

幾何学 III 15. Frobenius の定理と積分可能条件

Frobenius の定理 – ベクトル場による表現

可微分多様体 M に対して、 $\mathcal{D}$ が r 次元の**分布** (distribution) であるとは、 M の各点 p に対して接空間 $T_p M$ の r 次元部分空間 $\mathcal{D}_p$ を対応させるもので、 $\mathcal{D}_p$ が p について C^∞ に依存することである。 M の部分多様体 N は、 N の任意の点 p に対して $T_p N = \mathcal{D}_p$ であるとき、 $\mathcal{D}$ の**積分多様体** (integral manifold) という。 M のすべての点 p において p の近傍で、 p を通る積分多様体が存在するとき、 $\mathcal{D}$ を**完全積分可能** (completely integrable) であるという。 M 上のベクトル場 X は、すべての点 $p \in M$ において $X_p \in \mathcal{D}_p$ であるとき、 $\mathcal{D}$ に属するという。可微分多様体 M 上の分布 $\mathcal{D}$ は、 $\mathcal{D}$ に属する任意のベクトル場 X, Y に対して、 $[X, Y]$ が $\mathcal{D}$ に属するとき、**包合的** (involutive) であるという。

定理 (Frobenius)

可微分多様体 M 上の分布 $\mathcal{D}$ が完全積分可能であるための必要十分条件は、 $\mathcal{D}$ が包合的であることである。

ベクトル場 X, Y について、それらが生成するフローを、それぞれ、 $\{\phi_t\}$, $\{\psi_s\}$ とする。Frobenius の定理の証明には、次の命題が重要な役割を果たす。

命題

以下の (i), (ii), (iii) は同値である。

- (i) $[X, Y] = 0$
- (ii) Y は $\{\phi_t\}$ によって不変である。
- (iii) $\{\phi_t\}, \{\psi_s\}$ は可換である。

Frobenius の定理 – 微分形式による表現

M の次元を n として、 $s = n - r$ とおく。分布 $\mathcal{D}$ に対して、 $I^k(\mathcal{D})$ を、 M 上の k 次微分形式 ω で $\mathcal{D}$ に属する k 個のベクトル場 $X_1, \dots, X_k$ について、つねに

$$\omega(X_1, \dots, X_k) = 0$$

が成り立つものの全体とする. $I(\mathcal{D}) = \bigoplus_{k=1}^n I^k(M)$ とおくと, $I(\mathcal{D})$ は $\Omega^*(M)$ のイデアルとなる. $I(\mathcal{D})$ は s 個の 1 次微分形式 $\omega_1, \dots, \omega_s$ で生成され, 各点 $p \in M$ の開近傍 U 上で $q \in U$ に対して

$$\mathcal{D}_q = \{X \in T_q M \mid \omega_1(X) = \dots = \omega_s(X) = 0\}$$

と表される. このとき, 分布 $\mathcal{D}$ が包合的であるための必要十分条件は, U 上で 1 次微分形式 ω_{ij} , $1 \leq i, j \leq s$ が存在して

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^s \omega_{ij} \wedge \omega_j$$

と表されることである. 上の $\omega_1 = \dots = \omega_s = 0$ は Pfaff 方程式系とよばれる.