

幾何学 III 6. 多様体上の微分形式の積分

可微分多様体の向き

V を $\mathbf{R}$ 上の n 次元線形空間とする. V の順序のついた基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ をフレームとよぶ. V のフレーム全体の集合を $\mathcal{F}(V)$ で表す. $\mathcal{F}(V)$ に同値関係を次のように定める. $(v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{F}(V)$ に対して $(v_1, \dots, v_n) \sim (w_1, \dots, w_n)$ であるとは, 行列式が正であるような n 次正則行列 A が存在して

$$(v_1, \dots, v_n) = (w_1, \dots, w_n)A$$

と表されることである. 同値類の集合 $\mathcal{F}(V)/\sim$ は 2 つの要素からなる. 同じ同値類に属するフレームは V の同じ向きを定めるという.

可微分多様体 M が**向き付け可能** (orientable) とは, M の局所座標系 $\{U_\lambda\}$ で, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ のとき, 座標変換のヤコビ行列式がつねに

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} > 0$$

を満たすものがとれることである. このとき, M の各点の接空間 $T_p M$ に一貫した向きが定まる.

微分形式の積分

M を向き付け可能な可微分 n 次元多様体で, ω を M 上の n 次微分形式とする. 微分形式 ω の M 上の積分を次のように定義する.

まず, $\{U_i\}$ を M の局所有限な開被覆で, $\{\lambda_i\}$ をこれに付随する 1 の分割とする. ここで, $\text{supp } \lambda_i \subset U_i$ である. さらに, $\{U_i\}$ は座標変換のヤコビ行列式がつねに正となるような局所座標系を与えるとする.

局所座標を用いて

$$\lambda_i \omega = f_i(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

と表されているとき, この微分形式の M 上の積分を

$$\int_M \lambda_i \omega = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

で定義する.

微分形式 ω の M 上の積分を

$$\int_M \omega = \sum_i \int_M \lambda_i \omega$$

で定める。これは、局所座標のとりかた、および 1 の分割にはよらないことが証明される。実際

$$\int_M \lambda_i \omega = \sum_j \int_M \mu_j \lambda_i \omega$$

となることから

$$\sum_i \int_M \lambda_i \omega = \sum_{i,j} \int_M \mu_j \lambda_i \omega = \sum_j \int_M \mu_j \omega$$

が示される。

微分形式 ω が $\text{supp } \omega$ がコンパクトを満たすとき、 ω の M 上の積分は有限確定値となる。