

幾何学 III 12. チェイン上の積分と de Rham の定理

微分形式のチェイン上の積分

q 次元ユークリッド単体 Δ^q を

$$\Delta^q = \{(x_1, \dots, x_q) \in \mathbf{R}^q \mid x_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq q, \quad \sum_{i=1}^q x_i \leq 1\}$$

で定める. M を可微分多様体とする. C^∞ 写像 $\sigma: \Delta^q \rightarrow M$ を M の q 次元特異単体とよぶ. M の q 次元特異単体全体で生成される自由加群を $S_q(M)$ で表し, $S_q(M)$ の要素を M の q 次元チェインとよぶ.

$\varepsilon_i: \Delta^{q-1} \rightarrow \Delta^q, 0 \leq i \leq q$ を

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(x_1, \dots, x_{q-1}) &= \left(1 - \sum_{i=1}^{q-1} x_i, x_1, \dots, x_{q-1}\right) \\ \varepsilon_i(x_1, \dots, x_{q-1}) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{q-1}), \quad i > 0 \end{aligned}$$

で定義する. これを用いて, 境界作用素 $\partial: S_q(M) \rightarrow S_{q-1}(M)$ を q 次元特異単体 σ に対して

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i$$

で定める.

M 上の q 次微分形式 ω の q 次元特異単体 σ 上の積分を

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\Delta^q} \sigma^* \omega$$

で定め, q 次元チェイン $c = \sum_i a_i \sigma_i$ に対しては, これを線形に拡張する.

チェイン上の積分についての Stokes の定理

M 上の $q-1$ 次微分形式 ω と $c \in S_q(M)$ に対して Stokes の定理

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

が成立する.

de Rham の定理

M の $\mathbf{R}$ 係数 q 次元コチェインの空間を

$$S^q(M; \mathbf{R}) = \text{Hom}(S_q(M), \mathbf{R})$$

で定義し、余境界作用素 $\delta : S^q(M; \mathbf{R}) \rightarrow S^{q+1}(M; \mathbf{R})$ を

$$(\delta f)(c) = f(\partial c)$$

で定める。コチェイン複体 $(S^q(M; \mathbf{R}), \delta)$ のコホモロジー群を $H^q(M; \mathbf{R})$ で表す。準同型写像 $I : \Omega^q(M) \rightarrow S^q(M; \mathbf{R})$ を

$$I(\omega)(c) = \int_c \omega$$

で定義する。Stokes の定理を用いると、 I はコチェイン写像であり、それぞれのコホモロジー群の間の準同型写像を誘導することが示される。このとき、次の **de Rham の定理** が成立する。

定理 可微分多様体 M に対して上の写像 I はコホモロジー群の同型

$$H_{DR}^q(M) \cong H^q(M; \mathbf{R})$$

を導く。