

幾何学 III 3. 多様体上の微分形式とその外微分

ベクトル束

可微分多様体 M 上の C^∞ 級ベクトル束とは、可微分多様体 E と C^∞ 級写像 $\pi : E \rightarrow M$ の組であって以下の条件をみたすものである。

1. $x \in M$ に対して $\pi^{-1}(x)$ は線形空間 $\mathbf{R}^n$ の構造をもつ。
2. (局所自明性) $x \in M$ に対して開近傍 U と可微分同相写像

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{R}^n$$

があつて、射影 $p : U \times \mathbf{R}^n \rightarrow U$ に対して $p \circ \varphi = \pi$ が満たされる。
さらに、任意の $y \in U$ に対して $\varphi|_{\pi^{-1}(y)} : \pi^{-1}(y) \rightarrow \{y\} \times \mathbf{R}^n$ は線形同型写像である。

このとき E を全空間、 M を底空間、 $\pi^{-1}(x)$ を x 上のファイバーとよぶ。 C^∞ 級写像 $s : M \rightarrow E$ で $\pi \circ s = id$ を満たすものをベクトル束 $\pi : E \rightarrow M$ の C^∞ 級切断とよび、 C^∞ 級切断全体の集合を $\Gamma(M, E)$ で表す。

二つの局所自明化写像 $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbf{R}^n, \varphi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \rightarrow U_\beta \times \mathbf{R}^n$ に対して $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ のとき、

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, u) = (x, g_{\alpha\beta}(x)u)$$

により、 C^∞ 級写像 $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbf{R})$ が得られる。このような
はり合わせ写像のデータを与えることにより、逆にベクトル束を構成することができる。

多様体上の微分形式

可微分多様体 M の余切ベクトル束 T^*M に対して、その p 階外積 $\wedge^p T^*M$ をとり、その切断 $\Gamma(M, \wedge^p T^*M)$ の要素を M 上の p 次微分形式とよぶ。 M 上の p 次微分形式全体の空間を $\Omega^p(M)$ で表す。 M 上の p 次微分形式は局所座標を用いて

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

と表される。ここで、 $a_{i_1 \dots i_p}(x_1, \dots, x_n)$ は C^∞ 級関数である。

微分形式についてのいくつかの重要な性質を挙げておこう。微分形式の外積

$$\wedge : \Omega^p(M) \times \Omega^q(M) \longrightarrow \Omega^{p+q}(M)$$

が定義される。多様体の間の C^∞ 級写像 $f : M \longrightarrow N$ に対して、微分形式の引き戻し

$$f^* : \Omega^p(N) \longrightarrow \Omega^p(M)$$

が定まる。

微分形式の外微分

外微分 $d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$ とよばれる次の性質を満たす線形写像が一意的に存在する。

1. $\omega \in \Omega^p(M), \eta \in \Omega^q(M)$ に対して

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$$

が成り立つ。

2. $f \in \Omega^0(M)$ に対して df は関数 f の微分と一致する。
3. $f \in \Omega^0(M)$ に対して $d(df) = 0$ となる。

上のようにして定まる外微分 $d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$ は、つねに

$$d \circ d = 0$$

を満たす。

また、多様体の間の C^∞ 級写像 $f : M \longrightarrow N$ に対して、

$$df^*(\omega) = f^*d(\omega)$$

が成立する。