幾何学 III 14．de Rham の定理の証明の概要

Čech-de Rham の定理の証明

可微分多様体 M に対してコホモロジー群の同型

$$\varphi : H^q_{DR}(M) \cong \check{H}^q(M,\mathcal{U})$$

が成立することは次のように証明される．

すでに定義した二重複体

$$\delta : \Omega^{k,\ell}(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega^{k+1,\ell}(\mathcal{U}), \quad d : \Omega^{k,\ell}(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega^{k,\ell+1}(\mathcal{U})$$

を考える．

このとき，次は完全系列であることが示される．

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Omega^{\ell}(M) \longrightarrow \Omega^{0,\ell}(M) \longrightarrow \Omega^{1,\ell}(M) \longrightarrow \cdots \\ 0 \longrightarrow C^k(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega^{k,0}(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega^{k,1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

最初の系列の完全性は次のように証明される．まず，開被覆 $\mathcal{U}$ に対応した 1 の分割 $\{f_\alpha\}$ をとり，

$$(\Phi\omega)(\alpha_0, \cdots, \alpha_k) = \sum_\alpha f_\alpha \ \omega(\alpha, \alpha_0, \cdots, \alpha_k)$$

とおくと

$$\delta(\Phi\omega) + \Phi(\delta\omega) = \omega$$

が成立することを用いる．また，二つ目の系列については Poincaré の補題を用いる．

同型写像 φ は次のように構成される．まず，$d\omega = 0$ を満たす $\omega \in \Omega^\ell(M)$ に対して，制限写像の像を $\omega_0 \in \Omega^{0,\ell}(M)$ とかく．このとき，$d\omega_0 = 0$ となり，上の完全系列から $d\eta_0 = \omega_0$ となる η_0 が存在する．次に $\omega_1 = \delta\eta_0$ とおくと，$d\omega_1 = 0$ となり，再び上の完全系列から $d\eta_1 = \omega_1$ となる η_1 が存在する．これを繰り返して，最終的には $\omega_\ell \in \Omega^{\ell,0}(\mathcal{U})$ が得られ，これは $c \in C^\ell(\mathcal{U})$ の像となる．写像 φ は ω に c を対応させることによって得られる．

de Rham の定理の証明

M を単体的複体 K の定める多面体 $|K|$ と同相な三角形分割された可微分多様体とする．K の頂点の集合を V として，

$$\mathcal{U} = \{O(v) \mid v \in V\}$$

とおく．ここで，$O(v)$ は頂点 v を含む単体の内点集合の和集合である．このとき，同型

$$\check{H}^q(|K|,\mathcal{U}) \cong H^q(M, \mathbf{R})$$

が成立する．de Rham の定理はČech-de Rham の定理とこの同型写像をあわせることによって得られる．

de Rham の定理の応用

M をコンパクトで向きづけられた連結な n 次元可微分多様体とする．このとき，

$$H^n_{DR}(M) \cong \mathbf{R}$$

が成立し，これは体積要素によって生成される．微分形式のウェッジ積と de Rham の定理をあわせることにより，コホモロジー群 $H*(M, \mathbf{R})$ には積構造が入ることが分かる．このことを用いて，

$$\dim H^k(M; \mathbf{R}) \cong \dim H^{n-k}(M; \mathbf{R})$$

が示される．これは Poincaré の双対定理の帰結である．