

幾何学 III 5. Poincaré の補題

多様体間の写像と de Rham コホモロジー群

M, N を可微分多様体 $f: M \rightarrow N$ をその間の C^∞ 級写像とする. 微分形式の微分形式の引き戻し $f^*: \Omega^p(N) \rightarrow \Omega^p(M)$ が $d \circ f^* = f^* \circ d$ を満たすことから, de Rham コホモロジー群の間の写像

$$f^*: H^p(N) \rightarrow H^p(M)$$

が引き起こされる. 以降, de Rham コホモロジー群の添字 DR は省略することがある. 多様体間の写像の合成について

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

が成立する.

Poincaré の補題

I を単位区間 $[0, 1]$ とする. 可微分多様体 M が C^∞ 級の意味で可縮であるとは, C^∞ 級写像

$$F: M \times I \rightarrow M$$

で, 定点 $x_0 \in M$ について

$$F(x, 0) = x, \quad F(x, 1) = x_0$$

を満たすものが存在することである. とくに, $M = \mathbf{R}^n$ のとき, M は可縮である. また, $\mathbf{R}^n$ の凸開集合も可縮である. Poincaré の補題は次の定理として述べられる.

定理 可微分多様体 M が可縮であるとする, その de Rham コホモロジー群は

$$H^p(M) \cong \begin{cases} \mathbf{R}, & p = 0 \\ 0, & p > 0 \end{cases}$$

を満たす.

Poincaré の補題の証明のために, $p > 0$ に対して写像

$$\Phi : \Omega^p(M \times I) \longrightarrow \Omega^{p-1}(M)$$

を次のように構成する. $\omega \in \Omega^p(M \times I)$ が局所的に

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1, \dots, i_p}(x, t) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ &+ \sum_{j_1, \dots, j_{p-1}} b_{j_1, \dots, j_{p-1}}(x, t) dt \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{p-1}} \end{aligned}$$

と表されるとき

$$\Phi\omega = \sum_{j_1, \dots, j_{p-1}} \left(\int_0^1 b_{j_1, \dots, j_{p-1}}(x, t) dt \right) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{p-1}}$$

で定義する. また,

$$i_t : M \longrightarrow M \times I$$

を $i_t(x) = (x, t)$ で定義する. このとき,

$$d\Phi\omega + \Phi d\omega = i_1^*\omega - i_0^*\omega$$

が成立する.

これを用いると, M が可縮のときには, M 上の p 次閉形式 ω について

$$d(\Phi F^*\omega) = i_1^*F^*\omega - i_0^*F^*\omega = -\omega$$

となり, ω が完全形式であることが示される.

de Rham コホモロジー群とホモトピー

$f, g : M \rightarrow N$ を可微分多様体間の C^∞ 級写像とする. f と g がホモトピーであるとは C^∞ 級写像 $F : M \times I \rightarrow N$ で

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x)$$

を満たすものが存在することである. このとき, de Rham コホモロジー群に誘導される写像

$$f^*, g^* : H^p(N) \longrightarrow H^p(M)$$

について, $f^* = g^*$ が成立する.