

幾何学 III 2. 多様体上の 1 次微分形式

多様体の接ベクトル束

n 次元可微分多様体 M の点 p に対して, M の p における**接空間**を $T_p M$ とおく. $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ (共通部分を持たない和集合) とおいて, TM に以下のように可微分多様体の構造を入れる.

まず, $\pi: TM \rightarrow M$ を自然な射影とする. また, (U, φ) を M の局所座標系とする. U の点 p をとる. 接空間 $T_p M$ の要素

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

に対して, $\tilde{\varphi}(v) = (p, (\alpha_1, \dots, \alpha_n))$ とおいて, 写像

$$\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{R}^n$$

を定義する. 別の局所座標 (V, ψ) , $p \in V$ について,

$$v = \sum_{i=1}^n \beta_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)_p$$

と表すと, 座標変換 $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(p, (\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = (p, (\beta_1, \dots, \beta_n))$ は

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) (p)$$

で与えられる. TM の部分集合 O が開集合であるとは, 局所座標系 (U, φ) に対して, $\tilde{\varphi}(O \cap \pi^{-1}(U))$ が $U \times \mathbf{R}^n$ の開集合であることと定義する. このようにして, TM は位相空間となり, 上の $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ を局所座標系とする $2n$ 次元可微分多様体の構造をもつ. TM を M の**接ベクトル束** (tangent vector bundle) とよぶ.

M の各点 p における接ベクトル空間 $T_p M$ の要素 X_p が与えられているとする. 点 p のまわりの局所座標系 $(U, (x_1, \dots, x_n))$ をとり, U の点 q について

$$X_q = \sum_{i=1}^n a_i(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q$$

とおく. 関数 a_i が各点の近傍 U で C^∞ 級であるとき, 対応 $q \mapsto X_q$ を X で表し M 上の C^∞ 級**ベクトル場**という. これは接ベクトル束の滑らかな

切断, つまり, C^∞ 級写像 $s: M \longrightarrow TM$ で, $\pi \circ s = id_M$ を満たすものととらえることができる.

余接空間と 1 次微分形式

接空間 $T_p M$ の双対空間 $T_p^* M$ を**余接空間** (cotangent space) とよぶ. 点 p のまわりの M の局所座標 $(x_1, \dots, x_n)$ をとると, $T_p^* M$ の基底として $(dx_1)_p, \dots, (dx_n)_p$ がとれる. $T^* M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M$ (共通部分を持たない和集合) とおいて, $(dx_1)_p, \dots, (dx_n)_p$ の座標変換の規則に基づいて, 接ベクトル束と同様に可微分多様体の構造を入れたものを M の**余接ベクトル束** (cotangent vector bundle) とよぶ. 具体的な座標変換の式は

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (dx_i)_p = \sum_{i=1}^n \beta_i (dy_i)_p$$

のとき,

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right) (p)$$

で与えられる.

$T^* M$ の滑らかな切断を M 上の**1 次微分形式** (differential 1-form) とよぶ. 1 次微分形式 ω は局所座標を用いて

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) dx_i$$

と表示される. ここで, $a_i(x_1, \dots, x_n)$ は C^∞ 級関数である.

M 上の 1 次微分形式全体を $\Omega^1(M)$ で表す. M 上の C^∞ 級ベクトル場全体を $\chi(M)$ とかくと自然なペアリング

$$\Omega^1(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

が定義される. ここで, $C^\infty(M)$ は M 上の C^∞ 級関数全体のなす代数を表す. 1 次微分形式 ω とベクトル場 X に対して, 上のペアリングを $\omega(X)$ で表すと

$$\omega(X + Y) = \omega(X) + \omega(Y), \quad \omega(fX) = f\omega(X), \quad f \in C^\infty(M)$$

が成立する.