [ ] は de Rham コホモロジー類を示す．写像度は次のように表され，整数となる．$q \in N$ を f の正則値とするとき，

$$\deg f = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \operatorname{sgn} \det(df)_p$$

が成立する．