幾何学III 13. Čech コホモロジー

Čech コホモロジーの定義

X を位相空間とする．$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を X の開被覆とする．$\mathcal{U}$ を用いて，抽象複体 $N(\mathcal{U})$ を次のように定義する．$N(\mathcal{U})$ の頂点は A の要素全体とする．また，相異なる A の要素 $\alpha_0, \cdots, \alpha_k$ が，k 単体を定めるのは

$$U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k} \neq \emptyset$$

であるときと定める．このようにして定義される抽象複体 $N(\mathcal{U})$ の k 次元コホモロジー群を $\check{H}^k(X,\mathcal{U})$ で表し，これを開被覆 $\mathcal{U}$ に関する X のČech コホモロジー群とよぶ．

Čech コホモロジー群を定める k 次のコチェイン群 $C^k(X,\mathcal{U})$ の要素 c は順序のついた相異なる A の要素 $\alpha_0, \cdots, \alpha_k$ に対して実数を与える関数 $c(\alpha_0, \cdots, \alpha_k)$ で $\alpha_0, \cdots, \alpha_k$ の置換 σ について

$$c(\alpha_{\sigma(0)}, \cdots, \alpha_{\sigma(k)}) = sgn\ \sigma\ c(\alpha_0, \cdots, \alpha_k)$$

を満たすもの全体である．コバウンダリー作用素は

$$\delta c(\alpha_0, \cdots, \alpha_{k+1}) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i c(\alpha_0, \cdots, \widehat{\alpha_i}, \cdots, \alpha_{k+1})$$

で与えられる．

Čech-de Rham の定理

M を可微分多様体とする．M の開被覆 $\mathcal{U}$ で，開集合の共通部分 $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k}$ は可縮であるとする．

定理　可微分多様体 M に対してコホモロジー群の同型

$$H^q_{DR}(M) \cong \check{H}^q(M,\mathcal{U})$$

が成立する．

Čech-de Rham の定理の証明には，次の二重複体が用いられる．順序のついた相異なる A の要素 $\alpha_0, \cdots, \alpha_k$ に対して $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k}$ 上の ℓ 次微分形式 $\omega(\alpha_0, \cdots, \alpha_k)$ で $\alpha_0, \cdots, \alpha_k$ の置換 σ について

$$\omega(\alpha_{\sigma(0)}, \cdots, \alpha_{\sigma(k)}) = sgn\ \sigma\ \omega(\alpha_0, \cdots, \alpha_k)$$

を満たすものを定め，このような対応全体を $\Omega^{k,\ell}(\mathcal{U})$ とおく．

$\Omega^{k,\ell}(\mathcal{U})$ には，微分

$$\delta : \Omega^{k,\ell}(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega^{k+1,\ell}(\mathcal{U}), \quad d : \Omega^{k,\ell}(\mathcal{U}) \longrightarrow \Omega^{k,\ell+1}(\mathcal{U})$$

が次のように定義される．

$$\begin{aligned} \delta\omega(\alpha_0, \cdots, \alpha_{k+1}) &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \omega(\alpha_0, \cdots, \widehat{\alpha_i}, \cdots, \alpha_{k+1}) \\ (d\omega)(\alpha_0, \cdots, \alpha_k) &= d(\omega(\alpha_0, \cdots, \alpha_k)) \end{aligned}$$

これらは

$$\delta \circ \delta = 0, \quad d \circ d = 0, \quad \delta \circ d = d \circ \delta$$

を満たす．