幾何学 III 8. 体積要素と Stokes の定理の応用

Riemann 計量

M を可微分多様体とする．M の各点 p における接ベクトル空間 T_pM に，内積（正定値な対称双線形形式)

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbf{R}$$

が与えられているとする．点 p のまわりの局所座標系 $(U, (x_1, \cdots, x_n))$ をとり，U の点 q について

$$g_{ij}(q) = g_q\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_q\right)$$

とおく．g_{ij} が M の各点の近傍で C^∞ 級であるとき，M の各点 p に内積 g_p を対応させる対応 g を M の Riemann 計量とよぶ．また，Riemann 計量が与えられた可微分多様体を Riemann 多様体とよぶ．

体積要素

M を向きのついた n 次元 Riemann 多様体とする．$(e_1(p), \cdots, e_n(p))$ を各点 $p \in M$ で M の向きを与える T_pM の正規直交フレームとする．M 上の n 次微分形式 ω で，各点 $p \in M$ において

$$\langle \omega_p, e_1(p) \wedge \cdots \wedge e_n(p) \rangle = 1$$

を満たすものを M の体積要素とよぶ．Riemann 計量 g_{ij} を用いて $G = \det(g_{ij})$ とおくと．体積要素は局所的には局所座標 $(x_1, \cdots, x_n)$ を用いて，

$$\omega = \sqrt{G}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

と表示される．体積要素 ω を記号 dv で表すことがある．M がコンパクトのとき，M の体積を

$$vol(M) = \int_M dv$$

で定める．

Stokes の定理の応用

境界のない可微分多様体 M において，体積要素 ω について $\int_M \omega$ が正の値として定まるとき，ω は完全形式ではない．なぜなら，$\omega = d\varphi$ と表されるとするとStokes の定理により

$$\int_M \omega = \int_M d\varphi = \int_{\partial M} \varphi = 0$$

となるからである．

微分形式による一般的な境界付き多様体の Stokes の定理とベクトル解析との関連をまとめておこう．

V を $\mathbf{R}^3$ 内のコンパクトな境界付き 3 次元可微分多様体として，2 次微分形式 ω を

$$\omega = a\,dy \wedge dz + b\,dz \wedge dx + c\,dx \wedge dy$$

で定める．$\chi = (a, b, c)$ とおいて $\mathbf{R}^3$ 上のベクトル場と考える．このとき，Stokes の定理

$$\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega$$

は次のように述べることができる．dS を曲面 ∂V の体積要素，$\mathbf{n}$ を ∂V の外向きの法線ベクトル場とすると，

$$\int_{\partial V} \langle \chi, \mathbf{n} \rangle\, dS = \int_V \operatorname{div} \chi\, dV$$

が成立する．ここで，dV は V の体積要素 $dx \wedge dy \wedge dz$ である．これはGauss の発散定理ともよばれる．

S を $\mathbf{R}^3$ 内の向きの付いたコンパクトな境界付き 2 次元可微分多様体として，1 次微分形式 ω を

$$\omega = a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

で定める．上と同様に，$\chi = (a, b, c)$ とおいて $\mathbf{R}^3$ 上のベクトル場と考える．曲線 $C = \partial S$ の単位速度ベクトル場を $\mathbf{v}$, 体積要素（線素）を ds とすると Stokes の定理は

$$\int_C \langle \chi, \mathbf{v} \rangle\, ds = \int_S \langle \operatorname{rot} \chi, \mathbf{n} \rangle\, dS$$

と表される．