

幾何学 III 4. 微分形式のいくつかの性質

外積と交代線形形式

V を $\mathbf{R}$ 上の線形空間とする. V 上の p 重交代線形形式

$$f: V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbf{R}$$

全体の空間を $A^p(V)$ で表すと, V の双対空間の p 階外積との同型

$$\iota: \wedge^k V^* \cong A^p(V)$$

が存在する. $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p$, $\alpha_j \in V^*$, $1 \leq j \leq p$ に対して, 同型写像 ι を

$$\iota(\omega)(X_1, \cdots, X_p) = \frac{1}{p!} \det(\alpha_i(X_j))$$

で定める.

可微分多様体 M 上の p 次微分形式 ω は, ベクトル場の空間 $\chi(M)$ 上の p 重交代線形形式

$$\omega: \chi(M) \times \cdots \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

を定める. これは $C^\infty(M)$ 上の交代線形形式となる.

微分形式の引き戻し, ウェッジ積についての性質

可微分多様体の間の写像 $f: M \rightarrow N$ に対して, N 上の p 次微分形式 ω の引き戻し $f^*\omega$ は

$$f^*\omega(X_1, \cdots, X_p) = \omega(f_*X_1, \cdots, f_*X_p)$$

で与えられる. N 上の微分形式 ω, η に対して

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$$

が成立する.

ウェッジ積のそのほかの性質を挙げておく． M 上の p 次微分形式 ω と q 次微分形式 η に対して

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$$

が成立する．

ベクトル場 $X_1, \dots, X_{p+q}$ に対して

$$\begin{aligned} & \omega \wedge \eta(X_1, \dots, X_{p+q}) \\ &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \text{sgn } \sigma \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) \eta(X_{\sigma(p+1)}, \dots, X_{\sigma(p+q)}) \end{aligned}$$

となる．

de Rham コホモロジー群の定義

可微分多様体 M 上の微分形式 ω が $d\omega = 0$ を満たすとき，これを閉形式とよぶ． M 上の p 次閉形式全体を $Z^p(M)$ で表す．また，ある微分形式 φ を用いて $\omega = d\varphi$ と表されるとき， ω を完全形式とよぶ． M 上の p 次完全形式全体を $B^p(M)$ で表す．完全形式は閉形式となる．商空間 $Z^p(M)/B^p(M)$ を $H_{DR}^p(M)$ で表し， M の p 次 de Rham コホモロジー群とよぶ．