

幾何学 III 11. Riemann 多様体上の Green の定理

Green の定理

M を向き付けられた Riemann 多様体とし, ω をその体積要素とする. X を M 上の C^∞ 級ベクトル場とすると, X の発散 $\operatorname{div} X$ を

$$\mathcal{L}_X \omega = (\operatorname{div} X) \omega$$

で定義する. Cartan の公式を用いると

$$\mathcal{L}_X \omega = d(\iota(X)\omega)$$

が成り立つ. Stokes の定理とあわせると, 次の Riemann 多様体上の Green の定理が示される.

定理 M を境界のある向き付けられたコンパクト Riemann 多様体とする. このとき,

$$\int_M (\operatorname{div} X) \omega = \int_{\partial M} i^* (\iota(X)\omega)$$

が成立する. ここで, $i: \partial M \rightarrow M$ は包含写像である. $\partial M = \emptyset$ の場合には

$$\int_M (\operatorname{div} X) \omega = 0$$

が成り立つ.

Laplace 作用素と調和関数

M を Riemann 多様体とする. M 上の C^∞ 関数 f に対して, 勾配ベクトル場 $\operatorname{grad} f$ を, M 上の任意のベクトル場 X に対して

$$df(X) = \langle \operatorname{grad} f, X \rangle$$

を満たすものとして定義する. 局所的には Riemann 計量 g_{ij} を成分とする行列の逆行列 (g^{ij}) を用いて,

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と表される.

Laplace 作用素 Δ を

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$$

で定義する. Green の定理と同じ状況の下で,

$$\int_M (\Delta f) \omega = \int_{\partial M} i^* (\iota(X) \omega), \quad X = \operatorname{grad} f$$

が成り立つ. $\partial M = \emptyset$ の場合には

$$\int_M (\Delta f) \omega = 0$$

が成り立つ. $\Delta f = 0$ を満たす関数を調和関数とよぶ.

Lie 微分と外微分に関連したいくつかの式

ベクトル場 X の生成するフローを φ_t として, ベクトル場 Y に対して Lie 微分を

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{-t})_* Y - Y}{t}$$

で定義すると, $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ が成立する.

p 次微分形式 ω の Lie 微分について

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L}_X \omega)(X_1, \dots, X_p) \\ &= \frac{1}{p} \{ X \omega(X_1, \dots, X_p) - \sum_{i=1}^p \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_p) \} \end{aligned}$$

が成り立つ.

また, 外微分については,

$$\begin{aligned} & (d\omega)(X_1, \dots, X_{p+1}) \\ &= \frac{1}{p+1} \left\{ \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{p+1}) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{p+1}) \right\} \end{aligned}$$

が成り立つ.