

幾何学 III 7. 境界付き多様体と Stokes の定理

境界付き多様体

境界付き可微分多様体を次のように定義する. $\mathbf{R}^n$ の部分集合 $\mathbf{H}^n$ を

$$\mathbf{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$

で定める. M は第二可算公理を満たす Hausdorff 空間とする. M が境界付き可微分多様体であるとは, M の開被覆 $M = \bigcup_{\lambda} U_{\lambda}$ があって, 像への同相写像 $\varphi_{\lambda}: U_{\lambda} \rightarrow \mathbf{H}^n$ が存在し, $\varphi_{\lambda}(U_{\lambda})$ は $\mathbf{H}^n$ の開集合で, $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$ のとき

$$\varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1}: \varphi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \longrightarrow \varphi_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$$

が C^{∞} 級写像となることである.

ここで

$$\partial \mathbf{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{H}^n \mid x_n = 0\}$$

とおき, H^n の開集合 W に対して

$$\partial W = W \cap \partial \mathbf{H}^n, \quad \text{int } W = W \setminus \partial W$$

と定める. これにより, 局所座標系 $\varphi_{\lambda}: U_{\lambda} \rightarrow \mathbf{H}^n$ により, M の境界 ∂M と, M の内点の集合 $\text{int } M$ が定義される. ∂M は $n-1$ 次元の可微分多様体である.

M が境界付き可微分多様体で向き付けられているとする. このとき, ∂M の向きが次のように定まる. ∂M の点 p において, 局所座標 $(x_1, \dots, x_n)$ をとり $T_p M$ の外向きの法線ベクトル

$$v = -\frac{\partial}{\partial x_n}$$

を考える. $T_p(\partial M)$ のフレーム $(v_1, \dots, v_{n-1})$ が正のフレームであるとは, $(v, v_1, \dots, v_{n-1})$ が M の向きに関して正のフレームであることと定める. このようにして, ∂M は向き付けられた可微分多様体となる.

Stokes の定理

M を向き付けられた n 次元可微分多様体とする. ω を M 上の $n-1$ 次微分形式で $\text{supp } \omega$ はコンパクトとする. $i: \partial M \rightarrow M$ を包含写像とする. このとき, 次の Stokes の定理が成り立つ.

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^* \omega$$

Stokes の定理は次のように証明される. $\{\lambda_i\}$ を 1 の分割とする. このとき,

$$\int_M d(\lambda_i \omega) = \int_{\partial M} i^*(\lambda_i \omega)$$

を示せば十分である. そこで, U を局所座標近傍として $\text{supp } \omega \subset U$ と仮定して証明すればよい.

微分形式 ω を局所的に

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

と表示する. $\text{supp } \omega \subset \text{int } U$ のとき, Stokes の定理の両辺は 0 となる. $U \cap \partial M \neq \emptyset$ のとき,

$$\int_M d\omega = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

となる, また

$$i^* \omega = a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$$

である. ∂M の向きに注意して, 両者を比較することにより, Stokes の定理が示される.